

# ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

85. Band, Heft 2

27. Januar 1961

S. 241—480

## Grundlagenfragen. Philosophie. Logik.

Rios, S.: Wissenschaftliche Theorien und mathematische Modelle von Naturerscheinungen. *Trabajos Estadíst.* 10, 31—42 (1959) [Spanisch].

Costa, Newton Carneiro Affonso da: Bemerkungen zum Begriff des Widerspruchs. *Anuário Soc. Paranaense Mat.*, II. Sér. 1, 6—8 (1958) [Portugiesisch].

Costa, Newton Carneiro Affonso da: Eine Frage der Philosophie der Mathematik. *Anuário Soc. Paranaense Mat.*, II. Sér. 1, 21—27 (1958) [Portugiesisch].

● Beth, Evert W.: The foundations of mathematics. A study in the philosophy of science. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics). Amsterdam: North-Holland Publishing Company 1959. XXVI, 741 p. Guilders 50,00.

Der Zweck des Buches ist, eine bessere Verbindung zwischen den mathematischen Grundlagenuntersuchungen und der allgemeinen Philosophie herzustellen. Es wird eine Übersicht über die einschlägigen Probleme und Ergebnisse geboten, gleichzeitig mit Erläuterungen, die auf die philosophische Bedeutung hinweisen und die in diesem Sinne auch auf die Geschichte der Probleme eingehen. Das zusammengetragene Material ist sehr umfassend; Verf. geht teils auf alle technischen Einzelheiten ein, teils werden Ergebnisse referiert, immer in dem Sinne, daß von einem durchschnittlichen Grad der logischen Strenge zu den verfeinerten logischen Methoden aufgestiegen wird. — Der erste Teil gibt eine historische Entwicklung, zunächst einen kurzen Überblick über Ideen der griechischen Philosophie, soweit sie die Grundlagenforschung berühren. Die Diskrepanz der letzteren mit der spekulativen Philosophie bis in unsere Zeit hinein erklärt sich nach Verf. dadurch, daß in der Philosophie noch die Aristotelische Theorie der Wissenschaft herrscht, nach der jede einzelne Disziplin von evidenten Sätzen ausgehend deduktiv zu weiteren Sätzen fortschreitet. Es folgt ein kurzer Abriß der Entwicklung der symbolischen Logik und der formalisierten Axiomatik von De Morgan und Boole bis zu Frege, Russell und Hilbert. — Der zweite Teil gibt einen Überblick über die elementare (nicht formalisierte) Axiomatik: grundlegende Begriffe, genetische Erweiterungen des Systems der natürlichen Zahlen, Theorie der natürlichen Zahlen. Bei der letzten wird die rekursive Definition und Beweisführung näher besprochen, ferner die Axiomatik nach Dedekind und Peano sowie die Kategorizität der Peanoschen Postulate. Als Anhang findet sich die Reduktion der rekursiven Definitionen auf explizite nach Gödel. Weiter wird auf die Axiomatik fundamentaler Theorien der modernen Mathematik eingegangen: Algebra, Euklidische und Nichteuklidische Geometrie, Topologie, Boolesche Algebra. Der dritte Teil geht entsprechend des dem Buch zugrunde liegenden Gedankens, zu immer verfeinerten Methoden aufzusteigen, zu der formalisierten Axiomatik über. Die Begriffe des formalen Systems und der zugehörigen Syntax und Semantik werden entwickelt. Bemerkenswert sind die vom Verf. aufgestellten semantischen Tafeln und deren Zusammenhang mit den Systemen eines natürlichen Schließens vom Gentzenschen Typ. Es folgt ein Überblick über die symbolische Logik vom Aussagenkalkül bis zum Prädikatenkalkül der ersten Stufe mit einer Skizzierung des Übergangs zu höheren Stufen. Anschließend wird die finite Beweistheorie Hilberts erläutert und Beispiele angegeben, bei denen diese Methode zum Erfolg führt, z. B. bei der Untersuchung der Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit gewisser Systeme; ferner wird auf die Grenzen der finiten Methode hingewiesen. Wieder übereinstimmend mit der Grundanlage des Buches wird im vierten Teil zu einer Metamathematik übergegangen, die nicht wie bei Hilbert auf finite Schlußweisen



beschränkt ist. Eine genauere Definition der Syntax wird gegeben; mit der erweiterten Metamathematik wird die Vollständigkeit des Prädikatenkalküls der ersten Stufe bewiesen. Es folgen eine Axiomatik der Syntax, die Arithmetisierung der Syntax, die Verwendung des Begriffes der allgemein rekursiven Funktion zum Beweise der Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik der ersten Stufe. Der Begriff der Semantik im Tarskischen Sinne wird eingeführt und damit eine semantische Analyse der elementaren Prädikatenlogik und gewisser einfach geordneter Systeme gegeben. Als wichtiges neueres Ergebnis wird z. B. ein Theorem von Vaught über Vollständigkeit und Entscheidbarkeit von Theorien, die im Prädikatenkalkül der ersten Stufe mit Identität formalisierbar sind, erwähnt. Es folgt eine Darstellung der Wahrheitsdefinition Tarskis und eine Auseinandersetzung mit den Einwänden gegen diese Definition, weiter eine Studie über die Beschränktheit der Ausdrucksmittel von formalisierten Theorien gemäß Lindenbaum und Tarski. Der folgende Teil mit dem Titel: "The existence of mathematical entities" ist vielleicht von einem philosophischen Standpunkt aus der wichtigste. Es werden nacheinander dargelegt die Ideen des Logizismus (Freges Deduktion der Arithmetik, Russellsches Paradoxon, sonstige Schwierigkeiten), des Cantorismus (naive Mengenlehre, Kardinalzahlen, Ordinalzahlen, Auswahlaxiom, Definitionen der endlichen Menge, Zermelos Axiomatik, Beschränktheitsaxiom, absolute und relative Widerspruchsfreiheitsbeweise), des Intuitionismus (Brouwers grundlegende Ideen, Aufspaltung klassischer Begriffe, Theorie des Kontinuums, abweichende intuitionistische Theorien, ein originaler Beitrag des Verf. zu einer semantischen Konstruktion der intuitionistischen Logik), des Nominalismus (Darlegung der Unterschiede zwischen Platonismus und Nominalismus, letzter in moderner Form angenommen). — Teil VI beschäftigt sich mit den logischen und mengentheoretischen Paradoxien und den Mitteln zu ihrer Vermeidung (axiomatisches System der Mengenlehre, Typentheorie, Unterscheidung zwischen formaler Sprache und Metasprache). Anschließend werden verschiedene Anwendungen topologischer Methoden in der Metamathematik gegeben, z. B. zur Interpretation von Vollständigkeitssätzen für verschiedene Systeme, ferner wird auf den Kalkül der Systeme und Modelle und seine algebraische Charakterisierung eingegangen. Es folgen die Theorie der allgemein rekursiven Funktionen, Mengen und Prädikate und die negativen Resultate, die das Entscheidungsproblem betreffen. In dem abschließenden Teil werden die Ergebnisse der Grundlagenforschung mit gegenwärtigen philosophischen Ansichten verglichen, insbesondere so weit sie die Ontologie der Mathematik betreffen. — Dem Buch sind eine Reihe von Übungen verschiedenen Schwierigkeitsgrades beigegeben. Es enthält Literaturnachweise zu den einzelnen Kapiteln und eine ziemlich ausführliche, wenn auch notwendigerweise nicht vollständige, Schlußbibliographie. Über den Wert des Buches, das eine gewisse Enzyklopädie der Grundlagenforschung darstellt, ist kein Wort zu verlieren. Bei der Zersplitterung der Grundlagenforschung wird eine derartige Übersicht auch dem willkommen sein, der auf einem Teilgebiet arbeitet. Natürlich wird der einzelne, je nach seinem Standpunkt, gewünscht haben, daß das eine oder das andere Gebiet ausführlicher behandelt worden wäre. Es ließ sich auch nicht vermeiden, daß einzelne Gebiete, z. B. die mehrwertige und die kombinatorische Logik, gar nicht erwähnt wurden, oder etwa die modale Logik nur am Rande. *W. Ackermann.*

**González Asenjo, Florencio:** Skizze einer Theorie der Sozietäten. *Math. Notae* 16, 5—19 (1957) [Spanisch].

Der vorliegende Aufsatz ist ein Auszug aus dem ersten Teil einer Diss. „Kybernetik und Theorie der Sozietäten“ (La Plata 1956). Verf. möchte gewisse Gedanken von Whitehead (Process and reality, New York 1941) formalisieren und als Grundsätze einer rein mathematischen Theorie der Kybernetik interpretieren. Die „Element-Menge“-Relation (und damit das Peanosche  $\varepsilon$ -Symbol) soll durch eine organisch reichere Beziehung zwischen Teil und Ganzes ( $\sigma$ -Symbol) ersetzt werden, die



dreier ziemlich vagen Axiomen der „vielfältigen Lokalisierung“, der „Organisation“ und der „Information“, sowie einer gewissen partiellen Ordnung genügen soll, woraus sich eine der Booleschen Algebra ziemlich analoge „Algebra der Sozietäten“ ableiten ließe. Die spärlichen Angaben über die gewünschte Formalisierung sind zu fragmentarisch für eine sachliche Beurteilung. Dagegen sind gewisse Anklänge an ältere „organische“ Philosophien deutlich feststellbar.

D. Tamari.

Beth, E. W.: *Moderne Logik*. Euclides, Groningen 34, 257—266 (1959) [Holländisch].

L'article reproduisant une conférence à des non-spécialistes, constitue une introduction à la méthode des „tableaux sémantiques“ de l'A. Nous ne développerons pas ici cette méthode, qui a fait l'objet d'exposés plus développés; nous nous bornons à quelques remarques sur le mode d'introduction adopté. L'A. assigne comme problème fondamental à la logique „la découverte et la justification de critères généraux permettant d'apprécier la valeur démonstrative des raisonnements“. Le critère fondamental qu'il adopte est: „Un raisonnement a une valeur démonstrative s'il ne permet pas de contre-exemple“. Ce critère est très ancien, mais son caractère fondamental aurait été mis en évidence par Kreisel en 1951. L'A. discute deux figures de syllogismes, l'une légitime (qui donnerait en notation traditionnelle  $sEm$ ,  $mAp$ ,  $sEp$ ) l'autre illégitime, à savoir:  $sOm$ ,  $mOp$ ,  $sOp$ . Si les trois termes du syllogisme illégitime reçoivent des interprétations concrètes, il sera possible de trouver des interprétations qui rendent les prémisses vraies et la conclusion vraie, et d'autres qui rendent les prémisses fausses et la conclusion fausse. De quoi il n'y a rien à tirer sur la validité du syllogisme. Par contre l'illégitimité du syllogisme sera prouvée dès qu'on aura trouvé un contre-exemple, une interprétation qui rendra les prémisses vraies et la conclusion fausse. Le recours aux contre-exemples concrets ne constituera pas un critère méthodiquement applicable: contre-exemple ne pourrait être découvert qu'au hasard et on ne voit pas comment on prouverait, dans le cas d'un syllogisme valide, l'inexistence de tout contre-exemple. Il faudra recourir à une méthode de recherche systématique des contre-exemples, applicable à une logique usant de variables: cette méthode sera la méthode des tableaux sémantiques. Une simple remarque additionnelle. La méthode, comme elle vient d'être introduite, satisfera le lecteur initié à la logique classique, formalisée ou non. Si le lecteur était formé à la mentalité intuitioniste il serait intéressant de lui montrer en détail que l'impossibilité de construire un contre-exemple est une condition suffisante pour la validité du raisonnement et ne prouve pas simplement l'impossibilité d'une démonstration d'invalidité.

R. Feys.

● Pasquinelli, Alberto: *Introduzione alla logica simbolica*. Prefazione di Ludovico Geymonat. (Biblioteca di cultura scientifica. No. 52.) Torino: Edizioni Scientifiche Einaudi 1957. X, 118 p. L. 1200.

Non-technical exposition, from Carnap's point of view, of parts of the propositional calculus.

H. Guggenheimer.

Rose, Alan and J. Barkley Rosser: *Fragments of many-valued statement calculi*. Trans. Amer. math. Soc. 87, 1—53 (1958).

Der endliche oder unendliche Wahrheitswertbereich  $\mathfrak{S}$  einer mehrwertigen Aussagenlogik bestehe aus reellen Zahlen, die im Intervall  $[0, 1]$  liegen. Mit  $x$  und  $y$  sollen auch  $c(x, y) = \min(1, 1 - x + y)$  und  $n(x) = 1 - x$  zu  $\mathfrak{S}$  gehören. Falls  $\mathfrak{S}$  endlich ist, sei  $t(x)$  für alle  $x$  gleich dem größten Wahrheitswert  $< 1$ .  $S$  sei eine reelle Zahl aus  $[0, 1]$ , die nicht in  $\mathfrak{S}$  zu liegen braucht. Die Wahrheitswerte  $> S$  (und eventuell  $S$  selbst) werden als „ausgezeichnet“ erklärt. In jedem Fall soll 1 ausgezeichnet und 0 nicht ausgezeichnet Wahrheitswert sein. Die Formeln werden aus Variablen mit Hilfe der Grundverknüpfungen  $C$  (Implikation),  $N$  (Negation) und eventuell  $T$  (einstellig) zusammengesetzt. Ihre Wahrheitswerte werden durch die entsprechenden Funktionen  $c$ ,  $n$  und  $t$  bestimmt. Verff. lösen die Aufgabe,



zu gegebenen  $\mathfrak{S}$  und  $S$  ein System von Axiomen und Schlußregeln anzugeben, mit denen sich genau diejenigen Formeln ableiten lassen, die nur ausgezeichnete Werte annehmen. Dabei wird unterschieden, ob  $\mathfrak{S}$  endlich oder unendlich ist, ob  $S = 1$  oder  $S < 1$  ist und ob (bei endlichem  $\mathfrak{S}$ ) nur  $C$  und  $N$  oder  $C$ ,  $N$  und  $T$  als Grundverknüpfungen auftreten. Zugleich wird hiermit eine Vermutung von Łukasiewicz bestätigt, indem ein System mit dem modus ponens als einziger Schlußregel und mit 5 Axiomenschemata, die sich auf die Grundverknüpfungen  $C$ ,  $N$  und die definierte Verknüpfung  $A$  (Alternative) beziehen, für unendlichen Wertbereich mit dem einzigen ausgezeichneten Wert 1 als vollständig nachgewiesen wird. Kurt Schütte.

**Meredith, C. A.:** The dependence of an axiom of Łukasiewicz. Trans. Amer. math. Soc. 87, 54 (1958).

In der vorstehend referierten Arbeit von Rose und Rosser wurde ein Axiomensystem von Łukasiewicz mit den Grundverknüpfungen  $C$  (Implikation),  $N$  (Negation) und der definierten Verknüpfung  $A$  (Alternative) als vollständig für einen mehrwertigen Aussagenkalkül nachgewiesen. Hierbei ist  $APQ$  durch  $CCPQQ$  definiert. ( $P$  und  $Q$  sind beliebige Formeln.) Die 5 Axiomenschemata lauten:  $CPCQP$ ,  $CCPQCCQRCPR$ ,  $CAPQAQP$ ,  $CCNPNQCQP$  und  $ACPQCQP$ . Die einzige Schlußregel lautet: Wenn  $P$  und  $CPQ$ , so  $Q$ . In der vorliegenden Note wird das 5. Axiomenschema mit Hilfe der Schlußregel allein aus den übrigen 4 Axiomenschemata abgeleitet.

Kurt Schütte.

**Chang, C. C.:** Proof of an axiom of Łukasiewicz. Trans. Amer. math. Soc. 87, 55—56 (1958).

Es handelt sich um einen anderen Beweis für das Ergebnis der vorstehend referierten Note von Meredith. Beide Noten wurden gleichzeitig eingereicht.

Kurt Schütte.

**Rose, Alan:** Many-valued logical machines. Proc. Cambridge philos. Soc. 54, 307—321 (1958).

Es sei  $m \geq 2$  und  $n$  die größte natürliche Zahl mit  $2^{n-1} < m$ . Verf. führt den  $m$ -wertigen Aussagenkalkül (mit den Werten  $1, \dots, m$ ) auf den zweiwertigen Aussagenkalkül (mit den Werten 0 und 1) zurück, indem er einer  $m$ -wertigen Formel  $X$  ein  $n$ -tupel zweiwertiger Formeln  $X_1, \dots, X_n$  zuordnet. Dabei erhält  $X$  den Wert  $\min \left( m, \sum_{i=1}^n x_i 2^{i-1} + 1 \right)$ , wenn die zweiwertigen Formeln  $X_1, \dots, X_n$  die Werte  $x_1, \dots, x_n$  haben. Es werden Schaltungen von Rechenmaschinen angegeben, die in dieser Weise auf der Grundlage des zweiwertigen Aussagenkalküls Entscheidungsverfahren für mehrwertige Kalküle liefern. Als Beispiel für praktische Anwendungen werden Methoden zur Berechnung der günstigsten akademischen Stundenpläne und der rationellsten Verwendung von Maschinen einer Fabrik diskutiert.

Kurt Schütte.

**Nolin, L.:** Sur l'algèbre des prédicats. Colloques internat. Centre nat. Rech. sci. 70, 33—37; Interventions. 37 (1958).

An algebraization of the calculus of predicates which, in contrast to the cylindrical algebras of Tarski and Thomson [a detailed account in L. Henkin, Math. interpretation of formal systems, 85—97 (1955)] and the polyadic algebras of Halmos (this Zbl. 56, 9), is supposed to be readily accessible to the non-specialist in algebra. Some of the features of the author's system may be briefly indicated: variables ranging over elements of the algebra are indexed with a non-negative integer — this corresponds to the number of arguments which a predicate has; in addition to operations corresponding to the Boolean operations and the existential quantifier (cylindrification operation) there are operations corresponding to increasing by one the degree of a relation, permuting the arguments, replacing the  $j$ 'th by the  $i$ 'th argument and forming the domain of a relation; the axioms are in the form of 22 equations for arbitrary index  $n$  ( $0 \leq n < \omega$ ). In the "interventions" there are brief comments by



Mostowski, Tarski, Porte and Riguët. Tarski contends that the author's system is far from simple — it would be possible to simplify it by introducing supplementary notions, but then one would be led to polyadic or cylindric algebras.

*T. Hailperin.*

**Turquette, Atwell R.:** Simplified axioms for many-valued quantification theory. *J. symbolic Logic* **23**, 139—148 (1959).

The author shows that the Rosser-Turquette formalization [Many-valued logics (1952; this Zbl. **47**, 15)] of certain  $m$ -valued predicate calculi may be simplified. The previous formalization used ten axiom schemes and two primitive rules of procedure and the new formalization uses nine axiom schemes with modus ponens as the only primitive rule of procedure. The new method is applicable to every  $m$ -valued predicate calculus to which the previous method was applicable. It is also applicable to certain other predicate calculi and it is therefore impossible, in certain cases, to derive all the original axiom schemes in the new formalization.

*A. Rose.*

**Jablonskij (Yablonsky), S. V.:** On limit logics. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **118**, 657—660 (1958) [Russisch].

Die Verallgemeinerung  $k$ -wertiger Logiken  $P_k$  ( $k \geq 2$ ) zur  $\aleph_0$ -wertigen Logik  $P_{\aleph_0}$  als System aller arithmetischen Funktionen, d. h. definiert auf  $N = \{0, 1, 2, \dots\}$  mit Werten in  $N$  in beliebig vielen Variablen, liegt auf der Hand. Verf. betrachtet für Superposition, d. h. Einsetzen, geschlossene Untersysteme von  $P_{\aleph_0}$  und insbesondere solche, die nur abzählbar viele Funktionen, jedoch homomorphe Bilder aller  $P_k$  enthalten (homo-, iso-morph in einem natürlichen, offensichtlichen Sinn). Diese werden Grenzlogiken  $P$  genannt. Satz: Es gibt  $c = 2^{\aleph_0}$  verschiedene (d. h. paarweise nichtisomorphe) Grenzlogiken. [Bem. d. Ref.: Die Funktion  $S$  (siehe letzte Zeile S. 657 usw.) muß eine 1—1-Funktion, d. h. Permutation von  $N$  sein! Solche Transformationen werden schon implizit in der Definition des Homomorphismus verwendet. Auf S. 658 erste Zeile muß  $S^{-1}$ , nicht  $S^{-i}$  gelesen werden].

*D. Tamari.*

**Costa, Newton Carneiro Affonso da:** Bemerkung zur Brouwer-Heytingschen Logik. *Anuário Soc. Paranaense Mat.* II. Sér. **1**, 9—10 (1958) [Portugiesisch].

**Lenz, Hanfried:** Zur Axiomatik der Zahlen. *Acta math. Acad. Sci. Hungar.* **9**, 33—44 (1958).

Für das System der natürlichen Zahlen, der ganzen Zahlen und für endliche zyklische Gruppen stellt Verf. gemeinsame Axiome auf: Ein Zahlensystem ist eine Menge  $S$  mit einer Abbildung  $\pi$  (der Nachfolgerfunktion) in sich von den folgenden Eigenschaften: (I)  $\pi$  ist umkehrbar, d. h. aus  $x^\pi$  (Bild von  $x$ ) =  $y^\pi$ , folgt  $x = y$ . (II) Es gibt ein Element  $0 \in S$ , so daß aus  $0 \in U \subset S$  und  $U^\pi = U \cap S^\pi$  stets  $U = S$  folgt (Induktionsaxiom). Eine Teilmenge  $U \subset S$  soll also mit  $S$  zusammenfallen, sobald sie die Zahl 0 und mit jedem Element  $x$  den Nachfolger und, falls einer existiert, einen Vorgänger von  $x$  enthält. Es gibt tatsächlich — abgesehen von Isomorphie — keine anderen Zahlensysteme, die den Axiomen (I) und (II) genügen. Ein System natürlicher Zahlen ist ein Zahlensystem  $S$  mit der Eigenschaft  $S^\pi \subset S$  ( $S^\pi \neq S$ ).  $S$  ist ein zyklisches Zahlensystem, wenn  $S^\pi = S$  und jede nichtleere Teilmenge  $U \subset S$  mit der Eigenschaft  $U^\pi \subset U$  mit  $S$  identisch ist. Aber wenn  $S^\pi = S$  ist und es eine echte, nichtleere Teilmenge  $V \subset S$  mit  $V^\pi \subset V$  gibt, dann ist  $S$  ein System ganzer Zahlen. Verf. führt auch die Addition und Multiplikation in diesen drei Bereichen gemeinsam ein.

*Z. Suetuna.*

**Shoenfield, J. R.:** Open sentences and the induction axiom. *J. symbolic Logic* **23**, 7—12 (1958).

Es werden Systeme der Arithmetik betrachtet, welche die folgenden Konstanten enthalten: 0,  $S$  (Nachfolger),  $P$  (Vorgänger),  $+$ , und welche in der Logik erster Stufe mit Identität formalisiert sind. In jedem solchen System (welches nur ge-



wisse endlich viele Axiome enthält) kann das Induktionsschema für Aussagen ohne gebundene Variable (d. h. offene Aussagen) durch endlich viele Spezialfälle ersetzt werden. Verf. betrachtet ferner ein spezielles solches System  $T_I$  und offene Aussagen  $C_m, D_{m,n}$  und zeigt: Aus  $T_I$  und endlich vielen der Aussagen  $C_m, D_{m,n}$  können nicht alle bewiesen werden; aus  $T_I$  und allen  $C_m, D_{m,n}$  folgen alle wahren offenen Aussagen; die Aussagen  $C_m, D_{m,n}$  können bewiesen werden auf Grund der folgenden „Doppelinduktionsregel“ für offene Aussagen: Falls  $A(x, 0), A(0, y), A(x, y) \rightarrow A(Sx, Sy)$ , so  $A(x, y)$ . E. Specker.

**Craig, W. and R. L. Vaught:** Finite axiomatizability using additional predicates. *J. symbolic Logic* 23, 289—308 (1959).

Supplementing Kleene's syntactic notion of finite-axiomatizability-with-additional-predicates, f. a.<sup>+</sup>, (this Zbl. 47, 250) the authors introduce a corresponding semantical notion, s. f. a.<sup>+</sup>: a theory  $T$  (of first order with a finite number  $p$  of non-logical predicates) is s. f. a.<sup>+</sup> if there is a finitely axiomatizable theory  $T'$  with  $p'$  predicates in addition to those of  $T$  such that any arbitrary realization  $\langle A, R_1, \dots, R_p \rangle$  of  $T$  is a model of  $T$  if and only if there are relations  $S_1, \dots, S_{p'}$  such that  $\langle A, R_1, \dots, R_p, S_1, \dots, S_{p'} \rangle$  is a model of  $T'$ . Concerning these notions the authors establish: (I) for theories with or without identity which have only infinite models the three notions of s. f. a.<sup>+</sup>, f. a.<sup>+</sup>, and recursive axiomatizability coincide (II) while in general s. f. a.<sup>+</sup> and f. a.<sup>+</sup> each imply axiomatizability, for theories without identity axiomatizability need not imply s. f. a.<sup>+</sup> and (III) for theories with identity axiomatizability need not imply f. a.<sup>+</sup>. The authors' s. f. a.<sup>+</sup> is closely related to Tarski's model theoretic notion  $PC \cap AC_d$  and many of their theorems are stateable as results in Tarski's theory of classes of models. The paper is richly detailed with minor remarks of interest. T. Hailperin.

**Kleene, S. C.:** Extension of an effectively generated class of functions by enumeration. *Colloquium math.* 6, dédié à C. Kuratowski, 67—78 (1958).

The author describes a class of functions based on the system of constructive ordinals, starting from the class of primitive recursive (p. r.) functions (functions p. r. in a set  $\Theta = \{\vartheta_1, \dots, \vartheta_i\}$  of initial functions) by stepwise adjoining definite functions which enumerate the functions already obtained. Let  $\langle a_0, \dots, a_n \rangle = p_0^{a_0} \dots p_n^{a_n}$  and let  $(b)_k$  stand for the  $k$ -th exponent in the prime representation of  $b$ . To the initial functions  $\vartheta_i(a_1, \dots, a_{m_i})$  are assigned indices  $\langle 0, m_i, i \rangle$  and similarly to the functions introduced by the definitionschemata of functions p. r. in  $\Theta$ .  $I n^{m_1, \dots, m_l}(b)$ , expressing the fact that  $b$  is the index of a function p. r. in  $\Theta$  is p. r. If  $\varphi$  is p. r. in  $\vartheta$  with index  $b$  and the  $\vartheta_i$  of  $\Theta$  are p. r. in  $\Psi$  with indices  $c_1, \dots, c_l$  then  $\varphi$  is p. r. in  $\Psi$  and its index is given by a p. r. function of  $b, c_1, \dots, c_l$ . The function p. r. in  $\Theta$  with index  $b$  is denoted by  $pr_b^\Theta(a_1, \dots, a_{(b)_i})$ . Then the function

$$pr^\Theta(b, a) = \begin{cases} pr_b^\Theta((a)_0, \dots, (a)_{(b)_1-1}) & \text{if } I n^{m_1, \dots, m_l}(b) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

for  $a = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$  enumerates the  $n$ -place functions p. r. in  $\Theta$ . The  $\vartheta_i \in \Theta$  are p. r. in  $pr^\Theta(b, a)$  but not conversely. The equivalence classes of numberth. functions p. r. in each other are called p. r. degrees. The mapping  $\vartheta(b, a) \rightarrow pr^\Theta(b, a)$  is a jump operation raising p. r. degrees. Then a hierarchy of two-place numberth. functions  $h_y$  is set up corresponding to the elements of the system  $O'$  of notations for ordinals, differing from the author's system  $O$  (Kleene, this Zbl. 67, 252) in that the fundamental sequences are p. r..  $h_1(b, a) = 0$ , for  $y = 2^z$   $O'$  it is put  $h_y(b, a) = pr^{h_z}(b, a)$  and for  $y = 3 \cdot 5^z$  it is put  $h_y(b, a) = h_{z(b_1)}((b)_0, a)$ . It is shown that the p. r. degrees actually are increasing and for any  $y \in O'$  the functions p. r. in  $h_y$  are general r.. The system  $O'$  has notations for the same ordinals



as  $O$ . Five problems are listed, two of which have been answered by Axt. Errata: p. 70, 4-th line from top read  $\langle 0, m_i, i \rangle$ ; p. 75, 8-th line from top read  $y_n$  instead of  $y^y$ .

B. van Rootselaar.

Kleene, S. C.: Quantification of number-theoretic functions. *Compositio math.* 14, 23—40 (1958).

This paper constitutes a fundamental contribution to predicative analysis by means of the author's theory of hyperarithmetical predicates (cf. this Zbl. 66, 257). On the informal meaning of "predicative definition", introduced by Poincaré and Russell, sets (of natural numbers) must be defined by properties which are expressed by formulae "involving only sets already constructed": the set  $N$  of natural numbers is regarded as well defined, so by means of the ordinary (truth functional) logical operations and quantification over  $N$ , subsets of  $N$  can be defined from the arithmetic relations of addition and multiplication; calling the class of these subsets  $A_0$ , by quantification over  $A_0$  new sets  $A_1, \dots, A_y$  can be defined and so on. The "and so on" is continued into the transfinite provided the ordinal  $y$  can be represented by an ordering definable in  $A_z$  for  $z < y$ . This informal notion can be formulated precisely by means of a ramified analytic hierarchy based on notations for recursive ordinals. By a result of Spector (cf. this Zbl. 67, 3) and the present paper, the class  $A_n$ , associated with the notation  $n$  of the ordinal  $|n|$ , depends only on  $|n|$ , for  $|n| < \omega_1$ . The author gives a precise correspondence between the sets of  $A_{|n|}$  and the hyperarithmetical sets ( $HA$ ):  $A_{|n|}$  consists of just those sets which are recursive in some  $H_v$  with  $|v| < (1 + |n|)\omega$ . This generalizes the obvious fact that  $A_0$  consists of just the sets of finite degree. — Now, one important reason for the interest in predicative definitions, emphasized by Poincaré, is this. If the totality of all subsets of  $N$  is not regarded as "completed", a formula containing quantifiers over subsets of  $N$  or (equivalently) over number theoretic functions cannot in general be said to define a set uniquely; e. g. if the formula is  $(E\alpha) A(\alpha, a)$ ,  $\hat{a}(E\alpha) A(\alpha, a)$  will generally depend on the range of the quantifier  $\alpha$ . If this range is not regarded as well defined, neither is the set  $\hat{a}(E\alpha) A(\alpha, a)$ . The exceptional case can be treated by means of the notion of "basis" introduced by the reviewer [*British J. philos. Sci.* 4, 107—129 (1953)]:  $C$  is a basis für  $(E\alpha) A(\alpha, a)$  if and only if  $(a) \{(E\alpha) A(\alpha, a) \rightarrow (E\alpha) [\alpha \in C \ \& \ A(\alpha, a)]\}$ . If  $C$  is a basis and the formula  $A(\alpha, a)$  contains no function quantifier then the formula  $(E\alpha) A(\alpha, a)$  defines the same set whatever the range  $M (\subset N^N)$  of  $\alpha$  may be, provided only  $M \supset C$ . In consequence, if we have a notation for each member of  $C$ , then function quantifiers can be eliminated in favour of free function variables altogether in the sense that, if  $n \in \hat{a}(E\alpha) A(\alpha, a)$  then for some  $\alpha_n$ ,  $\alpha_n \in C \ \& \ A(\alpha_n, n)$ , and if  $n \notin \hat{a}(E\alpha) A(\alpha, a)$  then  $\rightarrow A(\alpha, n)$  with the free variable  $\alpha$ . In the present paper the author shows: (i) If the functions (with graphs) in  $HA$  are a basis for  $(E\alpha) (x) R(\alpha, x, a)$ ,  $R$  recursive, then  $\hat{a}(E\alpha)_M (x) R(\alpha, x, a)$  is unique and in  $HA$ , provided  $M \supset HA$ . His proof actually establishes the result for  $(E\alpha) (x) S[\bar{\alpha}(x), a]$  with  $S[\bar{\alpha}(x), a]$  relatively hyperarithmetical. (ii) He constructs in an effective and natural manner, (primitive) recursive  $P(y; \alpha, x, a)$  and  $Q(y; \alpha, x, a)$  such that, for each  $y \in O$ , both  $H_y(a) \equiv (E\alpha)_Y (x) P(y; \alpha, x, a)$  for all  $Y \supset Y^*$ , and  $\rightarrow H_y(a) \equiv (E\alpha)_{Y_1} (x) Q(y; \alpha, x, a)$  for all  $Y_1 \supset Y_1^*$ , where (the bases)  $Y^*$  and  $Y_1^*$  are both sub classes of the class of functions recursive in  $H_z$ ,  $|z| < |y|$ . (The exact description of  $Y^*$ ,  $Y_1^*$  is given in the paper, depending on whether  $|y|$  is near a limit ordinal.) (iii) Finally, he shows that his result is the best describable in terms of the hyperarithmetical hierarchy, not only for the particular  $P$  and  $Q$ , but in the following sense: if  $H_y(a) \equiv (E\alpha) (x) P'(\alpha, x, a)$  with the basis  $Y'$ , and  $\rightarrow H_y(a) \equiv (E\alpha) (x) Q'(\alpha, x, a)$  with the basis  $Y'_1$ ,  $P'$  and  $Q'$  recursive and both  $Y'$  and  $Y'_1$  consisting of (possibly different) sections of  $HA$ , then  $Y' \supset Y^*$  and  $Y'_1 \supset Y_1^*$ . (The author's statement of (ii) and (iii) is slightly different.) A corollary is a new characterization of  $HA$ :



it is the least class  $C$  closed under the conditions  $(C_1)$  for each recursive  $R$ , the set  $\hat{a}(E\alpha)(x) R(\alpha, a, x) \in C$ , if  $R$  is recursive and  $C$  is a basis for  $(E\alpha)(x) R(\alpha, a, x)$  and  $(C_2)$  if  $\alpha \in C$  and  $\beta$  is recursive in  $\alpha$  then  $\beta \in C$ . Result (i) could also be obtained from the paper (GMR) by Grzegorzczyk-Mostowski-Ryll-Nardzewski (this Zbl. 84, 248) since there are (recursive) sets of axioms all of whose  $\omega$ -models contain  $HA$ . Result (ii) differs from GMR in this: GMR considers arbitrary second order formulae  $\mathfrak{A}(a)$ , not only existential ones; but the class of universes in which  $\mathfrak{A}(a)$  defines the same set is characterized in GMR by more complicated conditions than here. The author uses (ii) and (iii) in the identification of  $HA$  with the union of  $A_{|n|}$ ,  $|n| < \omega_1$ . — Another application is that the comprehension principle does not hold in any  $A_{|n|}$  nor in  $HA$ : the proof of this is a direct application of Mostowski's principle on p. 187 of *Constructivity in Mathematics*, Proc. Colloq. Amsterdam. 1957, 178—194 (1959). G. Kreisel.

**Myhill, J.:** Recursive equivalence types and combinatorial functions. Bull. Amer. math. Soc. 64, 373—376 (1958).

The author gives a general notion of combinatorial function for recursive equivalence types (r. e. t.'s) and announces several results permitting the extension of certain properties of non-negative integers to isols and r. e. t.'s in general. (On p. 374 in (III) should be added: for any  $\beta \in V$ .) The definition works well in the one variable case because of uniqueness properties and the inclusion of functions  $X^k$ ,  $k^X$ ,  $C(X, k)$ ,  $X!$ ,  $X^X$  ( $X$  r. e. t. and  $k$  a fixed non-negative integer). The generalization to the case of more variables has similar uniqueness properties, but the class of functions is less inclusive, e. g. it does not include Dekker's extension of  $C(x, y)$  (this Zbl. 84, 10). B. van Rootselaar.

**Davis, Martin and Hilary Putnam:** Reductions of Hilbert's tenth problem. J. symbolic Logic 23, 183—187 (1959).

Ein Prädikat (dessen Argumente sich auf natürliche Zahlen beziehen) heißt diophantisch, wenn es von der Form

$$\exists y_1 \cdots \exists y_m [P(y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_n) = 0]$$

ist, wobei  $P$  ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten ist. Offensichtlich ist das 10. Hilbertsche Problem unlösbar, wenn es ein nicht-rekursives diophantisches Prädikat gibt, insbesondere also, wenn alle rekursiv-aufzählbaren Prädikate diophantisch sind. Verff. beweisen nun mehrere Sätze der Art, daß alle rekursiv-aufzählbaren Prädikate diophantisch sind, wenn einige gewisse rekursive Prädikate diophantisch sind. Der kürzeste, jedoch nicht der schärfste der Sätze sagt aus, daß alle rekursiv-aufzählbaren Prädikate diophantisch sind, wenn das eine Prädikat

$$R(a, b, c, d, e, f, g) \stackrel{\text{Def}}{=}$$

$$\left[ \begin{array}{l} \text{es existieren genau } a \text{ Tripel } (x, y, z) \text{ mit } x \leq b, y \leq f, z \leq a \\ \text{und } (1 + cz)x = d + ey + gz \end{array} \right]$$

diophantisch ist. — Die Beweise benutzen die von Davis früher gegebene Charakterisierung der rekursiv-aufzählbaren Prädikate durch diophantische [vgl. Davis, dies. Zbl. 51, 245, und Computability and Unsolvability (dies. Zbl. 80, 9) Chapter 7.3].

E. Burger.

**Davis, Martin:** Computable functionals of arbitrary finite type. Constructivity in Mathematics, Proc. Colloq. Amsterdam 1957, 281—284 (1959).

This is an abstract of a talk given by the author at the Cornell Summer Institute for Symbolic Logic, July 1957. While the presentation is very elegant and concise, it is a little ambiguous and so a detailed treatment would be desirable. For instance, Def. 9 and 13 of "the" (so-called) totalization and crystallization of partially defined functionals pre-suppose uniqueness properties which are not



evident to the reviewer. — The main differences between the author's concept of a computable functional (and, more generally, of a computation) on the one hand and Kleene's general recursive functionals (K) in Trans. Amer. math. Soc. **91**, 1—52 (1959), his countable (COU) functionals [Constructivity in Mathematics, Proc. Colloq. Amsterdam 1957, 81—100 (1959)] and the reviewer's continuous (CON) functionals [ibid. 101—128 (1959)], continuity with respect to the "proper" topology, l. c. p. 127, seem to be these: (1) The author operates on "finite pieces" of functionals so that a computation is a finite object, unlike (K) and like (COU) (sequence numbers) and (CON) (formal neighbourhoods). (2) The author's definition is intended to be meaningful not only for particular classes of functionals as in (K), (COU) and (CON), but generally including also partially defined functionals on partially defined functionals, etc. (3) The author does not express the relation between the "finite pieces" of a functional (not to be confused with the reviewer's totally defined finite functionals, l. c., p. 127) in ordinary topological terms in contrast to (COU) and (CON). (Since (K) does not operate on "finite pieces" this has no analogue.) A clarification of the Def. 9 and 13, mentioned above, seems to be especially desirable because they concern (3). Also, even for functionals of lowest type defined on partial functions, there are serious open problems. — It would of course be interesting to have available a general scheme, of which the various special theories are particular cases. However, the remarks at the end of the review of (K) apply here too: to operate constructively on a functional means to operate on a (spatio-temporal) representation; so if the means of representation are restricted (e. g. in (COU) and (CON) they not only provide the values of the functional represented, but also its continuity properties) certain operations become feasible which, for a less informative representation, would be non-constructive. So it is not clear how far the author's search for an "intrinsic" definition of the concept of functional of higher type should be pushed. When the arguments are natural numbers, the situation is different since here we have a preferred representation (the numerals) and a preferred topology, namely the discrete topology, which is appropriate because the natural numbers can be fully specified by finite symbolic expressions.

*G. Kreisel.*

**Spector, Clifford:** Measure-theoretic construction of incomparable hyperdegrees. *J. symbolic Logic* **23**, 280—288 (1959).

In  $2^N$ , where  $N = \{1, 2, \dots\}$  and  $2 = \{0, 1\}$ , product topology and product measure are introduced starting from the discrete topology in  $\{0, 1\}$  and measure  $\mu\{0\} = \mu\{1\} = 1/2$ . Predicate  $P(\alpha_1, \dots, \alpha_m; x_1, \dots, x_n)$  with  $\alpha_i \in 2^N$  and  $x_j \in N$  is called measurable if for each  $x_1, \dots, x_n$  the set  $\hat{\alpha}_1 \dots \hat{\alpha}_m P(\alpha_1, \dots, \alpha_m; x_1, \dots, x_n)$  is measurable in the product  $(2^N)^m$ .  $Q(\alpha, \beta)$  is countable if for each  $\beta$  the set  $\hat{\alpha} Q(\alpha, \beta)$  is at most countable; it is total if for all  $\alpha, \beta$  either  $Q(\alpha, \beta)$  or  $Q(\beta, \alpha)$  holds. A suitable subclass  $L$  of measurable predicates  $P$  containing the recursive predicates is singled out. Then it is shown that  $Q(\alpha, \beta) = \{\alpha \text{ is hyperarithmetical in } \beta\}$  is not total, i. e. there are incomparable hyperdegrees. The existence of a total countable predicate is shown to be equivalent to Cantor's continuum hypothesis. The notion of a jump operation is generalized: A jump operation is any mapping  $F: 2^N \rightarrow 2^N$ . Particular mappings  $F$  are called hyperjumps, which permit the introduction of  $F$ -degrees as equivalence classes of functions in  $2^N$ . A theory of  $F$ -degrees analogous to that of degrees of recursive unsolvability (cf. Kleene-Post, this Zbl. **57**, 247) is possible. The method is illustrated by a proof of the theorem: For measurable jump operations  $F, G$  there are functions  $\alpha, \beta$  such that  $F\alpha$  and  $G\beta$  are primitive recursive in  $\alpha, \beta$ ; from which it follows that for measurable hyperjumps  $F$  there are incomparable  $F$ -degrees  $a, b$  such that  $a' \cup b' = a \cup b$ . An application to hierarchies is sketched, in which connection a problem is posed. Erratum: In the statement of the lemma (p. 285) read:  $> 4^{-k}$ .

*B. van Rootselaar.*



**Mučnik, A. A.:** Lösung des Postschen Problems der Reduzibilität und einiger anderer Probleme der Theorie der Algorithmen. I. Trudy Moskovsk. mat. Obšč. 7, 391—405 (1958) [Russisch].

Diese Arbeit enthält den ausführlichen Beweis für die schon früher (dies. Zbl. 70, 247) von Verf. angekündigte positive Lösung des bekannten Postschen Problems [Post, Bull. Amer. math. Soc. 50, 284—316 (1944)], indem gezeigt wird, daß es zwei rekursiv-aufzählbare Mengen gibt, die im Sinne der Turing-Reduzierbarkeit unvergleichbar sind. Die vorgelegte Konstruktion dieser Mengen hat eine gewisse Ähnlichkeit mit der analogen Konstruktion von Kleene-Post (dies. Zbl. 57, 247), bei der es nicht auf die rekursive Aufzählbarkeit der Mengen ankam. Sie ist jedoch zu kompliziert, um hier im einzelnen beschrieben zu werden. Verf. bemerkt noch, daß mit seiner Methode auch die Existenz einer rekursiven Folge von rekursiv unabhängigen Mengen (vgl. Kleene-Post, l. c.) bewiesen werden kann, führt den Beweis jedoch nicht durch, da er zu umfangreich ist. — Übrigens verwendet Verf. an Stelle der Turing-Reduzierbarkeit die vermöge partiell-rekursiver Operatoren (vgl. z. B. Trachtenbrot, dies. Zbl. 64, 11). An Stelle des Kleeneschen Normalformensatzes für relativ-rekursive Funktionen tritt dabei hier die von Medvedev in seiner Dissertation (Moskau 1955) eingeführte funktionale Darstellung der partiell-rekursiven Operatoren durch starke (d. h. auf einem Abschnitt der Zahlenreihe oder auf der ganzen Zahlenreihe definierte) partiell-rekursive Funktionen und die Benutzung einer universellen derartigen Funktion. — Man vgl. auch Friedberg (dies. Zbl. 80, 243).

*E. Burger.*

**Péter, Rózsa:** Rekursivität und Konstruktivität. Constructivity in Mathematics, Proc. Colloq. Amsterdam 1957, 226—233 (1959).

Il est clair que les récursions primitives sont constructives; diverses formes relativement simples de récursions et même certaines récursions transfinies le sont également. Mais tel est-il le cas des fonctions récursives générales de Herbrand-Gödel-Kleene? L'A. estime qu'un certain cercle vicieux est inévitable si on essaie de définir ces récursions selon des méthodes intuitionistes, même si on recourt à la formulation explicite de Kleene. Mais n'est-il pas possible d'intercaler, entre les fonctions récursives spéciales et les fonctions à récursivité générale, une classe intermédiaire de fonctions qui seraient constructives? L'A. tente de recourir au procédé de la diagonale ou d'introduire des „règles d'usage“ pour l'utilisation des équations définissantes de fonctions récursives spéciales. De telles règles d'usage pourraient être arithmétisées selon les méthodes de Gödel. Mais elles ne conduisent pas, elles non plus, à des fonctions qui ne soient pas récursives spéciales.

*R. Feys.*

**Heyting, A.:** Some remarks on intuitionism. Constructivity in Mathematics, Proc. Colloq. Amsterdam 1957, 69—71 (1959).

Clear exposition of some essential differences between theories of constructible objects and constructive theories, like intuitionism.

*B. van Rootselaar.*

**Nelson, D.:** Negation and separation of concepts in constructive systems. Constructivity in Mathematics, Proc. Colloq. Amsterdam 1957, 208—225 (1959).

Dans les logiques du type intuitioniste il y a lieu de distinguer (de dire non-équivalentes) diverses expressions qui contiennent des négations et des expressions qui leur équivalent en logique classique: la double négation n'équivaut pas à l'affirmation — le tiers exclu n'équivaut pas à l'affirmation de la non contradiction — la contradiction ou l'affirmation du faux peuvent avoir, de système à système, des conséquences différentes la distinction de deux éléments peut être exprimée en logique positive. L'A. utilise diverses méthodes, inspirées de ses travaux précédents sur la réalisabilité, pour dégager des distinctions de ce genre ayant un contenu constructif. (1) Il distingue deux notions de la réalisabilité; il caractérise à l'aide de règles comparables à celles des systèmes  $L$  de Gentzen, plusieurs logiques avec négation forte et les arithmétiques qui leur correspondent. (2) Il définit des concepts séparables,



à l'aide de deux systèmes comportant chacun une relation d'équivalence et qui usent d'une relation de transformation. (3) Il caractérise un système où la vérité est ramenée à une vérité nécessaire et la fausseté à une fausseté possible; dans ce système une contradiction n'entraîne pas l'inconsistance, c. à d. ne permet pas de déduire n'importe quoi.

*R. Feys.*

**Bernays, Paul:** Remarques sur le problème de la décision en logique élémentaire. Colloques internat. Centre nat. Rech. sci. **70**, 39—43, interventions 44 (1958).

Jedes Reduktionstheorem für das Entscheidungsproblem impliziert eine gewisse Verschärfung des Churchschen Satzes von der Unlösbarkeit des allgemeinen Entscheidungsproblems, da ja schon ein gewisser Spezialfall des Entscheidungsproblems sich als unlösbar erweist. Verf. weist jetzt daraufhin, daß schon die Methode des Beweises für den Churchschen Satz selbst eine solche Verschärfung dieses Satzes liefern kann. Es stellt sich nämlich heraus, daß diese Methode die Unlösbarkeit des Entscheidungsproblems für Formeln einer gewissen speziellen Form liefert.

*E. W. Beth.*

**Adjan (Adian), S. I.:** Finitely defined groups and algorithms. Doklady Akad. Nauk SSSR **117**, 9—12 (1957) [Russisch].

In Fortsetzung seiner früheren Arbeiten (dies. Zbl. **65**, 9; **66**, 272) formuliert und beweist Verf. Satz 1: „Gibt es eine endlich definierte (e. d.) Gruppe  $F_1$  mit der (isomorphismus-) invarianten Eigenschaft  $\alpha$  und eine ebensolche  $F_2$  ohne  $\alpha$ , die in keiner e. d. Gruppe mit  $\alpha$  enthalten ist, so ist die Eigenschaft  $\alpha$  für die Klasse der e. d. Gruppen (algorithmisch) unentscheidbar.“ Der Satz ist analog einem Satz von Markov über assoziative Systeme (dies. Zbl. **58**, 5). In der Beweisskizze werden vier Lemmata (davon eines schwierig) formuliert; aber nicht bewiesen. Der Beweis benutzt wesentlich die Novikovsche Gruppe  $F_0$  [Trudy mat. Inst. Steklov **44**, 140 S. (1955)] und insb. ihre Torsionslosigkeit. [Bem. des Ref.: Der Buchstabe  $E$  in den Formeln (7) und (8) auf Seite 10 ist nicht erklärt. Sollte er etwa  $A$  lauten?] Das Beispiel einer entscheidbaren Eigenschaft von Gruppen, nämlich „mit ihrer Kommutatorgruppe identisch zu sein“, zeigt, daß die hervorgehobene Bedingung des Satzes nicht entbehrt werden kann. Nennt man Klassen e. d. Gruppen, etwa die  $\alpha$ -Klasse, vollständig, wenn jede e. d. Gruppe einer Untergruppe von Gruppen der Klasse isomorph ist, so läßt sich Satz 1 wie folgt formulieren: „Ist die  $\alpha$ -Klasse (e. d. Gruppen) weder leer noch vollständig, so ist das Problem der Zugehörigkeit einer beliebigen e. d. Gruppe zur  $\alpha$ -Klasse unentscheidbar.“ Die Unvollständigkeit ist jedoch keine notwendige Bedingung für Unentscheidbarkeit: es gibt vollständige, jedoch in diesem Sinn unentscheidbare Klassen. Zwei weitere Sätze beweisen die Vollständigkeit gewisser Klassen e. d. Gruppen.

*D. Tamari.*

**Novikow, P. S.:** Über einige algorithmische Probleme der Gruppentheorie. J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. **61**, 88—92 (1958).

Sehr kurzer und untechnischer, jedoch auch unvollständiger Bericht über die Entwicklung und den Stand des Wortproblems für Gruppen und damit zusammenhängender Probleme. Einige wichtige Resultate des Verf. wie auch anderer Autoren, insb. Adjan und Michajlova werden kurz und klar besprochen (s. Verf. und Adjan, dies. Zbl. **80**, 241; Michajlova, dies. Zbl. **84**, 253; Adjan, dies. Zbl. **65**, 9; **66**, 272; **80**, 241 und vorstehendes Referat). (Seite 89, Zeile 14 von unten muß Einselement, und nicht Einzelelement, lauten.)

*D. Tamari.*

## Algebra und Zahlentheorie.

### Gruppentheorie:

**Robinson, Donald W.:**  $n$ -groups with identity elements. Math. Mag. **31**, 255—258 (1958).



A polyadic or  $n$ -group [W. Dörnte, Math. Z. 29, 1—19 (1928); E. L. Post, dies. Zbl. 25, 12] is a non-empty system  $N$  of elements satisfying (1) closure:  $a_0, a_1, \dots, a_n \in N \Rightarrow a_0 a_1 \dots a_n \in N$ ; (2) associativity:

$$(a_0 a_1 \dots a_n) a_{n+1} \dots a_{2n} = a_0 \dots a_{i-1} (a_i a_{i+1} \dots a_{i+n}) \dots a_{2n} \quad (i = 1, \dots, n);$$

(3) solvability:

$$a, a_1, \dots, a_n \in N \Rightarrow (\exists x, y \in N) (x a_1 \dots a_n = a = a_1 \dots a_n y).$$

The author replaces (3) by (3.1) left identity:  $(\exists e \in N) (a \in N) \left( \overbrace{e e \dots e}^n a = a \right)$ ,

(3.2) left inverses:  $(a \in N) (\exists b \in N) \left( \overbrace{b e \dots e a}^{n-1} = e \right)$ , or correspondingly by (3.1'), (3.2') on the right. As wellknown this is for usual groups ( $n = 1$ ) equivalent to (3). The author proves: 1) (3.1) & (3.2)  $\Rightarrow$  (3). 2. There are  $n$ -groups without left identity (ex.: take as  $N$  the  $n$  elements  $a^{i n + 1} (i = 0, \dots, n-1)$  from the cyclic group of order  $n^2$  generated by  $a$  with their usual multiplication). 3. A left identity of an  $n$ -group is also a right one, and the left inverse also a right one and uniquely determined with respect to the same identity

$$b = \overbrace{b e \dots e}^n = \overbrace{b e \dots e}^{n-1} \left( \overbrace{a e \dots e b'}^{n-1} \right) = \left( \overbrace{b e \dots e a}^{n-1} \right) \overbrace{e \dots e b'}^{n-1} = \overbrace{e \dots e b'}^n = b'.$$

4. There might be many identity elements (ex.: take the cyclic group of order  $n$  and consider it as an  $n$ -group; every element is an identity). D. Tamari.

**Yamada, Miyuki:** Note on idempotent semigroups. V: Implications of two variables. Proc. Japan Acad. 34, 668—671 (1958).

Gegeben seien vier Familien  $\{f_\alpha\}, \{f_\alpha^*\}, \{g_\beta\}, \{g_\beta^*\}$  von Polynomen zweier Variablen  $x, y$  über idempotenten Halbgruppen, wobei  $\alpha$  und  $\beta$  je ein Element der Indexmengen  $A$  bzw.  $B$  sind. Die Mengen der Gleichungen  $\{f_\alpha = f_\alpha^*\}$  und  $\{g_\beta = g_\beta^*\}$  werden mit  $\mathfrak{F}_\alpha$  bzw. mit  $\mathfrak{G}_\beta$  bezeichnet. Die Relation  $\mathfrak{F}_\alpha \Rightarrow \mathfrak{G}_\beta$  wird eine Implikation genannt. Wenn  $\mathfrak{F}_\alpha$  nur triviale Identitäten enthält, dann wird die Implikation eine Familie von Identitäten genannt. Eine Implikation heißt trivial, wenn sie durch alle idempotenten Halbgruppen erfüllt wird. Zwei Familien  $\mathfrak{F}_\alpha, \mathfrak{G}_\beta$  von Gleichungen heißen äquivalent, wenn  $\mathfrak{F}_\alpha \Rightarrow \mathfrak{G}_\beta$  und  $\mathfrak{G}_\beta \Rightarrow \mathfrak{F}_\alpha$  trivial sind. Faßt man die zueinander äquivalenten Familien von Gleichungen in einer Klasse zusammen, so werden alle Familien von Gleichungen in 16 Klassen eingeteilt, unter denen eine Multiplikation so eingeführt werden kann, daß die Menge dieser Klassen einen Halbverband bildet. Zwei Implikationen  $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$  werden äquivalent genannt, wenn beide durch eine idempotente Halbgruppe gleichzeitig erfüllt werden. Das Hauptresultat dieser Arbeit ist der folgende Satz: Jede Implikation ist äquivalent einer der folgenden: (I)  $xy = xy \Rightarrow x = y$ , (II)  $xy = xy \Rightarrow xy = y$ , (III)  $xy = xy \Rightarrow xy = x$ , (IV)  $xy = xy \Rightarrow xyx = x$ , (V)  $xy = xy \Rightarrow xy = yx$ , (VI)  $xy = xy \Rightarrow xyx = yx$ , (VII)  $xy = xy \Rightarrow xyx = xy$ , (VIII) einer trivialen Implikation. [Die Struktur der idempotenten Halbgruppen mit Identitäten (I)—(VII) wurde in den Arbeiten I—IV von Kimura (dies. Zbl. 79, 251; 81, 255) und McLean (dies. Zbl. 55, 14) untersucht].

J. Szendrei.

**Wiegandt, Richard:** On complete semi-groups. Acta Sci. math. 19, 93—97 (1958).

A regular semi-group  $S$  (i. e. a semigroup in which  $zx = zy$  or  $xz = yz$  implies  $x = y$ ) with identity is called complete if it is a direct factor of every regular semi-group with identity containing it as a left-normal semi-group. (See L. Rédei, this Zbl. 47, 266). The author proves with the aid of a modification of Baer's proof [Bull. Amer. math. Soc. 52, 501—506 (1946)] that  $S$  is complete if and only if its center consists of the identity and it has inner automorphisms only.

J. Szendrei.



Wiegandt, Richard: On complete semi-modules. *Acta Sci. math.* 19, 219—223 (1958).

In this paper the author deals with the complete semi-modules in the sense mentioned above and his results are based on the following theorem: A (regular) semi-module  $S$  with 0 is complete if and only if  $nS = S$  for every positive integer  $n$ . This statement is, however, incorrect, as V. R. Hancock and later also the author has observed. The false step of the proof can be found in the lines 23—26 on p. 221. The correct theorem is the following:  $S$  is complete if and only if it is a complete abelian group. This and other results are proved by V. R. Hancock [*Proc. Amer. math. Soc.* 11, 71—76 (1960)].

*J. Szendrei.*

Saitô, Tôru: Homomorphisms of a left simple semigroup onto a group. *Proc. Japan Acad.* 34, 664—667 (1958); *Supplement. Ibid.* 35, 114 (1959).

Given a homomorphism  $\varphi$  of a semigroup  $S$  onto a group, the inverse image under  $\varphi$  of 1 is a subsemigroup of  $S$ , the kernel of the homomorphism. When  $S$  is a sesquilateral division semigroup (P. M. Cohn, this Zbl. 71, 251) it was shown by the reviewer that the homomorphism is completely determined by the kernel  $K$ : the inverse images of the group elements are just the right cosets  $Ka$ ; moreover the kernels themselves were characterized [P. M. Cohn, *Proc. London math. Soc.*, III. Ser. 8, 466—480 (1958)]. The author obtains a similar characterization of the kernels in a semigroup  $S$  which is left simple, i. e. where  $a = xb$  has a solution  $x$  in  $S$  for all  $a, b \in S$ . If  $I$  is the set of elements  $x \in S$  such that  $xa = a$  for some  $a \in S$ , then the core  $J$  of  $S$  is defined as the subsemigroup generated by all solutions of equations  $ax = b$  ( $a, b \in I$ ). Now the kernels in a left simple semigroup are precisely the subsemigroups  $K$  such that (i)  $xK \subseteq Kx$  for all  $x \in S$ , (ii) with  $a, b \in K$  any solution of  $ax = b$  belongs to  $K$ , (iii)  $K \supseteq J$ . — In the supplement it is shown that the condition (iii) just given may be replaced by the condition that  $K$  be non-empty. [The core of a one-sided simple semigroup has also been considered by L. M. Gluskin (this Zbl. 64, 250)].

*P. M. Cohn.*

Pondělíček, Bedřich: Über eine Semigruppe der Endomorphismen auf einer einfach geordneten Menge. I. *Časopis Mat.* 84, 177—182, russische und deutsche Zusammenfassung 182 (1959) [Tschechisch].

Das Hauptresultat dieser Arbeit ist der folgende Satz: In einer Semigruppe  $\Gamma$  von Endomorphismen einer einfach geordneten Menge  $\mathfrak{M}$ , in der die Eigenschaft  $(\gamma)$  besteht, sind folgende Aussagen äquivalent: a)  $\Gamma$  ist stark monozyklisch, b)  $\Gamma$  ist monozyklisch und genügt der linksseitigen Kürzungsregel, c)  $\Gamma$  ist von links archimedisch geordnet und divergent. Benützte Begriffe: Eine isotone Abbildung  $f$  von  $\mathfrak{M}$  in  $\mathfrak{M}$  heißt ein Endomorphismus und jedes minimale Intervall  $A \subset \mathfrak{M}$ , für das  $f(A) \subset A$  gilt, heißt ein Zyklus von  $f$ . Hat  $A$  einen Fixpunkt  $x$ , und ist  $x$  kein Endpunkt von  $A$ , so heißt  $A$  zweiseitig.  $\Gamma$  besitzt die Eigenschaft  $(\gamma)$ , wenn gilt: a) Kein  $f \in \Gamma$  hat einen zweiseitigen Zyklus, b) zu jedem Paar  $f, g \in \Gamma$  existiert ein  $h \in \Gamma$ , so daß  $g = hf$  oder  $f = hg$  gilt. Ein  $f \in \Gamma$  heißt monozyklisch, wenn es höchstens einen (echten) Zyklus besitzt. Eine Semigruppe  $\Gamma$ , die nur monozyklische Elemente enthält, heißt auch monozyklisch. Ist  $e$  das Einheitsselement in  $\Gamma$ , so nennen wir  $\Gamma$  stark monozyklisch, wenn  $\mathfrak{M}[f] = \mathfrak{M}[g]$  für  $f, g \in \Gamma$ ,  $f \neq e, g \neq e$ , gilt. (Mit  $\mathfrak{M}[f]$  wird die Menge aller Fixpunkte von  $f$  bezeichnet.)  $\Gamma$  heißt divergent, wenn für  $x, y \in \bigcup_{f \in \Gamma} (\mathfrak{M} - \mathfrak{M}[f])$ ,  $x < y$ , ein  $g \in \Gamma$  existiert, so daß  $g(x) \geq y$  oder  $x \geq g(y)$  gilt. Eine einfach geordnete Semigruppe nennen wir von links archimedisch geordnet, wenn für  $a < b, e < c$  bzw.  $a < b, c < e$ , ein natürliches  $n$  existiert, so daß  $c^n a \geq b$  bzw.  $a \geq c^n b$  gilt. Der Hauptsatz stellt eine Verallgemeinerung eines Satzes des Ref. über Gruppen von Automorphismen auf  $\mathfrak{M}$  [*Časopis Mat.* 83, 1—22 (1958)] dar.

*F. Šik.*

Neumann, B. H.: Isomorphism of Sylow subgroups of infinite groups. *Math. Scandinav.* 6, 299—307 (1958).



Ist die Gruppe  $G$  Produkt ihrer endlichen Normalteiler, so existiert zu irgendzwei  $p$ -Sylowuntergruppen  $A$  und  $B$  von  $G$  ein  $A^\sigma = B$  erfüllender Automorphismus  $\sigma$  von  $G$ , der überdies auf jeder endlichen Teilmenge mit einem inneren Automorphismus von  $G$  übereinstimmt. Will man nun die Isomorphie von  $A$  und  $B$  beweisen, so genügt natürlich die schwächere Voraussetzung, daß  $\{A, B\}$  das Produkt endlicher Normalteiler von  $\{A, B\}$  ist. Verf. beweist diese Sätze nicht mehr, wie früher üblich, durch direkte Anwendung transfiniter Induktion oder äquivalenter transfiniter Methoden, sondern benutzt einen Satz über die Existenz sog. Projektionssysteme (Kuroš) bzw. einen äquivalenten Steenrodschen Satz, Resultate, deren Benutzung beim Übergang vom Endlichen zum Unendlichen sich als zweckmäßig erwiesen haben. Durch diese Methode gelingt es auch, die Sätze unter der schwächeren Voraussetzung zu beweisen, daß jedes Element aus  $G$  nur endlich viele Konjugierte in  $G$  besitzt.

R. Baer.

**Curzio, Mario: Sugli  $N$ -gruppi risolubili.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 25, 447—452 (1959).

Es sei  $M$  ein beliebiger Normalteiler der Gruppe  $G$ . Wenn  $G$  keinen weiteren Normalteiler der gleichen Ordnung wie  $M$  hat und wenn dasselbe für jeden Normalteiler von  $G$  gilt, so nennt man  $G$  eine  $N$ -Gruppe. Die Hauptergebnisse der Arbeit sind: 1. Es sei  $G$  eine endliche auflösbare Gruppe.  $G$  ist dann und nur dann eine  $N$ -Gruppe, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind: a) die Sylowuntergruppen von  $G$  sind zyklisch, elementar abelsch und isomorph zur Quaternionengruppe, b) hat  $G$  eine Quaternionenuntergruppe, so hat  $G$  keinen Normalteiler mit Ordnung  $4m$  ( $m$  ist eine ungerade Zahl), c) ist  $P$  eine nichtzyklische elementar abelsche Sylowuntergruppe von  $G$ , so ist ein Faktor in der Hauptreihe von  $G$  zu  $P$  isomorph. 2. Es sei  $G$  eine endliche Gruppe.  $G$  ist dann und nur dann eine überauflösbare  $N$ -Gruppe, wenn jede Sylowuntergruppe von  $G$  zyklisch ist (s. dazu noch die Arbeit von K. Honda, dies. Zbl. 49, 300). 3. Es sei  $G = A_1 A_2$  eine auflösbare faktorisierbare endliche Gruppe mit  $(|A_1|, |A_2|) = 1$ , wo  $A_1, A_2$   $N$ -Gruppen sind. Dann ist  $G$  eine  $N$ -Gruppe.

J. Szép.

**Čunichin (Chunikhin), S. A.: On a method of obtaining subgroups and factorizations of finite groups.** Doklady Akad. Nauk SSSR 121, 243—245 (1958) [Russisch].

Sei  $G$  eine endliche Gruppe mit der Ordnung  $g$ . Sei  $G \neq E$  und  $G = G_0 > G_1 > \dots > G_\lambda = E$  eine Hauptreihe von  $G$ . Man setze  $G_{i-1} : G_i = h_i$  ( $i = 1, \dots, \lambda$ ). Sei  $h_i = \prod p_{ij}^{e_{ij}}$  die Primfaktorzerlegung von  $h_i$  ( $i = 1, \dots, \lambda$ ).  $f_i$  bezeichne entweder 1 oder  $p_{ij}^{e_{ij}}$  oder  $h_i$  ( $i = 1, \dots, \lambda$ ). Setze  $h = f_{i_1} \dots f_{i_k}$  mit  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq \lambda$ .  $\Pi(n)$  bezeichnet die Menge aller verschiedenen Primteiler von  $n$ . Dann gilt: (1)  $G$  enthält eine Untergruppe der Ordnung  $hc$  mit  $\Pi(c) \subseteq \Pi(h)$ . Seien insbesondere  $i_1 = \beta$ ,  $i_2 = \beta + 1, \dots, i_k = \lambda$  ( $1 \leq \beta \leq \lambda$ ) und  $f_i \equiv 0((f_\beta f_{\beta+1} \dots f_{i-1}, h_i))$  ( $i = \beta + 1, \dots, \lambda$ ). Dann gilt: (2)  $g$  enthält eine Untergruppe mit der Ordnung  $h$ . (3) Seien  $p$  und  $q$  zwei verschiedene Primzahlen und  $((G : G_1), (G_1 : E)) \equiv 0(p^\alpha q^\beta, \alpha > 0, \beta > 0)$ . Dann enthält  $G$  eine Untergruppe mit der Ordnung  $p^\alpha q^\beta$ . (4) Sei  $\{h_1, \dots, h_\lambda\} = M_1 + \dots + M_\mu$  ( $\mu > 1$ ) die direkte (im Sinne der Mengenlehre) Zerlegung von  $\{h_1, \dots, h_\lambda\}$ .  $m_i$  bezeichne das Produkt aller Zahlen in  $M_i$  ( $i = 1, \dots, \mu$ ). Dann erlaubt  $G$  eine Faktorisierung  $G = H_1 \dots H_\mu$  zu paarweise vertauschbaren Untergruppen  $H_1, \dots, H_\mu$ . Dabei genügt die Ordnung  $m_i c_i$  von  $H_i$  der Bedingung  $\Pi(c_i) \subseteq \Pi(m_i)$  ( $i = 1, \dots, \mu$ ). Diese Resultate (1)—(4) werden ohne Beweis angegeben. (Aber es ist nicht schwer, Beweise anzugeben). N. Itô.

• **Lomont, J. S.: Applications of finite groups.** New York-London: Academic Press 1959. XI, 346 p.

Dieses Buch muß, obwohl es gar nicht ausschließlich von Darstellungstheorie handelt und obwohl mehr als die Hälfte den reinen Anwendungen gewidmet ist, auch vom Standpunkt des Mathematikers als das reichhaltigste Buch bezeichnet werden, das bisher über Darstellungstheorie erschienen ist. Es ist eine Fundgrube



von kleinen und großen Resultaten der Gruppen- und Darstellungstheorie, darunter von vielen sehr tiefliegenden. Auf so kleinem Raum so viel zu bringen, ist nur dadurch möglich, daß auf Beweise fast durchweg verzichtet wird. Mehr als in anderen Disziplinen gibt es ja in der Gruppentheorie Resultate, die ebenso leicht zu formulieren wie schwer zu beweisen sind, und in den ersten Kapiteln über Matrizen, über Gruppen und über Darstellungen macht der übersichtliche Aufbau das Lesen wohl auch für den Lernenden zum Gewinn. Vorteilhaft verwendet Verf. z. B. die bekannte Einteilung der Matrixgruppen in drei Kategorien nach den Realitätseigenschaften. Die Methoden zur effektiven Aufstellung der Charakterentafel und zur Reduktion der Darstellungen sind übersichtlich zusammengestellt, doch würde hier manches noch besser verständlich sein, wenn man vom Begriff des Gruppenrings Gebrauch gemacht hätte. In den späteren Abschnitten über induzierte Darstellungen, über die symmetrischen Gruppen und die vollen linearen, über die dreidimensionale Drehgruppe und vierdimensionale Lorentzgruppe (denn auch über diese nicht endlichen Gruppen findet sich eine Menge von Sätzen und Formeln) ist nicht mehr recht vorstellbar, wie der Leser, der die Dinge vorher nicht kennt, bei der Überfülle von aneinandergereihten schwierigen Sätzen und komplizierten Formeln zu dem Verständnis gelangen soll, das für die Anwendung erforderlich ist. Für eine Neuauflage besteht zum mindesten der Wunsch, daß jeweils angegeben wird, wo man Beweise finden kann. Die den einzelnen Kapiteln beigegebenen Literaturhinweise sind zwar sehr reichhaltig aber es gibt keine Verweisungen, und übrigens werden bei den mathematischen Kapiteln fast nur Bücher zitiert, keine Abhandlungen. Einige elementare Gruppen werden ausführlich behandelt und immer wieder als Beispiele herangezogen: Quaternionengruppe, Diedergruppen  $D_3, D_4, D_6$ , Gruppen der regulären Polyeder. Diese letzteren gehören ja zur Kristalltheorie, und auch die Raumgruppen dieser Theorie finden ausführliche Behandlung, ihre Darstellungstheorie wird mit Hilfe der im Rahmen der „induzierten Darstellungen“ vorgetragenen Theorie der „little groups“ ausführlich behandelt. Schließlich seien die Anwendungsgebiete kurz aufgezählt: Thermodynamik; Hohlleiter; Fermion-Vernichtung und -Entstehung; Dirac-Gleichung; nichtrelativistische Wellengleichung; Störungstheorie; Permutations-Entartung und Pauliprinzip; Atomstruktur; Molekülstruktur; Kernstruktur; schließlich Kristalltheorie, die in mehreren Kapiteln den breitesten Raum einnimmt.

H. Boerner.

**Sholander, Marlow:** Postulates for commutative groups. Amer. math. Monthly 66, 93—95 (1959).

Ist  $S$  eine Menge, in der eine binäre Multiplikation erklärt ist und jedem Element  $x \in S$  ein Element  $x' \in S$  zugeordnet ist, so daß aus  $(a a') b' = (r s') t'$  stets  $b = (t r') s$  folgt, so ist  $S$  eine abelsche Gruppe. Dasselbe gilt, falls in  $S$  eine Subtraktion definiert ist, die der Bedingung  $y = x - [(x - z) - (y - z)]$  für alle  $x, y, z \in S$  genügt.

L. Fuchs.

**Walker, Elbert A.:** Subdirect sums and infinite abelian groups. Pacific J. Math. 9, 287—291 (1959).

Eine Gruppe  $G$ , die Untergruppe einer direkten Summe von Gruppen  $\{H_a\}_{a \in I}$  ist, wird eine subdirekte Summe dieser Gruppen genannt, falls für jedes  $a \in I$  die Projektion von  $G$  in  $H_a$  eine Abbildung von  $G$  auf  $H_a$  ist. Wenn  $G$  einer subdirekten Summe der Gruppen  $\{H_a\}_{a \in I}$  isomorph ist, so heißt  $G$  darstellbar als eine subdirekte Summe dieser Gruppen. Eine Gruppe  $R$  wird als eine rationale Gruppe bezeichnet, wenn  $R$  eine Untergruppe einer Gruppe vom Typ  $p^\infty$  oder eine Untergruppe der additiven Gruppe der rationalen Zahlen ist. Verf. zeigt zuerst, daß jede abelsche Gruppe als eine subdirekte Summe von rationalen Gruppen dargestellt werden kann, wobei die subdirekte Summe mit jeder der rationalen Gruppen einen nicht-trivialen Durchschnitt besitzt. Als Verschärfung eines entsprechenden Satzes von W. R. Scott über nicht-abzählbare abelsche Gruppen (dies. Zbl. 55, 17) beweist Verf.



anschließend mit Hilfe des vorigen Ergebnisses: Sei  $G$  eine torsionsfreie abelsche Gruppe von unendlichem Rang. Für jeden möglichen unendlichen Index  $\alpha$  besitzt  $G$  dann  $2^{\alpha(G)}$  Servanzuntergruppen der Ordnung  $o(G)$  und vom Index  $\alpha$ . Der Durchschnitt dieser Untergruppen ist 0. Schließlich wird gezeigt, daß jede torsionsfreie abelsche Gruppe  $G$  von unendlichem Rang als subdirekte Summe  $G'$  dargestellt werden kann, bei der alle subdirekten Summanden gleich der additiven Gruppe der rationalen Zahlen sind, und zwar derart, daß  $G'$  mit jedem subdirekten Summanden einen nicht-trivialen Durchschnitt besitzt.

K. Latt.

Burgess, D. C. J.: Generalized intervals in partially ordered groups. Proc. Cambridge philos. Soc. 55, 165—171 (1959).

Besitzen zwei Elemente  $a$  und  $b$  einer teilweise geordneten Menge  $P$  sowohl eine gemeinsame obere als auch eine gemeinsame untere Schranke (in Zeichen:  $a \sim b$ ), so heißt der Durchschnitt aller Intervalle von  $P$ , die  $a$  und  $b$  enthalten, das  $D$ -Intervall  $\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$ . Es wird gezeigt, daß  $D$ -Intervalle in teilweise geordneten Gruppen  $G$  eine Anzahl von Eigenschaften besitzen, die an Eigenschaften von Verbandsgruppen erinnern, wie z. B.: aus  $a \sim b$  folgt, daß (i)  $\langle -a, -b \rangle = -\langle a, b \rangle$ , (ii)  $\langle x + a + y, x + b + y \rangle = x + \langle a, b \rangle + y$  für alle  $x, y \in G$ , (iii)  $a \rightarrow \langle a, b \rangle + b = \langle a, b \rangle$  usw.  $P$  heiße  $D$ -distributiv, falls aus  $x \sim a \sim y$  und  $\langle x, a \rangle = \langle y, a \rangle$  jeweils  $x = y$  folgt; eine archimedisch teilweise geordnete Gruppe ist  $D$ -distributiv.

L. Fuchs.

Jaffard, P.: Sur les groupes réticules associés à un groupe ordonné. Publ. sci. Univ. Alger, Sér. A 2, 173—203 (1957).

P. Lorenzen (this Zbl. 21, 387) proved that an ordered Abelian group  $G$  can be embedded in a lattice-ordered group  $\Gamma$  if and only if it is a semiclosed group: that is, for any  $x \in G$  and any natural number  $n$ , the relation  $x^n \geq 1$  implies  $x \geq 1$ . For each such embedding, the author calls the smallest sub-lattice-ordered group of  $\Gamma$  which contains  $G$  a "Lorenzen group of  $G$ ". A detailed study is made of these Lorenzen groups, of their relationship to one another, and of the relationship of their systems of ideals and valuations to those of  $G$ . One main result is that a semiclosed group has one universal Lorenzen group of which all its others are homomorphic images.

M. C. R. Butler.

Busulini, Bruno: Sulla relazione triangolare in un  $l$ -gruppo. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 28, 68—70 (1958).

Nach Birkhoff gilt in einer kommutativen Verbandsgruppe ( $l$ -Gruppe)  $|a + b| \leq |a| + |b|$  für je zwei Elemente  $a, b$ . Verf. beweist einige Verallgemeinerungen dieser Ungleichung für nichtkommutative Verbandsgruppen, wie z. B.  $|a + b| \leq (|a| + |b|) \cup (|b| + |a|)$ , und zeigt, daß aus der Gültigkeit der ersten Ungleichung für alle  $a, b$  umgekehrt die Kommutativität der Verbandsgruppe folgt.

L. Fuchs.

Conrad, Paul: Methods of ordering a vector space. J. Indian math. Soc., n. Ser. 22, 1—25 (1958).

Es sei  $A$  ein (Links-) Vektorraum über einem (angeordneten) Divisionsring  $D$ . Verschiedene Methoden zur Anordnung von  $A$  werden betrachtet. U. a. wird bewiesen: 1. für alle Anordnungen von  $A$  haben die Faktorräume  $C/C'$  (wo  $C$  und  $C'$  konvexe Unterräume von  $A$  sind, zwischen die kein konvexer Unterraum von  $A$  eingeschaltet werden kann) genau dann die Dimension 1, wenn entweder  $A$  selbst von der Dimension 1 ist oder  $D$  dem reellen Zahlenkörper  $R$  (ordnungs)isomorph ist; 2. ist die Dimension von  $A$  größer als 1 und ist  $D$  archimedisch angeordnet, aber nicht mit  $R$  isomorph, dann läßt sich  $A$  so anordnen, daß alle  $C/C'$  dieselbe Dimension  $> 1$  besitzen; 3.  $A$  kann so angeordnet werden, daß es keinen echten konvexen Unterraum besitzt, falls entweder  $D$  eine nichtarchimedische Anordnung besitzt oder  $D$  einem Unterkörper von  $R$  isomorph ist und die Dimension von  $A$  die von  $R$  (bez.  $D$ ) nicht



übersteigt. Nimmt man die Menge  $H$  aller Paare  $(a, a)$  mit  $0 < a \in D$  und  $a \in A$  unter der Komposition  $(a, \bar{a})(b, b) = (ab, ab + b)$  und Ordnungsrelation „ $(a, a) > 0$ “, falls  $a > 1$  oder  $a = 1$  und  $\bar{a} > \bar{0}$ , so wird  $H$  zu einer nichtabelschen angeordneten Gruppe, und die Gruppe der ordnungserhaltenden Semiautomorphismen von  $A$  ist einer Untergruppe aller Ordnungsautomorphismen von  $H$  isomorph.

*L. Fuchs.*

**Conrad, Paul:** On ordered vector spaces. J. Indian math. Soc., n. Ser. 22, 27—32 (1958).

Alle möglichen Anordnungen eines Vektorraumes  $A$  der Dimension 2 über einem Divisionsring  $D$  werden klassifiziert. Gibt es keinen nicht-trivialen konvexen Unterraum von  $A$  in irgendeiner Anordnung und ist die zugehörige Anordnung von  $D$  nicht-archimedisch, so entsteht die Anordnung von  $A$  durch eine von zwei wohlbestimmten Methoden.

*L. Fuchs.*

**Wan, Zhe-xian:** On the automorphisms of linear groups over a non-commutative principal ideal domain of characteristic  $\neq 2$ . Sci. Sinica 7, 885—933 (1958).

Verf. untersucht die Automorphismen von linearen Gruppen über einem nicht-kommutativen euklidischen Ring der Charakteristik  $\neq 2$ . Es sei  $GL_n(R)$  die Gruppe aller invertierbaren  $n \times n$  Matrizen auf  $R$ , und  $SL_n(R)$  die von den Matrizen der Form  $I + E$  erzeugte Untergruppe. ( $I$  ist die Identität und  $E = (a_{ij})$ ,  $a_{kl} = 0$  für  $k \neq i, l \neq j$ ,  $a_{ij} = 1$ ). Im Fall  $n = 3$  beweist Verf., daß jeder Automorphismus  $\varphi$  bzw.  $\psi$  von  $GL_n(R)$  bzw.  $SL_n(R)$  sich in der Form  $\varphi(X) = A X^\sigma A^{-1}$  oder  $= A (X^\tau)^{-1} A^{-1}$  bzw.  $\psi(X) = \chi(X) A^\sigma X A^{-1}$  oder  $= \chi(X) A (X^\tau)^{-1} A^{-1}$  darstellen läßt, wo  $A \in GL_n(R)$ ,  $\sigma$  ein Automorphismus von  $R$ ,  $\tau$  ein Antiautomorphismus von  $R$ , und  $\chi(X)$  ein Homomorphismus von  $GL_n(R)$  in  $R$  ist. *K. Shoda.*

• **Seligman, G. B.:** Liesche Algebren. Vorlesung. Ausgearbeitet von Wilhelm Kaup und Klaus Peters. (Schriftenreihe des Math. Inst. der Universität Münster. Heft 15.) Münster (Westf.): Buch- und Steindruckerei Max Kramer 1959. II, 130 S.

This transcript of a course of lectures given at Münster on Lie algebras provides a very readable introduction to the subject, the aim being to carry the development as far as the structure and representations of (finite dimensional) semisimple Lie algebras (over an algebraically closed field of characteristic zero). In the introductory chapters, which deal with the theorems of Engel and Lie, and with Lie algebras of linear transformations, systematic use is made of the radical and the nilradical; these notions are of help later in the proof of Ado's theorem, which closely follows Harish-Chandra. The proofs of Levi's theorem and of Weyl's theorem on complete reducibility are characteristic of the author's down-to-earth approach: they proceed via Whitehead's two lemmas but do not use the language of homological algebra (beyond a commutative diagram or so). The structure theory of semisimple Lie algebras is then developed following E. Cartan and Weyl, as far as the two-dimensional case (with a brief summary, in an appendix, of the complete classification). The final chapter, on representation theory, is devoted mainly to the proof of Harish-Chandra's theorem (this Zbl. 42, 127) showing how to construct a Lie algebra  $L$  for any given Weyl matrix of order  $r$  which defines a finite group of symmetries acting in an  $r$ -dimensional vector space, and a finite dimensional irreducible  $L$ -module with a (suitable) prescribed leading weight. The straightforward presentation, assuming nothing beyond some linear algebra and field theory, makes the book suitable for the beginner; but there is also much to interest the more advanced reader, e. g. the treatment of reductive Lie algebras of linear transformations in chapter II. A possible criticism is the late introduction of the Weyl group, whose more extensive use might have added to the clarity. Naturally one also regrets the many topics which receive no mention (such as free Lie algebras, automorphisms, the connexion with groups, the case of charac-



teristic  $p$ ) or are only touched on briefly in appendices to the chapters (Birkhoff-Witt theorem, cohomology of Lie algebras, Cartan-Chevalley theorem on the conjugacy of Cartan subalgebras). But this in no way detracts from the achievement of the book: to make its subject accessible to a wider public. *P. M. Cohn.*

**James, Ioan and Emery Thomas:** Which Lie groups are homotopy-abelian? *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **45**, 737—740 (1959).

Let  $G$  be a topological group,  $H$  a subgroup of  $G$  and  $f, \bar{f}$  the maps of  $H \times H \rightarrow G$  given by  $f(x, y) = xy = \bar{f}(y, x)$ .  $H$  is called homotopy-abelian in  $G$  if  $f \simeq \bar{f}$ . A homotopy-abelian group is one which is homotopy abelian in itself. The authors prove that none of the compact classical groups  $SO(n)$ , ( $n \geq 3$ ),  $U(n)$  ( $n \geq 2$ ),  $Sp(n)$  ( $n \geq 1$ ) is homotopy-abelian. The question is not settled for all the exceptional groups. The proof uses the notion of the Samelson product for  $G$  (H. Samelson, this Zbl. **56**, 168, where it is shown that  $Sp(1)$  is not homotopy abelian) and the Whitehead product for the classifying space  $B$  of  $G$  (G. W. Whitehead, this Zbl. **58**, 168). These are related by the usual homotopy sequence,  $B$  being the base of a principal  $G$ -bundle. The proof yields various results which sharpen those above, for example  $U(n)$  ( $n \geq 2$ ) is not homotopy abelian in  $U(2n-1)$  and  $Sp(n)$  ( $n \geq 1$ ) is not homotopy abelian in  $Sp(2n-1)$ . The exact analogue does not hold for  $SO(n)$ ,  $SO(4)$  being homotopy-abelian in  $SO(7)$ . However  $SO(2n+1)$  and  $SO(2n)$  are not homotopy-abelian in  $SO(4n)$  and  $SO(4n-4)$  respectively. *S. Helgason.*

**Yokota, Ichiro:** On some homogeneous spaces of classical Lie groups. *J. Inst. Polytechn., Osaka City Univ., Ser. A* **9**, 29—35 (1958).

Let  $F$  be one of the three fields of real numbers  $R$ , complex numbers  $C$  or quaternions  $Q$  and let  $G_F(n)$  denote the orthogonal group acting on  $F^n$ . Let  $D_F(n)$  denote the subgroup of all diagonal matrices in  $G_F(n)$ . Then  $(G_F(n), D_F(n)) = (O(n), (Z_2)^n), (U(n), U(1)^n), (Sp(n), Sp(1)^n)$  in the three cases. The author establishes some results on the topology of the coset space  $G_F(n)/D_F(n)$ , namely the Poincaré polynomials, cellular decompositions and torsion. *S. Helgason.*

**Saito, Masahiko:** Sur certains groupes résolubles. *C. r. Acad. Sci., Paris* **248**, 1909—1911 (1959).

Let  $G$  be a solvable simply connected Lie group. The author gives necessary and sufficient conditions in terms of the Lie algebra in order that  $G$  should possess a discrete, commutative, uniform subgroup  $D$ . If these conditions are satisfied and if  $G$  is of even dimension then  $G$  has a right invariant Kählerian structure  $J$ . Also  $D$  and  $J$  can be chosen in such a way that  $G/D$  is algebraic in the Kählerian structure induced by  $J$ . *S. Helgason.*

### **Verbände. Ringe. Körper:**

- |   |   |
|---|---|
| { | <b>Benado, Mihail:</b> Sur la fonction de Möbius. <i>C. r. Acad. Sci., Paris</i> <b>246</b> , 863—865 (1958).   |
|   | <b>Benado, Mihail:</b> Sur la fonction de Möbius. <i>C. r. Acad. Sci., Paris</i> <b>246</b> , 2553—2555 (1958). |

Note: The first of these notes is really the successor of the second one, but it was printed accidentally before the second. Further, the first reference in it should have been to its predecessor second note—the reference given at present is to a note that has nothing to do with the subject matter of the present notes. — The author calls “hierarchy” a partially ordered set whose “quotients”  $u/v$  (that is, the subset of all  $x$  with  $v \leq x \leq u$ ) are finite. This differs from the use of this term by Louis Weisner (this Zbl. **12**, 393). Every hierarchy is a complete multilattice in the sense of the author [M. Benado, *Czechosl. math. J.* **5** (80), 308—344 (1955)]. A Möbius function is here defined for any hierarchy with a first element,

and a number of its properties are stated. These confirm, inter alia, that this Möbius function generalizes known counting procedures (Weisner, loc. cit.; P. Hall, this Zbl. 7, 291). The later note gives further results on the Möbius function in the case of special types of hierarchies, namely distributive hierarchies, cartesian hierarchies, and "Möbius hierarchies"; the latter generalize F. Klein-Barmen's "Sternverbände" (this Zbl. 65, 265). Proofs of the contents of both notes are to appear elsewhere.  
*Hanna Neumann.*

**Utumi, Yuzo:** On a theorem on modular lattices. Proc. Japan Acad. 35, 16—21 (1959).

The author proves the theorem: For any complete upper continuous modular lattice  $L$  the following conditions (M), (F), ( $\Delta$ ) are equivalent: (M)  $m(L)$  is finite; (F) there is no independent countable subset  $(a_i)$  such that  $a_i \geq a_{i+1} \neq 0$  for every  $i$ ; ( $\Delta$ )  $L$  contains no infinite sequence  $(a_i)$ ,  $a_i \neq 0$  such that for every  $i$  there exists  $b_i$  satisfying  $a_{i-1} \geq a_i \cup b_i$ ,  $a_i \cap b_i = 0$ ,  $a_i \approx b_i$ . (The symbols  $a \approx b$  resp.  $a \gtrsim b$  mean that the elements  $a, b$  are projective resp. that there exists  $c$  with  $a \geq c \approx b$ ;  $m(L)$  is the least upper bound of all integers  $r$  such that  $L$  contains an independent system of  $r$  mutually projective nonzero elements.) As corollaries the author obtains two theorems concerning the structure of semisimple rings.  
*J. Jakubík.*

**Szász, Gábor:** Über die Struktur komplementärer Verbände. Magyar Tud. Akad., mat. fiz. Tud. Oszt. Közleményei 9, 57—79 (1959) [Ungarisch].

Ungarische Fassung der Aufsätze "On relatively complemented lattices" (dies. Zbl. 79, 258), "On complemented lattices" [Acta Sci. math. 19, 77—81 (1958)], "Note on complemented modular lattices of finite length" [ibid. 19, 224—228 (1958)], und "Semi-complements and complements in semi-modular lattices" (dies. Zbl. 81, 24).  
*L. Fuchs.*

**Anderson, Lee W.:** On the distributivity and simple connectivity of plane topological lattices. Trans. Amer. math. Soc. 91, 102—112 (1959).

Verf. zeigt zunächst: Genau dann hat ein Punkt  $p$  eines zusammenhängenden topologischen Verbandes  $L$  die Eigenschaft, daß die Menge  $L - \{p\}$  nicht zusammenhängend ist, wenn  $p$  vom Nullelement 0 und Einselement 1 des Verbandes (falls vorhanden) verschieden und mit jedem Punkt des Verbandes vergleichbar ist. Hieraus folgt, daß die Ordnung eines zusammenhängenden topologischen Verbandes mit 0 und 1 genau dann eine Total-Ordnung ist, wenn  $L$  keine 0 und 1 enthaltende, zusammenhängende, echte Teilmenge besitzt. Ein topologischer Verband heißt lokal konvex in einem Punkte  $x$ , wenn eine aus offenen, konvexen Mengen bestehende Umgebungsbasis von  $x$  existiert. Unter Benutzung enger Beziehungen dieses Begriffes zu dem des lokalen Zusammenhangs wird gezeigt, daß jeder lokal kompakte, zusammenhängende topologische Verband auch lokal zusammenhängend ist. Für den Spezialfall einer zusammenhängenden topologischen Kette  $L$  ergibt sich die Äquivalenz der folgenden vier Aussagen:  $L$  ist lokal konvex,  $L$  ist lokal zusammenhängend,  $L$  ist lokal kompakt, die Topologie von  $L$  ist die natürliche Ordnungstopologie. Speziell ist das Einheitsintervall bis auf Isomorphie eindeutig als lokal konvexe, zusammenhängende, separable topologische Kette mit 0 und 1 gekennzeichnet. Verf. zeigt weiter, daß jeder lokal kompakte, zusammenhängende, einer Teilmenge der gewöhnlichen Ebene homeomorphe topologische Verband einfach zusammenhängend ist. Als Hauptresultat der Arbeit folgt schließlich, daß jeder solche Verband auch distributiv ist.  
*G. Bruns.*

**Clarke, A. Bruce:** On the representation of cardinal algebras by directed sums. Trans. Amer. math. Soc. 91, 161—192 (1959).

A cardinal algebra  $\mathfrak{A} = \langle A, +, \Sigma \rangle$  is a set  $A$  closed for a binary addition  $+$  and a countable addition  $\Sigma$ , subject to the axioms:

$$\sum_{i<\infty} a_i = a_0 + \sum_{i<\infty} a_{i+1}; \quad \sum_{i<\infty} (a_i + b_i) = \sum_{i<\infty} a_i + \sum_{i<\infty} b_i;$$



there is 0 such that  $a + 0 = a = 0 + a$  for each  $a$  in  $A$ ; if  $a + b = \sum c_i$ , then  $a = \sum a_i$  and  $b = \sum b_i$  where  $a_i, b_i$  are elements such that  $c_i = a_i + b_i$ , for  $i = 0, 1, 2, \dots$ ; if  $a_i = b_i + a_{i+1}$  for each  $i < \infty$ , then there exists an element  $c$  of  $A$  such that  $a_n = c + \sum_{i < \infty} b_{n+i}$ , for each  $n < \infty$ . The representations of the cardinal algebra are based on (i) the operation of forming a direct sum of a family  $\mathfrak{B}_a$  of cardinal algebras (possibly without zero) indexed by the elements ( $a$ ) of another cardinal algebra  $\mathfrak{A}$ , and (ii) the operation of taking the star-product  $\mathfrak{A} \star_{\Phi} \mathfrak{B}$  of  $\mathfrak{A}$  and  $\mathfrak{B}$  modulo  $\Phi$ , when  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  are two cardinal algebras and  $\Phi$  is a homomorphism of  $\mathfrak{B}$  into the ideal algebra  $\mathfrak{I}(\mathfrak{A})$  (whose elements are the ideals of  $\mathfrak{A}$ ). The order in a cardinal algebra being the divisibility order ( $a \leq b$  if  $b = a + c$  for some  $c$ ) for defining the direct sum algebra, it is assumed that the family  $\mathfrak{B}_a$  is such that when  $a$  is the zero of  $\mathfrak{A}$ , or an element which is accessible (as sum of a countable set of strictly smaller elements) then the cardinal algebra  $\mathfrak{B}_a$  has a zero. Then the elements of the direct sum "cardinal algebra" are the pairs  $(a, b)$  with  $a \in A$  and  $b$  in  $B_a$ , the sum  $\sum_i (a_i, b_i)$  is  $(a, b)$ , where  $a = \sum a_i$  and  $b =$  the sum of  $b_i$  in  $A_{a_i}$ , for  $a_i = a$  (and  $b = 0_a$  if all the  $a_i$  are different from  $a$ ). The finite sum is similarly defined. The star product is the quotient of the direct product  $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$  of the algebras  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  (with componentwise operations) by the countably additive congruence  $R$  defined by:  $(a, b)R(a', b')$  if, and only if,  $b = b'$  and  $a \equiv a' \pmod{\Phi(b)}$ . The principal results of the paper are: Th. 3. 14. Each cardinal algebra is a direct sum (up to isomorphism) of a family  $\mathfrak{C}_b$  of cardinal algebras (possibly without zero element) indexed by the elements  $b$  of a cardinal algebra  $\mathfrak{B}$  such that:  $\mathfrak{B}$  is a linearly ordered, idemmultiple cardinal algebra, each  $\mathfrak{C}_b$  is the positive part of a linearly indecomposable cardinal algebra, and  $\mathfrak{C}_b$  is a trivial one-element cardinal algebra, if  $b = 0$  or is accessible in  $\mathfrak{B}$ . The algebras  $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}_b$  are uniquely determined up to isomorphism. Th. 4. 6. When the cardinal algebra is primary, in the above direct sum representation, each  $\mathfrak{C}_b$  is the positive part of a simple cardinal algebra or of a linearly indecomposable idemmultiple cardinal algebra. Th. 6. 12. If  $\mathfrak{A}$  is a semi-primary cardinal algebra of finite width, then it is isomorphic to a star-product  $\mathfrak{B} \star_{\Phi} \mathfrak{C}$ , where  $\mathfrak{B}$  is a strictly nonidemmultiple semi-primary cardinal algebra,  $\mathfrak{C}$  is an idemmultiple cardinal algebra, and  $\Phi$  is a homomorphism of  $\mathfrak{C}$  into  $\mathfrak{I}(\mathfrak{B})$  (the set of ideals  $X$  of  $\mathfrak{B}$  which are factors of  $\mathfrak{B}$ , so that  $B = X \times Y$  for some ideal  $Y$ ) such that  $\Phi(0) = 0$ . This representation is unique up to isomorphism. The concepts used above are defined as follows: The algebra  $\mathfrak{A}$  is idemmultiple if for each element  $a$ ,  $a + a = a$ ; it is linearly indecomposable, if in any expression of the algebra as the isomorph of a direct sum of algebras  $\mathfrak{A}_i$  indexed by the elements of the 2-element cardinal algebra  $(0, \infty)$ , (where the algebra  $\mathfrak{A}_{\infty}$  may have no zero), the first summand is a trivial one-element algebra; it is simple if it has no proper ideals (ideals are closed for countable sums also), it is primary if each element  $b$  is primary that is,  $\infty a < \infty b$  implies  $a < b$ , whatever be  $a$  ( $\infty a$  is the countable sum of  $a_i$  each equal to  $a$ ); it is semi-primary if each element  $a$  which is disjunctively indecomposable is primary,  $-a$  being disjunctively indecomposable if  $a = x + y$  and  $x \wedge y = 0$  imply that  $x = 0$  or  $y = 0$ . The algebra  $\mathfrak{A}$  is strictly nonidemmultiple if any ideal  $X$  of  $\mathfrak{A}$  which is a factor of  $\mathfrak{A}$  is the ideal generated by the set of all nonidemmultiple elements of  $X$  itself. The width of the algebra is the l. u. b. of the cardinal numbers of all sets  $X \subset A - (0)$ , such that  $x \wedge y = 0$  for all  $x, y$  of  $X$  with  $x \neq y$ .

V. S. Krishnan.

**Boccioni, Domenico:** Indipendenza delle condizioni di distributività. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 28, 1—30 (1958).

Es sei  $B$  eine Menge, in der zwei Operationen: Addition und Multiplikation definiert sind. Verf. zeigt, daß die  $v^3$  Links distributivgesetze  $x(y+z) = (xy) + (xz)$  ( $x, y, z \in B$ ) voneinander unabhängig sind, falls die Ordnung  $v$  von  $B$  mindestens

3 ist. [D. h. es gibt ein  $B$ , in dem ein beliebiges Gesetz nicht gilt, aber alle anderen gültig sind.] Die  $2\nu^3$  Links- und Rechtsdistributivgesetze für  $\nu \geq 3$  sind ebenfalls voneinander unabhängig. Auch der Fall  $\nu = 2$  wird diskutiert. *L. Fuchs.*

**Boccioni, Domenico:** Indipendenza delle condizioni di mutua distributività. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 28, 40—49 (1958).

**Boccioni, Domenico:** Dipendenza delle condizioni di mutua distributività nei bisistemi di ordine 3. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 28, 50—67 (1958).

Ist  $B$  wie im vorstehenden Referat definiert und ist die Ordnung  $\nu$  von  $B$  mindestens 4, so sind die  $4\nu^3$  gegenseitigen Distributivgesetze  $x(y+z) = (xy) + (xz)$ ,  $x+(yz) = (x+y)(x+z)$  usw. voneinander unabhängig. Dem Fall  $\nu = 3$  ist die zweite Arbeit gewidmet. *L. Fuchs.*

**Findlay, G. D. and J. Lambek:** A generalized ring of quotients. I, II. Canadian math. Bull. 1, 77—85, 155—166 (1958).

Eine von Utumi (dies. Zbl. 70, 266) stammende Methode zur Konstruktion eines Rechtsquotientenringes eines beliebigen (assoziativen) Ringes  $R$  wird verallgemeinert, um eine sog. maximale rationale Erweiterung eines beliebigen  $R$ -Moduls zu gewinnen. —  $A, B, C, \dots$  bedeuten stets Rechtsmoduln über  $R$ . Ein partieller Homomorphismus (p. H.)  $\Phi$  von  $B$  in  $A$  ist ein gewöhnlicher  $R$ -Homomorphismus irgendeines Untermoduls  $D$  von  $B$  in  $A$ ;  $\Phi$  heißt irreduzibel, falls es zu keinem p. H. von  $B$  in  $A$  erweitert werden kann, dessen Definitionsbereich  $D$  echt enthält. Für einen Untermodul  $C$  von  $B$  bedeutet die Relation  $C \leq B(A)$ , daß sich jeder Homomorphismus von  $C$  in  $A$  zu einem eindeutig bestimmten irreduziblen p. H. von  $B$  in  $A$  erweitern läßt; besteht  $C \leq B(B)$ , so heißt  $B$  eine rationale Erweiterung von  $C$ . Es gelten: 1. Jeder Modul  $C$  besitzt eine maximale rationale Erweiterung  $M$ , die keine echte rationale Erweiterung besitzt. 2.  $M$  ist durch  $C$  eindeutig bestimmt bis auf Isomorphie über  $C$ . 3. Die irreduziblen p. H. von  $B$  in  $A$ , deren Definitionsbereiche  $D$  der Bedingung  $D \leq B(A)$  genügen, bilden eine additive Gruppe  $\text{Fr}(B, A)$ , die die Homomorphismengruppe  $\text{Hom}(B, A)$  enthält und  $\text{Hom}(A, A)$  bzw.  $\text{Hom}(B, B)$  als Links- bzw. Rechtsoperatorenring zuläßt, und es gilt:  $M \cong \text{Fr}(I, C)$ , wo  $I$  die gewöhnliche Ringerweiterung von  $R$  mit Einselement bezeichnet. 4. Ein Modul  $A$  ohne echte rationale Erweiterung läßt sich durch die folgende Erweiterung charakterisieren:  $\text{Fr}(B, A) = \text{Hom}(B, A)$  für alle  $B$ . — Nach Utumi wird ein Oberring  $S$  von  $R$  als Rechtsquotientenring von  $R$  bezeichnet, falls  $S_R$  (d. h.  $S$  aufgefaßt als Rechtsmodul über  $R$ ) eine rationale Erweiterung von  $R_R$  ist. Jeder Ring  $R$  besitzt einen maximalen Rechtsquotientenring  $Q$ , der bis auf Isomorphie über  $R$  eindeutig bestimmt ist. Ferner ist  $Q_R$  die maximale rationale Erweiterung von  $R_R$  und jeder Rechtsquotientenring von  $R$  ist einem eindeutig bestimmten Unterring von  $Q$  über  $R$  isomorph. *L. Fuchs.*

**Brainerd, B. and J. Lambek:** On the ring of quotients of a Boolean ring. Canadian math. Bull. 2, 25—29 (1959).

Es sei  $S$  ein Boolescher Oberring des Booleschen Ringes  $R$ ;  $S$  heiße eine vollständige Erweiterung von  $R$ , falls: 1.  $S$  ist ein vollständiger Verband bez. der Ordnungsrelation  $\leq$ , definiert durch „ $s \leq s'$  genau dann, wenn  $ss' = s$  gilt“, 2. für jedes  $s \in S$  gilt  $s = \text{Sup}(r \in R \mid r \leq s)$ . Es wird gezeigt, daß  $S$  genau dann eine vollständige Erweiterung von  $R$  ist, wenn  $S$  ein maximaler Quotientenring von  $R$  ist (vgl. das vorstehende Referat). *L. Fuchs.*

**Gemignani, Giuseppe:** Osservazioni relative alla dipendenza algebrica su un anello. Ricerche Mat. 7, 235—240 (1958).

U. a. wird gezeigt, daß jeder kommutative Ring  $A$  einen Oberring  $B$  besitzt, so daß jedes Element von  $B$  über  $A$  algebraisch ist und ein Element existiert, das algebraisch über  $B$ , aber transzendent über  $A$  ist ( $B$  ist kein Integritätsbereich!).

*L. Fuchs.*



**De Cicco, John:** Introduction to the theory of a quadratic extension  $\Gamma$  of a field  $K$ . Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat., **17**, 223—251 (1958).

Die im Titel genannte Erweiterung von  $K$  besteht aus den binären Elementen  $z = (x, y)$ , wo  $x, y$  ein geordnetes Elementenpaar aus  $K$  ist. Die Multiplikation ist gegeben durch

$$z_1 z_2 = (x_1, y_1) (x_2, y_2) = (x_1 x_2 + \alpha y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1 + \beta y_1 y_2),$$

wo  $\alpha, \beta$  feste,  $\Gamma$  definierende Elemente aus  $K$  sind.  $\Gamma$  ist ein kommutativer Ring mit Einselement, der einen zu  $K$  isomorphen Unterring  $K'$  besitzt. Sind  $x, y$  Elemente aus  $K'$ , so gilt die Darstellung  $z = x + iy$ , wo  $i = (0, 1)$  nicht in  $K'$  liegt.  $\Gamma$  heißt elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch, je nachdem die quadratische Gleichung  $z^2 = \alpha + \beta z$  keine, eine oder zwei Lösungen in  $K'$  hat. Ist die Norm  $N(z) = x^2 + \beta xy - \alpha y^2$  nicht Null, so existiert in  $\Gamma$  das inverse Element  $1/z$ . Allein ein elliptisches  $\Gamma$  besitzt keine Nullteiler. Im parabolischen und hyperbolischen Fall werden die Ideale in  $\Gamma$  untersucht. Ist  $\Gamma$  nicht parabolisch und  $K$  nicht von der Charakteristik 2, so läßt sich mittels  $\Gamma$  in  $K$  eine abstrakte Trigonometrie entwickeln. E. Trost.

**De Cicco, John:** Some theorems concerning commutative rings with unit which admit involutorial automorphisms. Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur. **92**, 225—242, 225 (1958).

Die Charakteristik des im Titel genannten Ringes  $R$  wird als von zwei verschieden vorausgesetzt. Der involutorische Automorphismus führt ein Element  $z$  von  $R$  in das „konjugierte“ Element  $\bar{z}$  über. Die Gesamtheit  $X$  der selbstkonjugierten Elemente ( $\bar{z} = z$ ) von  $R$  ist ein Teilring von  $R$ . Umgekehrt führt die quadratische Erweiterung (siehe das vorstehende Referat) eines Ringes  $X$ , in dem zu 2 das inverse Element  $1/2$  existiert, wieder auf einen Ring  $R$ , wo  $z = x + iy$ ,  $\bar{z} = x + \beta y - iy$ ,  $i^2 = \alpha + i\beta$ . Verf. charakterisiert die  $R$ , die quadratische Erweiterungen sind. Er entwickelt ferner einige Eigenschaften der zugeordneten  $z$ -Ebene. Zum Schluß werden Polynome über  $R$  betrachtet. E. Trost.

**Fadini, Angelo:** Composizione delle algebre. (Algebre appoggiate ad un'altra algebra). Giorn. Mat. Battaglini **85** (V. Ser. 5), 172—187 (1957).

Verf. definiert Algebren über einer Algebra, das heißt hyperkomplexe Systeme  $G_2$ , bei denen die Koordinaten des allgemeinen Elementes sowie die Multiplikationskonstanten Elemente einer Algebra  $G_1$  über einem Körper sind. Die gewöhnlichen Algebren  $G_1$  heißen vom 1. Typus, die Algebren  $G_2$  vom 2. Typus. Es zeigt sich, daß eine Algebra  $A$  vom 2. Typus mit der Ordnung  $n$  über einer Algebra  $B$  vom 1. Typus und der Ordnung  $m$  als Algebra  $C$  vom 1. Typus und der Ordnung  $mn$  betrachtet werden kann. Zwei ausführlich dargestellte Beispiele illustrieren diesen Satz. E. Trost.

**Gerstenhaber, Murray:** On nilalgebras and linear varieties of nilpotent matrices. I. Amer. J. Math. **80**, 614—622 (1958).

Es seien  $A_1, \dots, A_k$   $n \times n$ -Matrizen über dem Körper  $K$  von mindestens  $n$  Elementen, deren linearen Verbindungen stets nilpotent sind, und  $V$  sei ein von  $A_1, \dots, A_k$  auf  $K$  erzeugter Vektorraum. Es sei  $l_{ij} = ((A_1)_{ij}, \dots, (A_k)_{ij})$  ein aus den  $(i, j)$ -Komponenten  $(A)_{ij}$  von  $A$  bestehender Vektor,  $S$  eine Untermenge von Suffixen  $\{(i, j) \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\}$  und  $L_S$  ein von  $l_{ij} \ (i \leq j) \in S$  über  $K$  erzeugter Vektorraum. Wenn insbesondere  $S = \{(i, j) \mid i \leq j\}$  ist, so schreibt man  $L_+ = L_S$ . Ein Vektorraum  $L_S$  heißt komplett, wenn  $\dim V = \dim L_S$ . Verf. beweist die folgenden Hilfssätze:  $X$  sei eine allgemeine Matrix. Setzt man  $V(X) = X^{-1} V X$ , so ist  $L_+(X)$  komplett. Wenn  $L_+$  komplett ist und wenn  $\dim V = \dim L$  gilt, so gibt es eine Matrix  $C$  derart, daß  $C^{-1} V C$  eine Algebra von Dreiecksmatrizen über  $K$  ist. Verf. beweist  $\dim V = \frac{1}{2} n(n-1)$ . Ist  $\dim V = \frac{1}{2} n(n-1)$ , so gibt es eine Matrix  $C$  über  $K$  derart, daß  $C^{-1} V C$  ein Algebra von Dreiecksmatrizen über  $K$  ist.

K. Shoda.

**Lesieur, Léonce et Robert Croisot:** Structure des anneaux premiers noethériens à gauche. C. r. Acad. Sci., Paris **248**, 2545—2547 (1959).

Soit  $A$  un anneau premier ( $aAb=0$  entraîne soit  $a=0$ , soit  $b=0$ ) et noethérien à gauche (la condition maximale est valable pour les idéaux à gauche). Si on désigne par  $(u|$  l'idéal à gauche engendré par tout élément  $u$ , on dit que l'idéal  $X$  à gauche est fermé si pour tout  $b \in X$  il existe un  $x$  non nul de  $(b|$  tel que  $X \cap (x = 0$ . Alors l'annulateur à gauche d'un sous-ensemble quelconque est un idéal à gauche fermé et le treillis des idéaux à gauche fermés est modulaire, complété et de longueur finie. On établit alors que  $A$  possède un anneau de quotients à gauche  $Q(A)$  qui est d'ailleurs l'enveloppe injective de  $A$ , considéré comme module. Les résultats sont complètement établis dans un mémoire à paraître aux Ann. Sci. Ecole norm. sup.

*J. Guérindon.*

**Aubert, K. E.:** Une théorie générale des idéaux et ses applications. 13. Skand. Mat.-Kongr., Helsinki 1957, 28—35 (1958).

Dans un demi-groupe (multiplicatif) commutatif  $D$ , une application  $A \rightarrow A_x$  de l'ensemble des parties de  $D$  en lui même définit un système de  $x$ -idéaux (ou  $x$ -système) si les conditions suivantes sont vérifiées:

1.  $A \subseteq A_x$ ;
2.  $A \subseteq B_x \rightarrow A_x \subseteq B_x$ ;
3.  $A \cdot B_x \subseteq B_x \cap (A \cdot B)_x$ .

La condition 3 équivaut aux conditions 3' et 3'' suivants:

$$3'. \quad A \cdot B_x \subseteq B_x; \quad 3''. \quad A \cdot B_x \subseteq (A \cdot B)_x.$$

Etant donné 3', l'A. donne plusieurs formes équivalentes de condition 3'', qui est appelée 'l'axiome de continuité'. L'A. discute plusieurs applications de cette notion générale des idéaux, pour les anneaux avec ou sans condition de chaîne, pour les treillis ditributifs, pour les idéaux différentiels parfaits d'un anneau différentiel, et des sous-groupes réticulés convexes d'un groupe réticulé. Les propriétés d'un tel système d'idéaux sont mentionnées sans démonstrations; un exposé détaillé est à suivre.

*V. S. Krishnan.*

**Guérindon, Jean:** Propriétés d'irréductibilité dans les modules, théorie multiplicative, S-normalité. Bull. Soc. math. France **85**, 459—522 (1957).

Die in den Arbeiten (dies. Zbl. **55**, 262; **65**, 20; **70**, 267; **71**, 263, **77**, 250) veröffentlichten Resultate werden hier bewiesen und zum Teil durch neue Ergebnisse ergänzt. Mehrere Sätze der Theorie der kommutativen Ideale werden für unitäre Moduln  $M$  über einem kommutativen und assoziativen Ring  $A$  verallgemeinert. Als Musterbeispiele seien die folgenden Sätze erwähnt: 1. Ist  $U$  das Subradikal von  $M$  (d. h. der Durchschnitt aller maximalen Untermoduln von  $M$ ), so stimmt die Menge aller  $x \in A$  mit  $xM \subseteq U$  mit dem Jacobson'schen Radikal des Annulators von  $M$  in  $A$  überein. 2. Der Modul  $M$  heiße lokal, wenn er nur einen einzigen maximalen Untermodul enthält, und der Hypersockel sei als die Vereinigung aller lokalen Untermoduln definiert. Die Noetherschen Hypersockel sind genau die endlich erzeugten Moduln über direkten Summen endlich vieler lokaler Ringe. 3. Ein Integritätsbereich ist genau dann ein Dedekindscher Ring, wenn jedes maximale Ideal eine endliche Basis besitzt und kein Primärideal  $\neq 0$  als Durchschnitt (endlich oder unendlich vieler) echter Oberideale dargestellt werden kann.

*L. Fuchs.*

**Krull, Wolfgang:** Über Laskersche Ringe. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. **7**, 155—166 (1958).

On dit qu'un anneau commutatif  $A$  est laskérien si tout idéal est intersection finie d'idéaux primaires. L'A. commence par rappeler la caractérisation des anneaux laskériens qu'il a donnée en 1929 [S.-Ber. Heidelberger Akad. Wiss., math.-naturw. Kl. **1929**, Nr. 2, 11—16 (1929)]. Si  $\alpha$  est un idéal de  $A$  et  $S$  une partie multiplicative de  $A$ , le saturé  $\alpha_S$  de  $\alpha$  pour  $S$  est l'idéal des  $x$  tels qu'il existe un  $s \in S$  pour lequel  $sx \in \alpha$ . Un anneau  $A$  est laskérien si et seulement si: 1. les saturés de  $\alpha$  vérifient la



condition minimale; 2. tout saturé  $\alpha_s$  est de la forme  $\alpha : (s)$  pour un  $s \in A$ . L'A. montre que ces deux conditions sont indépendantes en construisant des contre-exemples appropriés. La condition 2. entraîne que tout idéal de  $A$  est intersection (non nécessairement finie) d'idéaux premiers (anneaux laskériens généralisés).

*J. Dieudonné.*

**Yoshida, Michio:** Some remarks on Noetherian rings. Canadian J. Math. 9, 35—37 (1957).

$R$  sei ein noetherscher Ring mit 1-Element;  $\alpha, \mathfrak{b}$  Ideale aus  $R$ . Folgender Spezialfall des Artin-Reessschen Satzes wird einleitend bewiesen: Es gibt eine natürliche Zahl  $d$ , so daß  $\alpha^n \cap \mathfrak{b} = \alpha^{n-r}(\alpha^r \cap \mathfrak{b})$  für  $n \geq r \geq d$ . Daraus wird dann gefolgert: 1. Besteht das Ideal  $\alpha$  aus  $R$  nicht nur aus Nullteilern, so existiert ein Element  $a \in \alpha$ , so daß  $\alpha^{n+r} : Ra = \alpha^n$  für genügend großes  $n$  und ein geeignetes  $r$ , für das  $a \in \alpha^r$ ,  $a \notin \alpha^{r+1}$  gilt. (Für semi-lokale Ringe bei P. Samuel, Algèbre locale, dies. Zbl. 53, 19). 2. Ist kein minimales Primideal von  $\alpha$  ein Primideal des Nullideales, so gibt es ein  $a \in \alpha$  und eine natürliche Zahl  $n_0$ , so daß für die symbolischen Potenzen  $\alpha^{(t)}$  gilt:  $\alpha^{(n+r)} : Ra = \alpha^{(n)}$  ( $n \geq n_0$ ;  $r$  geeignet, analog wie oben).

*A. Bergmann.*

**Geddes, A.:** On coefficient fields. Proc. Glasgow math. Assoc. 4, 42—48 (1958).

Soit  $Q$  un anneau local complet, d'idéal maximal  $M$ , de même caractéristique que son corps des quotients  $P$  et  $K$  un sous-corps de  $Q$ . On sait qu'il n'est pas toujours possible d'étendre  $K$  à un sous-corps  $F$  dont les images dans l'homomorphisme  $\theta: Q \rightarrow Q/M$  remplissent  $P$  entier ( $K$  corps de Cohen). Cette possibilité est discutée ici dans le cas plus général où  $Q$  est faiblement local ( $Q$  n'est pas nécessairement noethérien, les puissances  $M^n$  définissent une topologie séparée) et pour des extensions  $F$  séparables (généralisées) d'un corps  $K$ , c'est à dire, si  $K$  est soit de caractéristique 0, soit de caractéristique  $p$  en sorte que  $x_1, \dots, x_m$  de  $F$  linéairement indépendants sur  $K$  ont des puissances  $x_1^P, \dots, x_m^P$  linéairement indépendantes. On obtient alors le théorème suivant: si  $K$  est un corps avec  $K \subsetneq Q$  et  $F_1$  une extension séparable (généralisée) de  $\theta(K)$  avec  $F_1 \subsetneq P$ , alors il existe une extension  $F$  de  $K$  en  $Q$  telle que  $\theta(F) = F_1$ . On en déduit que tout anneau faiblement local possède, dans le cas d'égalité caractéristiques, un corps de coefficients (corps de Cohen dans le cas classique) et que si, en plus, la caractéristique est nulle, tout sous-corps maximal de  $Q$  est un corps de coefficients.

*J. Guérindon.*

**Krull, Wolfgang:** Zur Theorie der Bewertungen mit nichtarchimedisch geordneter Wertgruppe und der nicht-archimedisch geordneten Körper. Centre Belge Rech. math., Colloque d'Algèbre supérieure, Bruxelles du 19 au 22 déc. 1956, 45—77 (1957).

Im ersten Teil der Arbeit befaßt sich Verf. mit der Hauptidealgruppe  $\mathfrak{S}$  des Durchschnitts  $\mathfrak{D} = \mathfrak{B}^1 \cap \dots \cap \mathfrak{B}^n$  endlich vieler Bewertungsringe  $\mathfrak{B}^i$  in einem Körper. Es wird eine Methode gesucht, mittels deren sich  $\mathfrak{S}$  aus den Wertgruppen  $W^i$  der einzelnen  $\mathfrak{B}^i$  rein gruppentheoretisch konstruieren läßt. Das System  $W^1, \dots, W^n$  von geordneten Gruppen definiert ein Isomorphismensystem  $H_k^i$ , das gewisse Faktorgruppen  $W^{ik}$  der  $W^i$  miteinander verknüpft, und dann ist  $\mathfrak{S}$  ordnungsisomorph zu derjenigen Untergruppe  $W^*$  des direkten Produktes  $W^1 \times \dots \times W^n$  (die Ordnungsrelation ist komponentenweise definiert), die aus allen  $\alpha_1 \dots \alpha_n$  ( $\alpha_i \in W^i$ ) besteht, wo für jedes Indexpaar  $i, k$ , der Isomorphismus  $H_k^i$  stets die durch  $\alpha_i$  definierte Klasse aus  $W^{ik}$  in die durch  $\alpha_k$  definierte Klasse von  $W^{ki}$  überführt. Die Gruppe  $W^*$  erweist sich als eine Verbandsgruppe. Im zweiten Teil werden additive Vektorgruppen  $G$  in endlichdimensionalen euklidischen Räumen  $\mathfrak{E}$  über einem nichtarchimedisch geordneten Koordinatenkörper  $K$  behandelt.  $G$  heißt Minimalgruppe, wenn bei jeder Vektorfolge  $g_1, g_2, \dots$  aus  $G$  mit  $|g_1| \geq |g_2| \geq \dots$  stets  $g_k = g_{k+1} = \dots$  für hinreichend großes  $k$  gilt. Dann besitzt jede Minimalgruppe eine Basis aus  $m \leq \dim \mathfrak{E}$  über  $K$  linear unabhängigen Vektoren. Die Minimalgruppen lassen sich

durch einfache gruppentheoretische Eigenschaften charakterisieren, und zwar: die Dimension des durch die Vektoren von  $G$  aufgespannten Raumes ist gleich dem Gruppenrang von  $G$ , ferner Hypernormalität im Sinne des Verf. *L. Fuchs.*

**Krasner, Marc:** Approximation des corps valués complets de caractéristique  $p \neq 0$  par ceux de caractéristique 0. Centre Belge Rech. math., Colloque d'Algèbre supérieure, Bruxelles du 19 au 22 déc. 1956, 129—206 (1959).

Es sei  $k$  ein Körper, mit einer nichtarchimedischen Bewertung  $|\dots|$  versehen. Die Funktion:  $d_m(x, y) = 0$ , falls  $x = y$  und  $= |x - y| [\text{Max}(|x|, |y|)]^{-1}$ , falls  $x \neq y$  ( $x, y \in k$ ) nimmt nur Werte  $\leq 1$  an und ist gegen Multiplikation mit Elementen  $\neq 0$  aus  $k$  invariant; es gilt ferner:  $d_m(x, z) \leq \text{Max}(d_m(x, y), d_m(y, z))$ . Ein multiplikativer Divisor  $\pi$  von  $k$  ist eine Äquivalenzrelation mit der Eigenschaft: aus  $x \equiv y (\pi)$  und  $d_m(x', y') \leq d_m(x, y)$  folgt  $x' \equiv y' (\pi)$ . Werden jeder reellen Zahl  $r$  drei halbreelle Zahlen  $r^-, r^0, r^+$  zugeordnet, so daß  $r^- < r^0 < r^+$  und  $r^+ < r_1$  für  $r < r_1$  gilt, so wird die Norm  $|\pi|$  als das Supremum von  $d_m(x, y)$  mit  $x \equiv y (\pi)$  auf der halbreellen Achse definiert. Die Elemente  $x$  in einer Klasse  $C$  mod  $\pi$  mit  $|\pi| < 1$  besitzen denselben Wert  $|x|$ , der als der Wert  $|C|$  von  $C$  bezeichnet wird. Die Klassen können multipliziert werden, aber die Summe von zwei Klassen wird i. a. eine Menge von Klassen sein. So entsteht ein sog. Hyperkörper  $H = k/\pi$  der Klassen  $C$ , der mit derselben Wertgruppe versehen ist. Ein bewerteter Hyperkörper besitzt im allgemeinen nichttriviale homomorphe Bilder, die durch Restklassenbildung bez. multiplikativer Divisoren hervorgebracht werden können. Verf. betrachtet projektive Folgen  $H_1, \dots, H_n, \dots$  bewerteter Hyperkörper, deren Wertgruppe aus positiven reellen Zahlen bestehen, und deren Normen gegen  $0^+$  streben. Als der projektive Limes entsteht ein perfekt bewerteter Körper  $k$ . Die Folge  $k_1, \dots, k_n, \dots$  von bewerteten Körpern habe die Eigenschaft, daß eine monoton abnehmende, gegen  $0^+$  konvergierende Folge halbreeller Zahlen  $\varrho_i$  existiert, so daß die Hyperkörper  $H_{i-1} = k_{i-1}/\pi_{i-1}$  und  $H_i = k_i/\pi_i$  mit  $|\pi_{i-1}| = |\pi_i| = \varrho_i$  einander isomorph sind. In diesem Falle bilden die Hyperkörper  $k_i/\pi_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) eine projektive Folge, deren Limes als  $\text{Lim } k_i$  definiert ist. Ein Beispiel zeigt, daß eine Folge diskret bewerteter Körper der Charakteristik 0 gegen einen diskret bewerteten Körper von Primzahlcharakteristik konvergieren kann. Auch der Limes von Element- und Polynomfolgen aus  $k_1, \dots, k_n, \dots$  läßt sich passend definieren. Nach der Untersuchung einer endlichen algebraischen, separablen Erweiterung  $K$  des perfekt bewerteten Körpers  $k$  wird das folgende brauchbare Resultat bewiesen, das vom Verf. als Fundamentalprinzip bezeichnet wird: Ist  $\alpha$  ein separables Element der algebraischen Abschließung  $\mathfrak{K}$  des perfekt bewerteten Körpers  $k$  und  $C_\alpha$  der größte Kreis in  $\mathfrak{K}$  mit dem Mittelpunkt  $\alpha$  ( $C_\alpha$  besteht also aus Elementen  $\gamma \in \mathfrak{K}$  mit  $|\gamma - \alpha| \leq \varrho$  für eine halbreelle Zahl  $\varrho$ ), der die Konjugierten von  $\alpha$  bez.  $k$  nicht enthält, so folgt aus  $\beta \in C_\alpha$  stets  $k(\beta) \supset k(\alpha)$ . Ein ähnlicher Satz wird für irreduzible, separable Polynome bez. einer passenden Distanzfunktion bewiesen (vgl. Verf., dies. Zbl. 40, 159). Jeder endlichen separablen Erweiterung  $K|k$  wird kanonisch, von einer gewissen Stelle an, eine Erweiterung  $K_n|k_n$  zugeordnet. Die Erweiterung  $K|k$  ist galoissch genau dann, wenn von einer gewissen Stelle an  $K_n|k_n$  galoissch ist, und in diesem Falle existiert ein kanonischer Isomorphismus zwischen den galoisschen Gruppen von  $K|k$  und  $K_n|k_n$ . — Für Näheres sei auf die Originalabhandlung verwiesen. *L. Fuchs.*

**Bandyopadhyay, Shyama Prasad:** On the lattice of normal subfields. Bull. Calcutta math. Soc. 49, 139—145 (1957).

Es ist wohlbekannt, daß die normalen Unterkörper eines zerfallenden Körpers  $N$  eines Polynoms  $p(x)$  einen Verband  $L(N/F)$  bilden, wo  $F$  der Grundkörper ist und  $p(x) \in F[x]$  gilt. Der Verband  $L(N/F)$  ist isomorph zum Verband der Normalteiler der Galois-Gruppe  $G(N/F)$ . Verf. zeigt in dieser Arbeit, daß der Verband  $L(N/F)$  mit  $L\{p(x)\}$  isomorph ist, wo  $L\{p(x)\}$  mit gewissen Polynomklassen von  $F[x]$  gebildet ist  $[r(x) \subseteq s(x)]$  gilt dann und nur dann, wenn  $r(x)$  ein



Faktor von  $s(x) \subset p(x)$  ist]. Diese Klassen bestehen aus solchen Polynomen, deren Wurzeln eine birationale Verbindung haben. Es ist möglich, mit Hilfe dieser Klassen eine Topologie in  $L\{p(x)\}$  zu definieren, wo die Maximalelemente der Klassen (statt der Klassen) einen Verband bilden, der zu  $L(N/F)$  isomorph ist.

J. Szép.

Hochschild, G.: Note on relative homological dimension. Nagoya math. J. 13, 89—94 (1958).

Soit  $M$  un  $R$ -Module;  $d_R(M)$  désigne la dimension cohomologique de  $M$ , i. e. le plus petit entier  $n$  tel que  $\text{Ext}_R^{n+1}(M, N) = 0$  pour tout  $R$ -module  $N$ . On pose  $d(R) = \sup d_R(M)$ . Soit  $S$  un sous-anneau de  $R$ ; dans la „théorie relative“ (Hochschild, ce Zbl. 70, 269) on définit  $\text{Ext}_{(R,S)}^n(M, N)$ ; d'où des dimensions cohomologiques „relatives“  $d_{R,S}(M)$  et  $d(R, S)$ . Théorème 1: (1)  $d_R(M) \leq d_{R,S}(M) + d(S)$  si  $R$  est  $S$ -plat (à droite); (2)  $d_S(M) \leq d_R(M) \leq d_{R,S}(M) + d_S(M)$  si en outre  $R$  est  $S$ -projectif (à gauche). Les autres théorèmes concernent des cas particuliers: (i)  $R = S[X_1, \dots, X_n]$  (anneau de polynômes); alors  $d(R, S) = n$ ; (ii)  $R = S \otimes T$ ,  $T$  étant l'algèbre associative libre (sur  $Z$ ) engendrée par un ensemble  $U$  d'éléments; alors  $d(R, S) = 1$ ; (iii)  $R = S_n$ , anneau des matrices d'ordre  $n$  sur  $S$ ; alors  $d(R, S) = 0$ . L'inégalité (2) du th. 1 se précise: dans le cas (i),  $d_R(M) = n + d_S(M)$ , quand  $M \neq 0$  est annulé par les  $X_i$  (Eilenberg-Rosenberg-Zelinsky), ce qui implique  $d_{R,S}(M) = n$ . Dans le cas (ii),  $d_R(M) = 1 + d_S(M)$  quand  $M \neq 0$  est annulé par au moins un  $u \in U$ , ce qui implique  $d_{R,S}(M) = 1$ . H. Cartan.

### Zahlentheorie:

• Gloden, A.: Table des solutions de la congruence  $X^4 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$  pour  $800000 < p < 1000000$ . Luxembourg: Chez l'auteur 1959. 22 p. 150 Fr. belges.

Bradis, V. M. et A. F. Sicikov: Sur les triangles de Héron. Gaz. Mat. Fiz., București, Ser. A 11 (64), 325—333, russ. und französ. Zusammenfassung 334 (1959) [Rumänisch].

Trustrum, G. B.: On sequences of integers. Mathematika, London 45, 38—39 (1958).

Für zwei Mengen  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  von natürlichen Zahlen möge die Relation  $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B}$  bedeuten, daß die Summenmenge  $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$  eine unendliche Teilmenge enthält, in der kein Element durch ein anderes teilbar ist. Von P. Erdős [Amer. math. Monthly 57, 567 (1950)], wurde bewiesen, daß stets  $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{A}$  gilt, und an anderer Stelle [Amer. math. Monthly 63, 125 (1956)] vermutet, daß sogar für beliebiges  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  immer  $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B}$  ist. Verf. widerlegt diese Vermutung durch Konstruktion eines Mengenpaares  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ , bei dem jede Menge  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$  zwei Elemente  $m_1, m_2$  mit  $m_1 | m_2$  enthält. B. Volkmann.

Świerczkowski, S.: On the intersection of a linear set with the translation of its complement. Colloquium math. 5, 185—197 (1958).

Sei  $A$  eine Menge von ganzen Zahlen aus dem festen Intervall  $[1, N]$ . Die Anzahl der Elemente werde mit  $|A|$ , die Komplementärmenge  $[1, N] - A$  mit  $\bar{A}$ , die Menge der Zahlen  $a + n, a \in A$  (bei festem  $n$ ) mit  $A_n$ , schließlich die Dichte  $|A|/N$  mit  $\delta(A)$  bezeichnet. Es wird die Aufgabe behandelt, die Existenz eines  $n$  nachzuweisen, bei dem die verschobene Menge  $A_n$  möglichst viele Elemente aus  $\bar{A}$  enthält. Verf. beweist den Satz: Es gibt stets ein  $n$  mit

$$|A_n \cap \bar{A}| \geq \frac{1}{5} N \left( 2 - \sqrt{4 - 10 \delta(A) \delta(\bar{A})} \right).$$

Ältere Resultate von Erdős und Scherk [P. Erdős, Riveon lematematika 9, 45—48 (1955)] beziehen sich nur auf den Fall  $|A| = |\bar{A}|$  und sind weniger scharf

als das vorliegende. Als Folgerung wird ein analoger Satz für beliebige beschränkte, meßbare Mengen  $A$  von reellen Zahlen bewiesen, wobei  $\delta(A)$  in naheliegender Weise mit Hilfe des Lebesgueschen Maßes zu erklären ist. B. Volkmann.

**Rademacher, Hans:** On the Selberg formula for  $A_k(n)$ . J. Indian math. Soc., n. Ser. 21, 40—55 (1958).

$A_k(n) = \sum_{h \bmod k} \omega_{hk} \exp\left(\frac{-2\pi i h n}{k}\right)$  ist die in der Formel für die Anzahl  $p(n)$  der Partitionen von  $n$  auftretende Summe. Dabei ist  $\omega_{hk}$  die  $(24k)$ -te Einheitswurzel, die in der Theorie der Dedekindschen Funktion  $\eta(\tau)$  eine Rolle spielt;  $k$  und  $n$  sind positive ganze Zahlen und  $h$  durchläuft ein reduziertes Restsystem modulo  $k$ . Es handelt sich um die Formel

$$(A) \quad A_k(n) = \sqrt{\frac{k}{3}} \sum (-1)^j \cos \frac{6j+1}{6k} \pi,$$

wo  $j$  diejenigen Zahlen eines vollständigen Restsystem modulo  $k$  durchläuft, für die  $\frac{1}{2}(3j^2 + j) \equiv -n \pmod{k}$  ist. Verf. gibt einen Beweis dieser Formel, der einfacher ist als derjenige von Whiteman (dies. Zbl. 71, 40). Er zeigt weiter, wie die Formel zur Auswertung von  $A_k(n)$  benutzt werden kann, und gibt schließlich einen Beweis für die für  $(k_1, k_2) = 1$  mit gewissen  $n_1, n_2, n$  gültige Produktformel  $A_{k_1}(n_1) A_{k_2}(n_2) = A_{k_1 k_2}(n)$ . Dieser Beweis ist bedeutend einfacher als der Beweis von Lehmer (vgl. dies. Zbl. 18, 107, erste Besprechung). [Bemerkung des Ref.: Die Formel (A) folgt leicht aus der allgemeinen Transformationsformel (3.9) in der Arbeit des Ref. in Ann. of Math., II. Ser. 47, 317—375 (1946)]. H. D. Kloosterman.

**Palamà, Giuseppe:** Su di una questione relativa alla partizione di  $n$ . Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 13, 558—563 (1958).

Following H. Gupta (see for instance this Zbl. 15, 247) the author deals with the problem of giving an explicit formula for the number of partitions of  $n$  in which the least element that occurs is greater than  $[n/s]$ . In this paper the case  $s = 5$  is handled and solved. The use of the formulae thus obtained (which are rather complicated and cannot be exposed here) is explained by an example. The allied problem of finding the number of partitions in summands all larger than  $[n/5] - 2$  is also handled. M. Cugiani.

**Locher-Ernst, L.:** Bemerkungen über die Verteilung der Primzahlen. Elemente Math. 14, 1—5 (1959).

In der ersten Bemerkung weist Verf. darauf hin, daß  $h(n) = 1/3 + 1/4 + \dots + 1/n$  eine gute Annäherung für  $n/\pi(n)$  gibt. Die zweite Bemerkung betrifft den Eulerschen Pentagonalsatz, der nicht bewiesen, aber ausführlich und anschaulich kommentiert wird. E. Trost.

**Smith, Herschel F.:** On a generalisation of the prime pair problem. Math. Tables Aids Comput. 11, 249—254 (1957).

Dies ist eine numerische Untersuchung über  $n$ -Tupel von Primzahlen  $p_1 < p_2 < \dots < p_n$ , für die  $p_n - p_1 = A_n$  möglichst klein ist. Eine Tabelle für  $n \leq 10$  wird angegeben, wobei ein Bereich etwa  $< 10^6$  untersucht wird. Man vgl. auch Leech (dies. Zbl. 83, 41). K. Prachar.

**Golubew, W. A.:** Primzahlen der Form  $x^2 + 3$ . Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., Anzeiger 1958, 163—175 (1958).

Die Primzahlen der Form  $x^2 + 3$  werden für  $x \leq 3800$  berechnet. Verf. findet, daß in diesem Bereich etwas weniger Primzahlen dieser Form vorkommen, als von der Form  $x^2 + 1$ ; ferner daß in den Progressionen  $10m, 10m + 2, 10m + 4, 10m + 6$  und  $10m + 8$  etwa gleich viele  $x$  mit primen  $x^2 + 3$  liegen; ferner, daß zwischen  $y^4$  und  $(y+1)^4$  wenigstens eine Primzahl der Form  $x^2 + 3$  liegt und daß es „ziemlich viele“ Zwillinge der Form  $x^2 + 1$  und  $x^2 + 3$  gibt. K. Prachar.



**Tanaka, Minoru:** On the number of prime factors of integers. III. Japanese J. Math. 27, 103—127 (1958).

In Verallgemeinerung seiner früheren Resultate (Teil II s. dies. Zbl. 80, 263) beweist Verf. einen sehr allgemeinen Satz: Seien  $f_1(\xi), \dots, f_k(\xi)$  irreduzible Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten, deren höchster Koeffizient positiv ist; seien  $\pi_1, \dots, \pi_k$  Mengen von Primzahlen, und es möge für jedes Paar  $i, j \neq i$  entweder  $(f_i, f_j) = 1$  oder  $\pi_i \cap \pi_j = \emptyset$  oder beides gelten. Sei weiter  $\sum_{p \in \pi_i} \frac{v_i(p)}{p} = \infty$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), wobei  $v_i(p)$  die Anzahl der mod  $p$  inkongruenten Lösungen von  $f_i(\xi) \equiv 0 \pmod{p}$  ist,  $\omega_i(n)$  die Anzahl der verschiedenen  $p \in \pi_i$ , die  $n$  teilen.

$$y_i(n) = \sum_{p \leq n, p \in \pi_i} \frac{v_i(p)}{p}, \quad u_i(n) = \frac{\{\omega_i(f_i(n)) - y_i(n)\}}{\sqrt{y_i(n)}}.$$

Wenn dann  $A(x; E)$  die Anzahl der  $n \leq x$  ist, für die der Punkt  $(u_1(n), \dots, u_k(n))$  der Jordan-meßbaren Menge  $E$  angehört, so gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x; E)}{x} = (2\pi)^{-k/2} \int_E \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k u_i^2 \right\} du_1 \cdots du_k.$$

K. Prachar.

**Bredichin, B. M.:** Freie Zahlenhalbgruppen mit Potenzdichten. Mat. Sbornik. n. Ser. 47 (88), 143—158 (1958) [Russisch].

Die A. Selbergsche Methode zum elementaren Beweis des Primzahlsatzes wird hier auf Halbgruppen  $G$  übertragen. Dabei soll jedes Element  $\alpha$  von  $G$  in der Form darstellbar sein  $\alpha = \omega_1^{x_1} \omega_2^{x_2} \cdots \omega_k^{x_k}$ , wobei die  $\omega$  einer Menge  $P$  angehören und die  $x_i \geq 0$  ganz sind; bis auf die Reihenfolge sei die Darstellung eindeutig. Ferner sei jedem  $\alpha$  aus  $G$  eine Zahl  $N(\alpha)$  so zugeordnet, daß  $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$  und es für jedes  $\alpha$  nur endlich viele  $\alpha$  aus  $G$  mit  $N(\alpha) \leq x$  gibt. Unter der Annahme

$$\sum_{\substack{N(\alpha) \leq x, \\ \alpha \in G}} 1 = Cx^\theta + O(x^{\theta_1}), \quad \theta_1 < \theta, \quad \text{gilt} \quad \sum_{\substack{N(\omega) \leq x, \\ \omega \in P}} 1 \sim \frac{x^\theta}{\theta \log x} \quad \text{und auch die asymptoti-}$$

schen Beziehungen für die zu  $\delta(x)$  und  $\psi(x)$  analogen Funktionen sind richtig. Es werden Anwendungen auf den Primidealsatz, sowie ein Resultat von Frejman (dies. Zbl. 65, 29) gegeben, und das Nichtverschwinden der zur Halbgruppe  $G$  gehörigen Zetafunktion auf der Geraden  $\Re s = \theta$  der komplexen  $s$ -Ebene wird bewiesen. Man vergleiche noch Forman-Shapiro (dies. Zbl. 57, 284) und Wintner (dies. Zbl. 60, 106f.).

K. Prachar.

**Rieger, G. J.:** Verallgemeinerung der Siebmethode von A. Selberg auf algebraische Zahlkörper. II. J. reine angew. Math. 201, 157—171 (1959).

Verf. beweist in Fortsetzung seiner früheren Untersuchungen (dies. Zbl. 83, 41) Verallgemeinerungen auf algebraische Zahlkörper des Satzes von Brun-Titchmarsh und der Identität, die von A. Selberg zu seinem elementaren Beweis des Primzahlsatzes für die arithmetische Reihe benützt wurde. Diese wird noch zur Abschätzung des Ideals mit kleinster Norm, welches höchstens zwei Primfaktoren besitzt und einer Idealklasse mod  $f$  angehört, verwendet. Ferner werden noch Sätze über „quadratfreie Ideale“ einer solchen Klasse bewiesen.

K. Prachar.

**Salié, Hans:** Zum Wertevorrat der Dedekindschen Summen. Math. Z. 72, 61—75 (1959).

Instead of the Dedekind sum

$$s(m, n) = \sum_{v \bmod n} \left( \left( \frac{v}{n} \right) \right) \left( \left( \frac{m v}{n} \right) \right), \quad (m, n) = 1, \quad n > 0,$$

where  $((a)) = 0$  for integral  $a$  and  $((a)) = a - [a] - \frac{1}{2}$  for non-integral  $a$  the author considers  $D(m, n) = 12n s(m, n)$  which is fully determined by the relations

$mD(m, n) + nD(n, m) = m^2 + n^2 - 3mn + 1$ ,  $D(m', n) = D(m, n)$ ,  $m' \equiv m \pmod n$ ,  $n > 0$ . First, relations are found for the function  $T$  defined by  $D(m, n) = m + \bar{m} - n + nT(m, n)$ ,  $m \geq 1$ ,  $n \geq 1$ ,  $(m, n) = 1$ , where  $m\bar{m} \equiv 1 \pmod n$ ,  $1 \leq \bar{m} < n$ . The function  $T$  is fully determined by the relations

$$T(m, n) + T(n, m) = [m/n] + [n/m] - 2, \quad m > 0, \quad n > 0,$$

$$T(m', n) = T(m, n), \quad m' \equiv m \pmod n.$$

With these relations several properties of  $T$  are found. They are analogous to those found for  $s(m, n)$  by H. Rademacher (this Zbl. 71, 42) and U. Dieter (this Zbl. 78, 70) e. g. the author's theorem 2:

$$T(amx \pm 1, m^2x) = \pm [(a, m)^2x - 3], \quad m \geq 2, \quad x \geq 1,$$

$$T(amx \pm 1, m^2x) = \pm \{x - 2 + [1/x]\}, \quad m = 1, \quad x \geq 1.$$

Here the  $+$  and the  $-$  signs go together. Properties of  $D(m, n)$  are found by translating the results for  $T(m, n)$ . From the theorems on  $T$ , linear in  $x$ , we find theorems on  $D$  containing quadratic forms in  $x$  e. g. theorem 2':

$$D(amx \pm 1, m^2x) = \pm [m^2x((a, m)^2x - 3) + 2].$$

In the last part the author considers the values  $D(m, n)$  can have.  $T(m, n)$  takes on all values but  $D(m, n)$  only values in the residue classes  $0, \pm 2, \pm 6 \pmod{18}$  but not all values in these classes. A number theoretical condition for the values not obtained by  $D$  is not known. The author states without proof that if  $A(x)$  is the number of values  $a$ ,  $0 \leq a \leq x$  for which a pair  $m, n$  exists with  $|D(m, n)| = a$  then

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x)}{x} = A \text{ exists and of course } A \leq \frac{5}{18}.$$

J. H. van Lint.

**Ridout, D.: Indefinite quadratic forms.** Mathematika, London 5, 122—124 (1958).

By a modification of the method of Birch and Davenport (this Zbl. 84, 272) the author closes the gap between their results and those of Davenport and Ridout [Proc. London math. Soc., III. Ser. 9, 544—555 (1959)], which use an entirely different method elaborating one of Davenport (this Zbl. 72, 272). The combined result of all these papers is that an indefinite nonsingular quadratic form in 21 or more variables represents arbitrarily small numbers for integer values of the variables.

J. W. S. Cassels.

**Malyšev (Malyshev), A. V.: Representation of large numbers by positive ternary quadratic forms of odd relatively prime invariants.** Doklady Akad. Nauk SSSR 118, 1078—1080 (1958) [Russisch].

The author enunciates with a very brief commentary and without proofs five theorems generalizing works of Linnik (this Zbl. 24, 250) on the representation of large numbers by ternary quadratics and by Linnik and the author [Cf. Malyšev, Vestnik Leningradsk. Univ. 11, Nr. 7 (Ser. mat. mech. astron., Nr. 2) 18—35 (1956)] on the uniform distribution of lattice points on spheres etc. For the theorems, which seem to present no unexpected features, the following may serve as an example. Theorem. Let  $f$  be an integral ternary primitive positive-definite form with odd relatively prime invariants  $[\Omega, \Delta]$ . Let  $q$  be a prime number not dividing  $2\Delta$  and let  $g$  be an odd number prime to  $\Omega\Delta$ . Let  $\mathfrak{C}$  be a conical region with vertex at the origin and subtending a solid angle with inner Jordan measure  $\lambda > 0$ . We consider an integer  $m$  relatively prime to  $2\Omega\Delta qg$  and integers  $(x_0, y_0, z_0)$  satisfying the conditions

$$f(x_0, y_0, z_0) \equiv m \pmod{8\Omega\Delta g}, \quad \left(\frac{-\Delta m}{q}\right) = -1.$$

Denote by  $t(f, g, \mathfrak{C}, m)$  the number of all representations  $(x, y, z)$  of the integer  $m$  by the form  $f$  which lie in the conical region  $\mathfrak{C}$  and are congruent to  $(x_0, y_0, z_0)$  modulo  $g$ . Then there exist constants  $m_0$ ,  $\kappa > 0$ ,  $\kappa' > 0$  depending only on  $\Omega, \Delta, q, g, \mathfrak{C}$



such that

$$\kappa h(-\Delta m) < t(f, g, \mathfrak{E}, m) < \kappa' h(-\Delta m)$$

whenever  $m \geq m_0$ . Here  $h(-\Delta m)$  is the number of classes of positive-definite quadratic forms of determinant  $-\Delta m$ . J. W. S. Cassels.

**Malyšev (Malyshev), A. V.:** The relationship between the theory of the distribution of  $L$ -series zeroes and the arithmetic of ternary quadratic forms. Doklady Akad. Nauk SSSR **122**, 343—345 (1958) [Russisch].

In a previous note (reviewed above) the author enunciated a series of theorems about the representation of large integers  $m$  by positive definite quadratic forms with odd relatively prime invariants  $[\Omega, \Delta]$ . In these theorems there appears a condition  $(*) \left(\frac{-\Delta m}{q}\right) = 1$  where  $q$  is an arbitrary fixed prime. The author remarks that this condition is apparently only necessitated by the techniques of proof. In this note he states that this condition can be dispensed with provided that a certain hypothesis about the location of the zeros of certain  $L$ -series is fulfilled. He outlines the proof of this assertion: in essence it seems that the hypothesis about the  $L$ -functions ensures that there exists a  $q$  satisfying  $(*)$  with  $\log q = O\{(\log m)^{1/2}/\log \log m\}$  and that this estimate is enough for the earlier arguments, in which  $q$  was kept fixed, to go through. J. W. S. Cassels.

**Malyšev, A. V.:** Über die Darstellung ganzer Zahlen durch positive quadratische Formen mit vier und mehr Veränderlichen. I. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **23**, 337—364 (1959) [Russisch].

The principal result of this paper is Theorem 1. Let  $f(x_1, \dots, x_s)$  be an integral positive-definite quadratic form with determinant  $\Delta$  and with  $s \geq 4$ . Let  $m$  be a positive integer and  $\Omega$  a convex region on the ellipsoid  $f(x) = m$  subtending the  $f$ -solid angle  $\omega$  at the origin (i. e. the ordinary solid angle after the coordinate system has been subjected to an affine transformation which takes  $f$  into  $\sum x_j^2$ ). Let  $g > 0$ ,  $b_1, \dots, b_s$  be integers such that  $f(b_1, \dots, b_s) \equiv m(g)$ . Then the number of integer points in  $\Omega$  satisfying the congruence  $(x_1, \dots, x_s) \equiv (b_1, \dots, b_s) (g)$  is

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \frac{\pi^{s/2}}{\Delta^{1/2} \Gamma(s/2)} m^{s/2-1} H(f, g, m) + O(m^{s/2-1-(s-3)/(6s+2)+\varepsilon}),$$

where  $H(f, g, m)$  is the appropriate singular series and  $\omega_0 = 2\pi^{s/2}/\Gamma(s/2)$  is the complete solid angle in  $s$ -dimensional space. The constant implied by  $O$  depends only on  $\Delta, g$  and the arbitrarily small preassigned  $\varepsilon > 0$ . (Note that  $\Omega$  is allowed to depend on  $m$ .) The author remarks that there is a similar result but without remainder term if  $\Omega$  is allowed to be any Jordan measurable set, provided that as  $m$  increases the region increases similarly (i. e. is the intersection of  $f = m$  with a generalized cone, centre the origin). When  $\Omega$  is the whole surface  $f = m$  the author obtains the better error term  $O(m^{s/4-1+\varepsilon})$ . He remarks that in the special case  $s = 4$ ,  $g = 1$  Eichler [Arch. der Math. **5**, 355—366 (1954)] obtained the yet better error term  $O(m^{3+\varepsilon})$ . In the second paper of the series the author will compute the singular series: he remarks that the error term is certainly smaller than the main term if  $s \geq 5$  and in the case  $s = 4$  provided that the degrees with which the primes  $p$  dividing  $2\Delta$  occur in  $m$  are bounded. As an application the author obtains an estimate for the number of generalized quaternions with given norm and divisible on the left and right by given quaternions: this result having applications in the theory of ternary quadratic forms (cf. Linnik, this Zbl. **56**, 275 and Malyšev, this Zbl. **79** 69). The most difficult part of the proof is the estimation of the sum  $\sum e^{2\pi i(\mu_1 x_1 + \dots + \mu_s x_s)}$  taken over all solutions  $(x_1, \dots, x_s)$  of  $f(x) = m$ ,  $x_j \equiv b_j(g)$  ( $1 \leq j \leq s$ ), where the further assumption is made that  $f$  is diagonal and  $\mu_1, \dots, \mu_s$  are real numbers. This uses the Hardy-Littlewood circle method, which was used by Tartakovskij [Izvestija Akad. Nauk SSSR, mat. estestv. Otd., VII. Ser. **2**, 111—122, 165—196 (1929)] and Kloosterman [Acta math. **49**, 407—464 (1927)] to get less precise

results in the same direction. The transformation theory of  $\theta$  functions and Weil's well-known estimate for trigonometric sums (this Zbl. 32, 261) are used in estimating the auxiliary function near the points  $e^{2\pi i u/v}$ . J. W. S. Cassels.

**Grummich, Friedrich:** Zur Zahlentheorie der Polynome. Ein Analogon zum Dirichletschen Satz. Math. Nachr. 17, 330—357 (1959).

Unter der Norm  $N(q)$  eines ganzzahligen Polynoms  $\varphi(z) = a_0 z^n + \dots + a_n$  sei der positive Wert  $(a_0^2 + \dots + a_n^2)^{1/2}$  verstanden. Es bedeute  $\mathfrak{R}_{m,s}(x)$  die Menge,  $K_{m,s}(x)$  die Anzahl der ganzzahligen Polynome  $f(z)$  vom Grade  $m$  und mit höchstem Koeffizienten 1, welche der Kongruenz  $f(z) \equiv C(z) \pmod{B(z)}$  genügen und für die  $N((f-C)/B) \leq x$  ist. Hier sind  $B(z) = z^s + b_1 z^{s-1} + \dots + b_s$  und  $C(z) = c_1 z^{s-1} + \dots + c_s$  gegebene teilerfremde ganzzahlige Polynome. Es wird  $1 \leq s \leq m-1$ ,  $m \geq 2$  vorausgesetzt. Es sei  $I_{m,s}(x)$  die Anzahl der irreduziblen,  $R_{m,s}(x)$  die Anzahl der reduziblen Polynome in  $\mathfrak{R}_{m,s}(x)$ . Es ist  $K_{m,s}(x)$  gleich der Anzahl der Gitterpunkte auf und innerhalb der  $(m-s) = r$ -dimensionalen Kugel vom Radius  $\sqrt{x^2 - 1}$ , also

$$K_{m,s}(x) = \alpha_r x^r + O(\psi_r(x)) \quad \text{mit} \quad \alpha_r = \pi^{\frac{1}{2}r} (\Gamma(\frac{1}{2}r + 1))^{-1},$$

wobei  $O(\psi_r(x))$  das Restglied ist. Verf. beweist asymptotische Formeln für  $I_{m,s}(x)$  und  $R_{m,s}(x)$ . Außer einigen speziellen Formeln für  $m=2$  und  $m=3$  beweist er für  $s \leq \frac{1}{2}(m-3)$  und beliebiges  $B(z)$  daß

$$R_{m,s}(x) = \alpha_{r-1} \beta_{r-1} x^{r-1} + O(x^{r-2}), \quad I_{m,s}(x) = \alpha_r x^r - \alpha_{r-1} \beta_{r-1} x^{r-1} + O(\psi_r(x)).$$

Hier ist  $\beta_n$  für  $n \geq 1$  die Summe  $\sum (1 + u^2 + \dots + u^{2n})^{-\frac{1}{2}}$ , erstreckt über die (endliche) Menge der ganzen Zahlen  $u$ , für die  $C(u)/B(u)$  ganzzahlige Werte annimmt. Außerdem gibt er Formeln für besondere Polynome  $B(z)$ , und zwar 1. für  $B(z) = z^2 + b_1 z + b_2$  mit  $\Delta = b_1^2 - 4b_2 \neq 0$  falls  $m \geq 4$ ,  $s=2$ ; 2. für  $B(z) = (z-b)^s$

falls  $s \leq \frac{m+3}{2}$ . H. D. Kloosterman.

**Haselgrove, C. B.:** A disproof of a conjecture of Pólya. Mathematika, London 5, 141—145 [1958].

Die Polyasche Vermutung: „ $L(x) = \sum_{n \leq x} \lambda_n$  ist negativ für alle  $x \geq 2^x$ “ wird konkret widerlegt durch maschinell ausgeführte numerische Berechnungen. Das ist möglich mit Hilfe gewisser Ungleichungen, die Ingham [Amer. J. Math. 64, 313—319 (1942)] unter Annahme der Riemannschen Vermutung und bei Einfachheit der Nullstellen  $\rho_n = \frac{1}{2} + i\gamma_n$  bewies, Annahmen, die sich aus der Polyasche Vermutung ergeben. Berechnungen von  $\zeta(2\rho_n)$  und  $\zeta'(\rho_n)$  zeigen dann, daß eine gewisse Funktion  $\varphi(n, T) > 0$  ist (für gewisse große  $n$  und geeignete  $T$ ), während  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n, T) \leq 0$  ist. G. Hoheisel.

**Keogh, F. R., B. Lawton and G. M. Petersen:** Well distributed sequences. Canadian J. Math. 10, 572—576 (1958).

Eine Folge  $\{s_k\}$  mit  $0 \leq s_k \leq 1$  ( $k=1, 2, \dots$ ) heiße wohlverteilt (well distributed), falls für beliebige  $a, b$  mit  $0 \leq a < b \leq 1$  gleichmäßig in  $n$  gilt:  $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{N_{n,p}}{p} = b - a$ ,

wo  $N_{n,p}$  die Anzahl der  $s_k$  mit  $n+1 \leq k \leq n+p$ ,  $a \leq s_k \leq b$  ist. Verf. beweisen: 1. Falls  $\{s_k\}$  wohlverteilt ist und  $\lim_{k \rightarrow \infty} (s_k - t_k) = 0$ , so ist auch

$\{t_k\}$  wohlverteilt. 2. Eine in  $(0, 1)$  überall dichte Folge kann derart umgeordnet werden, daß sie wohlverteilt wird. 3. Zu jeder irrationalen Zahl  $\theta$  gibt es eine Folge  $(n_k)$  von natürlichen Zahlen mit  $n_k/n_{k-1} > \lambda > 1$  derart daß die Folge der Zahlen  $\{n_k \theta\} = n_k \theta - [n_k \theta]$  wohlverteilt ist. 4. Es sei  $1 < a_1 < a_2 < \dots$  eine wachsende Folge von natürlichen Zahlen und

$$\theta = c_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{a_1 a_2 \dots a_i}$$



die Cantorsche Darstellung einer reellen Zahl  $\theta$  in bezug auf diese Folge, so daß die  $c_i$  ganze Zahlen sind und  $0 \leq c_i \leq a_i - 1$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). Dann ist die Folge  $\{a_1 a_2 \dots a_k \theta\}$  dann und nur dann wohlverteilt falls die Folge  $\{c_k/a_k\}$  wohlverteilt ist. 5. Falls  $p$  und  $q$  natürliche Zahlen sind, so ist die Folge  $\{(p/q)^k \theta\}$  für kein reelles  $\theta$  wohlverteilt.

H. D. Kloosterman.

**Polosuev, A. M.:** On a problem concerned with a uniform distribution of a system of functions. Doklady Akad. Nauk SSSR 122, 346—348 (1958) [Russisch].

Results by N. M. Korobov (this Zbl. 51, 286) may be generalized and lead to the following theorem. Let  $f_1(x), \dots, f_m(x)$  be integral-valued polynomials not identically zero, and let  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  be algebraic numbers  $> 1$  such that the absolute values of their conjugates are  $< 1$ . Positive numbers  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  are defined in terms of series such that the points  $(\alpha_1 \lambda_1^x f_1(x), \dots, \alpha_s \lambda_s^x f_s(x))$  are uniformly distributed (mod 1) in  $R^s$ .

K. Mahler.

**Starčenko, L. P.:** Über die Konstruktion von Folgen, die mit einer gegebenen gemeinsam normal sind. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 22, 757—770 (1958); Berichtigung. Ibid. 23, 635—636 (1959) [Russisch].

Let  $\varepsilon_1^{(k)}, \varepsilon_2^{(k)}, \varepsilon_3^{(k)}, \dots$  ( $1 \leq k \leq l$ ) be  $l$  sequences of signs  $0, 1, 2, \dots, g_k - 1$  ( $g_k \geq 2$ ). For each  $s$  and  $P$  form the matrices

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1^{(1)} & \dots & \varepsilon_s^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_1^{(l)} & \dots & \varepsilon_s^{(l)} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varepsilon_2^{(1)} & \dots & \varepsilon_{s+1}^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_2^{(l)} & \dots & \varepsilon_{s+1}^{(l)} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \varepsilon_P^{(1)} & \dots & \varepsilon_{P+s-1}^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_P^{(l)} & \dots & \varepsilon_{P+s-1}^{(l)} \end{bmatrix}.$$

and denote by  $N_P(\Delta_s)$  the number of times a given matrix

$$\Delta_s = \begin{bmatrix} \delta_1^{(1)} & \dots & \delta_s^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ \delta_1^{(l)} & \dots & \delta_s^{(l)} \end{bmatrix}$$

consisting of signs of the same kinds occurs among these. The given sequences are called jointly normal if, for every  $s$  and  $\Delta_s$ ,

$$\lim_{P \rightarrow \infty} P^{-1} N_P(\Delta_s) = (g_1 \dots g_l)^{-s}.$$

The following results are proved. (1) Let  $g = g_1 = g_2 = g_3 = \dots \geq 2$ , and let  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$  be a given normal sequence of signs  $0, 1, 2, \dots, g-1$ . One can construct infinitely many sequences  $\varepsilon_1^{(k)}, \varepsilon_2^{(k)}, \varepsilon_3^{(k)}, \dots$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) of signs  $0, 1, 2, \dots, g-1$  such that, for every  $l$ , the  $l$  sequences  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$  and  $\varepsilon_1^{(k)}, \varepsilon_2^{(k)}, \varepsilon_3^{(k)}, \dots$  ( $k = 1, 2, \dots, l-1$ ) are jointly normal. (2) Let the notation be as in (1) and let

$$\alpha_j = \varepsilon_j/g + \varepsilon_j^{(1)}/g^2 + \varepsilon_j^{(2)}/g^3 + \dots \quad (j = 1, 2, 3, \dots).$$

Then the sequence of points  $(\alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_{k+s-1})$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) in the unit cube of  $R^s$  is for every  $s$  uniformly distributed. Two further theorems obtained in §§ 3—4 of the paper are false as the author makes clear in the Correction.

K. Mahler.

**Świerczkowski, S.:** On successive settings of an arc on the circumference of a circle. Fundamenta Math. 46, 187—189 (1959).

Die Arbeit enthält den Beweis der folgenden von H. Steinhaus herrührenden Vermutung: Es sei  $C$  ein Kreis von Umfang 1,  $\alpha$  ein beliebiger Bogen,  $N$  eine beliebige natürliche Zahl. Man trage  $\alpha$   $N$ -mal auf die Peripherie von  $C$  auf; so wird  $C$  in  $N$  Bögen zerlegt. Dann gibt es unter diesen Bögen höchstens drei mit voneinander verschiedenen Längen. — Als Korollar wird folgende Oderfeldsche Vermutung bestätigt: ist  $\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ ,  $f_m$  die größte Fibonacciische Zahl, die  $N$  nicht übertritt, so sind die möglichen Werte der Bogenlängen  $\alpha^m, \alpha^{m-1}$  und  $\alpha^{m-2}$ .

P. Szűsz.

Šidlovskij, A. B.: Über ein Kriterium der algebraischen Unabhängigkeit der Werte einer Klasse ganzer Funktionen. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat.* **23**, 35—66 (1959) [Russisch].

A detailed proof of the following important theorem that had already earlier been announced by the author: Let  $y_1 = f_1(z), \dots, y_m = f_m(z)$  be  $m$   $E$ -functions (in the sense of Siegel) satisfying the system of linear differential equations

$$(1) \quad y'_k = Q_{k0}(z) + \sum_{i=1}^m Q_{ki}(z) y_i \quad (k = 1, 2, \dots, m),$$

where the  $Q$ 's are rational functions of  $z$ . Let  $\alpha \neq 0$  be an algebraic number distinct from the poles of these functions. Then the numbers  $f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)$  are algebraically independent over the rational number field if and only if the functions  $f_1(z), \dots, f_m(z)$  are algebraically independent over the rational function field.

— The proof follows to a great extent that of a weaker result by C. L. Siegel [Transcendental numbers (this Zbl. **39**, 44), chapter 2]. The important difference lies in a deep and general proof of the following lemma. Let the inhomogeneous parts  $Q_{k0}(z)$  in (1) be identically zero, and let  $y_1 = f_1(z), \dots, y_m = f_m(z)$  be a solution of (1) in power series that are linearly independent over the rational function field. Let  $P_{11}(z), \dots, P_{1m}(z)$  be polynomials of degrees  $\leq 2n-1$  such that

$R_1(z) = \sum_{k=1}^m P_{1k}(z) y_k$  is not identically zero and vanishes at  $z = 0$  at least to the order  $(2m-1)n$  if the  $y$ 's are replaced by the  $f$ 's. Denote by  $T(z)$  the least common denominator of the  $Q$ 's; further let  $R_k(z) = \sum_{i=1}^m P_{ki}(z) y_i$  be defined for  $k \geq 2$

by the identity  $R_k(z) = T(z) \frac{d}{dz} R_{k-1}(z)$  and the equations (1). Hence all expressions  $P_{ki}(z)$  are polynomials. Then the determinant  $|P_{ki}(z)|_{k,i=1,2,\dots,m}$  does not vanish identically if  $m$  is sufficiently large. K. Mahler.

Sierpiński, W.: Sur les ensembles de points aux distances rationnelles situés sur un cercle. *Elemente Math.* **14**, 25—27 (1959).

Gibt es auf einem Kreis mit Radius  $r$  drei verschiedene Punkte so, daß je zwei von ihnen einen rationalen Abstand haben, so ist  $r^2$  eine rationale Zahl. Verf. zeigt, daß umgekehrt auf einem Kreis mit rationalem  $r^2$  eine dichte Menge von Punkten existiert, von denen je zwei einen rationalen Abstand haben. E. Trost.

Pedersen, Peder: On the expansion of  $\pi$  in a regular continued fraction. *Nordisk mat. Tidsskrift* **6**, 57—68, 95 (1958).

The author continues the computation of the continued fraction expansion  $a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}$  for  $\pi$  up to  $a_{200}$ . He uses the step-by-step method of Lehmer (this Zbl. **18**, 292; **21**, 20) who computed the partial quotients up to  $a_{100}$ . The author also computes the approximants  $A_{n-1}/B_{n-1}$  and  $A_n/B_n$  at the end of each step, that is,  $A_{115}, B_{115}, A_{116}, B_{116}, A_{132}, B_{132}, A_{133}, B_{133}, \dots, A_{200}, B_{200}$ . Two different checks are made on the values of  $A_{200}, B_{200}$ . Finally, as Lehmer did (for  $n = 100$ ), the author obtains approximations to Khintchine's and Lévy's constants for  $n = 10, 20, \dots, \dots, 200$ . E. Frank.

## Analysis.

### Differentiation und Integration reeller Funktionen. Maßtheorie:

• Hartman, S. und J. Mikusiński: Maßtheorie und Lebesguesches Integral. Warschau: Państwowe Wydawnictwo Naukowe 1957. 140 S. zl. 10,— [Polnisch].

The book is a short account of the Lebesgue theory of integration. Chapter I contains the definition of fundamental set-theoretical notions. Chapter II is devoted to the Lebesgue measure of linear sets (the proof of the inequality  $|\bigcup A_n| \leq \sum |A_n|$  for open sets is rather strange and is based on the word "obviously" instead of the



analogous inequality for intervals which is never explicitly stated). Chapter III treats the definition and algebraic operations on measurable functions. The definite Lebesgue integral is examined in Chapter IV but only for functions defined on a set of finite measure (the theorem  $\lim \int f_n(x) dx = \int \lim f_n(x) dx$  for monotonic sequences is omitted; the possibility of integration on sets of infinite measure is scarcely mentioned). Chapter V contains the Riesz theorem on convergence in measure, the Egoroff theorem and the notion of uniform integrability. The theorem on differentiation of functions of bounded variation is the subject of Chapter VI. Chapter VII contains the fundamental theorem on absolutely continuous functions, the theorem on integration by parts (but a theorem on change of variables is not quoted) and the Lusin theorem. The proof of completeness of spaces  $L^p$  is given in Chapter VIII. The Bessel inequality and the Parseval equality are proved in Chapter IX which is a short exposition of orthogonal series. Chapters X and XI contain generalization of the measure and integration theory to the two-dimensional case, in particular the Fubini theorem. The last Chapter is devoted to the Riemann-Stieltjes integral (the Helly theorem  $\int f d\lim g_n = \lim \int f dg_n$  is quoted without proof). The book is a good introduction to the theory of integral. *R. Sikorski.*

**Albuquerque, J.:** Sur l'intégrale de Lebesgue dans l'espace produit. Une formule de réduction. Univ. Lisboa, Revista Fac. Ci., II. Ser. A 6, 319—326 (1957—1958).

The author considers the real function  $I(X) = \int_{C_1} f(XY) dL_2$  where  $C_1 \subset R_m$  and  $C_2 \subset R_n$  is Lebesgue measurable of finite measure and  $f(XY)$  is defined in  $C = C_1 \times C_2$ . The author studies some properties of continuity and of derivability of this integral among which we quote the following:  $I(X)$  is continuous in  $C_1$  if  $f(XY)$  is differentiable in  $C_1 \times C_2$ .  $I(X)$  has a directed derivative along any unit vector  $D$  in each interior point of  $C_1$  if  $f(XY)$  is differentiable in  $C = C_1 \times C_2$ . *L. J. Nicolescu.*

**Weston, J. D.:** A counter-example concerning Egoroff's theorem. J. London math. Soc. 34, 139—140 (1959).

Le théorème d'Egoroff affirme: „Si une suite de fonctions mesurables converge sur un ensemble borné et mesurable  $E$ , il existe un ensemble  $H \subset E$ , de mesure aussi proche que l'on veut de celle de  $E$  et tel que la convergence sur  $H$  soit uniforme“. Peut-on remplacer, dans ce théorème, la suite de fonctions par une famille dépendant continûment d'un paramètre ? On sait que la réponse est affirmative si les fonctions de la famille sont continues. L'A. montre que la réponse est négative si les fonctions sont seulement mesurables, en donnant, dans ce sens, un exemple simple et élégant. Remarque du rapporteur. Le résultat établi par l'A. n'est pas nouveau. C'est G. P. Tolstoff qui l'a établi pour la première fois (ce Zbl. 21, 15); il a montré que le théorème d'Egoroff reste valable pour une famille  $f(x, y)$  où  $f$  est une fonction borelienne mais devient faux si l'on exige seulement que  $f(x, y)$  soit mesurable (au sens de Lebesgue) par rapport à  $x$  pour  $y$  fixe et réciproquement. *S. Marcus.*

**Nakanishi, Shizu:** Sur la dérivation de l'intégrale (E. R.) indéfinie. I, II. Proc. Japan Acad. 34, 199—204, 257—262 (1958).

Mittels der Methode der rangierten Räume (espaces rangés, abgekürzt: E. R.) führte Kunugi (dies. Zbl. 70, 281), ausgehend von einem für die Treppenfunktionen in  $[a, b]$  definierten Elementarintegral, eine Integraldefinition ein, welche umfassender ist als die Lebesguesche Definition. Durch Hinzufügung weiterer Bedingungen läßt sich für dieses (E. R.)-Integral u. m. ableiten: die Stetigkeit des unbestimmten Integrals:  $(E. R.) - \int_a^x f dx$  in  $[a, b]$ , die Existenz von abzählbar vielen abgeschlossenen

Teilmengen  $(P_n)$  von  $[a, b]$ , auf deren jeder (E.R.)- $\int_a^x f dx$  von beschränkter Variation (im weiten Sinne) ist, und mit  $m\left\{[a, b] - \sum_{(n)} P_n\right\} = 0$ , die Existenz einer approximativen Ableitung von (E.R.)- $\int_a^x f dx$  gleich  $f(x)$  in fast allen Punkten  $(x)$  von  $[a, b]$ , die Totalstetigkeit (im weiten Sinne) des unbestimmten (E.R.)-Integrals auf den Mengen  $(P_n)$ , die Eigenschaft  $(N)$  von Lusin von (E.R.)- $\int_a^x f dx$  in  $[a, b]$ .

*J. Ridder.*

**Nakanishi, Shizu:** L'intégrale (E.R.) et la théorie des distributions. Proc. Japan Acad. 34, 565—570 (1958).

Certain properties of the (E.R.)-integrals defined by Kunugi (this Zbl. 70, 281) satisfying a special condition. If  $f$  is (E.R.)-integrable over  $[a, b]$  and if  $g$  is of finite variation, then  $fg$  is (E.R.)-integrable and the formula of integration by parts is valid. For every locally (E.R.)-integrable function, the function  $f(\varphi) = (\text{E.R.})-\int f(x)\varphi(x)dx$ ,  $\varphi \in \mathcal{D}$  is a distribution of order  $\leq 1$ . Every real distribution on the one-dimensional space may be represented as the limit of integrals of a fundamental sequence. No proofs.

*A. Alexiewicz.*

**Okano, Hatsuo:** (ER)-integral of Radon-Stieltjes type. Proc. Japan Acad. 34, 580—584 (1958).

The method of Kunugi (this Zbl. 70, 281) to define the (E.R.)-integral is extended to obtain a generalization of the Radon-Stieltjes integral. A theorem of Radon-Nikodym type is given, establishing conditions for a set-function to be an (E.R.)-integral of this type. No proofs.

*A. Alexiewicz.*

**Okano, Hatsuo:** Multiplication of (ER)-integrable functions. Proc. Japan Acad. 34, 585—586 (1958).

A theorem on integration by parts for a certain type of the (E.R.)-integrals is announced.

*A. Alexiewicz.*

**Ikegami, Teruo:** A note on the integration by the method of ranked spaces. Proc. Japan Acad. 34, 16—21 (1958).

Auf der lokal kompakten Gruppe  $G$  sei  $m$  ein Haarsches Maß,  $V$  eine kompakte Umgebung des Einheitselementes mit  $m(\bar{V} - V) = 0$ . Das Verfahren, welches in F. Riesz-B. Sz. Nagy, Leçons d'analyse fonctionnelle (dies. Zbl. 46, 331), §§ 16—20 u. 22, zu dem Lebesgueschen Integral für eine Teilklasse der auf  $[a, b]$  definierten Funktionen führt, liefert bei Anwendung auf  $V$ ,  $m$  die Klasse der auf  $V$  definierten und nach  $m$  im Lebesgue-Stieltjeschen Sinne integrierbaren Funktionen. Die Methode der (uniformen und) rangierten Räume von Kunugi (dies. Zbl. 70, 281, vgl. auch Nakanishi, dies. Zbl. 83, 274) läßt sich hier in ungeänderter Form anwenden zur Erweiterung der obigen Klasse der über  $V$  nach  $m$  integrierbaren Funktionen; Ausgangspunkt sind dabei Treppenfunktionen auf  $V$ , welche konstante Werte annehmen auf endlich vielen offenen Teilmengen  $(V_j)$  von  $V$ , mit  $m(\bar{V}_j - V_j) = 0$  und  $m\left[V - \sum_{(j)} V_j\right] = 0$ .

*J. Ridder.*

**Nakanishi, Shizu:** Sur le théorème de Fubini et les suites fondamentales. Proc. Japan Acad. 35, 161—166 (1959).

Auch in einem Intervall  $[a, b; c, d]$  der euklidischen Ebene gehört zu jeder Fundamentalfolge von Umgebungen  $u_n(f_n)$  von Treppenfunktionen  $(f_n)$  im zugehörigen uniformen und rangierten Raum (vgl. Kunugi, dies. Zbl. 70, 281, und Ikegami, vorstehendes Referat) eine fast überall existierende Grenzfunktion  $f(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x, y)$ ; dabei gibt es einen Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{[a, b; c, d]} f_n(x, y) dx dy$  für die elementaren Integrale der  $f_n$ . Hinzufügung einer ersten Bedingung ermöglicht



den Beweis folgender Eigenschaft: für fast alle  $y$ -Werte in  $[c, d]$  gibt es eine Fundamentalfolge  $[u_n^y]$  im Intervall  $[a, b]$  mit zugehöriger Grenzfunktion gleich  $f(x, y)$ , und mit dem durch  $[u_n^y]$  festgelegten (E.R.)-Integralwert  $g(y)$  von  $f(x, y)$  über  $[a, b]$  gleich  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x, y) dx$ ; auch gibt es dann in  $[c, d]$  eine Fundamentalfolge  $[v_n(g_n(y))]$  und einen durch diese Folge bestimmten (E.R.)-Integralwert für  $g(y)$  über  $[c, d]$  gleich  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a, b; c, d]} f_n(x, y) dx dy$ . Ersetzung der vorigen durch eine weiter reichende Bedingung ermöglicht folgende Verschärfung der vorangehenden Eigenschaft: für fast alle  $y$ -Werte in  $[c, d]$  existiert das Denjoy-Perronsche Integral  $\int_a^b f(x, y) dx$ ; dieses hat in  $[c, d]$  ein Denjoy-Perronsches Integral nach  $y$ ,

wobei 
$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a, b; c, d]} f_n(x, y) dx dy. \quad J. Ridder.$$

**McShane, E. J.:** A canonical form for antiderivatives. Illinois J. Math. 3, 334—351 (1959).

L'A. fornisce una tra le teorie possibili a fondamento dei problemi differenziali in più variabili e d'ordine superiore. Riportiamone il teorema fondamentale. Dati  $N$  insiemi finiti di numeri reali:  $(x_s^1, \dots, x_{p_1}^1), \dots, (x_1^N, \dots, x_{p_N}^N)$  detti „distinti“ se  $x_1^j, \dots, x_{p_j}^j$  sono tutti distinti, qualunque sia  $j$ . Detto  $R^N$  un intervallo  $N$ -dimensionale e  $F(x) = F(x^1, \dots, x^N)$  sia definita ivi, essa sarà detta  $AC^{(1, \dots, 1)}$  (dove gli indici superiori formano una  $n$ -pla di 1) se, è continua, ed esiste una funzione  $f(x)$  definita in  $R^N$ , sommabile su ogni intervallo di  $R^N$  e il cui integrale  $N$ -dimensionale tra due punti  $a = (a_j; j = 1, 2, \dots, N)$ ,  $b = (b_j; j = 1, 2, \dots, N)$ , qualunque, ma con  $a_j < b_j$ , fornisce l'incremento di  $F(x)$  tra  $a$  e  $b$ . Se  $p = p_1 + p_2 + \dots + p_N$ ,  $F$  sarà detta di classe  $AC^{(p-1)}$  se è di classe  $C^{(p-1)}$  mentre:

$$D^{(p-1)} F = \partial^{(p-N)} F / \partial x_1^{(p_1-1)} \partial x_2^{(p_2-1)} \dots \partial x_N^{(p_N-1)}$$

(dove se  $p_j - 1 = 0$  si intende non derivare rispetto a  $x_j$ ) risulta  $AC^{(1, \dots, 1)}$ . Supposta  $f(x)$  sommabile su ogni intervallo di  $R^N$ ,  $F$  si dirà soluzione  $AC^{(p-1)}$  dell'equazione  $D^p F(x) = f(x)$  se  $F$  è  $AC^{(p-1)}$  e  $D^{(p-1)} F$  è un integrale  $n$ -plo di  $f(x)$ . In queste condizioni vi è una ed una sola soluzione  $AC^{(p-1)}$  che si annulli sull'insieme di iperpiani:

$$x^1 = x_1^1, \dots, x^1 = x_{p_1}^1; \dots; x^N = x_{p_N}^N,$$

e questa soluzione può essere espressa dall'integrale:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} W(x^1, y^1; x_1^1, \dots, x_{p_1}^1) \dots \\ \dots W(x^N, y^N; x_1^N, \dots, x_{p_N}^N) f(y^1, \dots, y^N) dy^1 \dots dy^N,$$

dove  $W$  è un nucleo opportunamente definito. Applicazione è fatta alla ricerca delle soluzioni „deboli“ degli operatori differenziali lineari a coefficienti costanti. Vi è pure un'applicazione di teoremi preliminari al cosiddetto lemma fondamentale del Calcolo delle Variazioni. Il livello tecnico di questo lavoro è notevole, come è usuale per questo Autore.

*E. Baiada.*

**Marcus, S.:** Was ist die Länge einer Kurve. Gaz. Mat. Fiz., București, Ser. A 9 (62), 57—68 (1957) [Rumänisch].

**Pacioni, Goffredo:** Una proprietà delle funzioni reali con flessibilità monotona. Archimede 11, 168—172 (1959).

Sia  $\mathfrak{X}$  uno spazio metrico,  $x_0$  un fissato elemento di  $\mathfrak{X}$ ,  $|X|$  la distanza dell'aggregato  $X \in \mathfrak{X}$  da  $x_0$ . La funzione di aggregato  $u(X)$ , reale e a un sol valore, è detta dall'A. monotona non decrescente su  $\mathfrak{X}$  se per ogni coppia  $X_1$  e  $X_2$  di  $\mathfrak{X}$ , equivalenti,

per cui  $|X_2| \neq |X_1|$  si ha  $[u(X_2) - u(X_1)]/[|X_2| - |X_1|] \geq 0$ . È inteso che occorre anzitutto precisare, in qualche modo, l'equivalenza di due subaggregati di  $\mathfrak{X}$ . Se  $\mathfrak{X}$  è lo spazio reale euclideo  $S_n$  e  $E_n$  è un campo di  $S_n$ , se la  $u(P)$  è reale e differenziabile in un punto  $P_0 \in E_n$ , essa è detta puntualmente monotona non decrescente in  $P_0$  quando

$$\lim_{\substack{P \rightarrow P_0 \\ |P| \neq |P_0|}} \frac{u(P) - u(P_0)}{|P| - |P_0|} = \left\{ \frac{du(P)}{d|P|} \right\}_{P=P_0} \geq 0.$$

L'A. prova che (A) se  $T_n$  è il campo costituito dai punti interni a un settore  $n$ -sferico di  $S_n$ , ogni funzione reale  $u(P)$  differenziabile e puntualmente monotona dello stesso verso in tutti i punti di  $T_n$ , è monotona in quel verso su  $T_n$ . Dopo avere definito flessibilità totale di una funzione reale  $v(P)$  differenziabile in un campo la funzione  $n(P) = |P| d \log |v(P)| / d|P|$ , l'A., appoggiandosi sul teorema precedente dimostra il seguente Teorema (e anche il suo inverso): Sia  $v(P)$  una funzione reale di punto definita e mai nulla in un campo  $T_n$  di cui al teorema (A), vi differenziabile e con flessibilità totale monotona al crescere di  $|P|$  lungo i tratti di tutte le semirette di origine delle coordinate  $O$  contenuti in  $T_n$ . Per  $t$  reale,  $> 0$  e  $\neq 1$ , il rapporto  $v(tP)/v(P)$  (costante se  $v(P)$  è positivamente omogenea), al crescere consegue di  $|P|$ , ha su  $T_n^*$  (che indica il settore omotetico a  $T_n$  con parametro di omotetia  $1/t$ ) monotonia dello stesso verso di quella di  $n(P)$  se  $t > 1$  e diverso contrario se  $t < 1$ . L'A. fa vedere che l'inverso del precedente teorema si può ottenere senza passare attraverso il teorema (A).

L. Giuliano.

Barbenson, W.: Maxima et minima d'une fonction réelle de la variable complexe. *Mathesis* 67, 348—350 (1958).

L'A., dopo avere ricordato che il problema di determinare gli estremi del modulo, oppure della parte reale, oppure della parte immaginaria di una funzione complessa  $f(z)$  della variabile complessa  $z = x + iy$ , viene ricondotto quasi sempre alla classica analoga questione nel campo reale, dopo avere espresso le funzioni dette sotto forma di funzioni reali delle variabili reali  $x$  e  $y$ , fa vedere che la stessa teoria dei massimi e minimi del campo reale può stabilirsi direttamente nel campo complesso, senza che occorra ricondurre preliminarmente la questione al campo reale. Sia  $f(x, y)$  una funzione reale delle due variabili reali  $x$  e  $y$  e  $\bar{z}$  il coniugato di  $z$ . Essendo  $x = (z + \bar{z})/2$ ,  $y = (z - \bar{z})/2i$  si ha  $f(x, y) \equiv K(z, \bar{z})$ . L'A. dimostra che, supposto  $K(z, \bar{z})$  olomorfa rispetto a  $z$  e a  $\bar{z}$ , i suoi punti estremanti devono verificare l'equazione  $K'_z(z, \bar{z}) = 0$ . Detta  $z_1$  una soluzione di tale equazione, se è in  $z_1$ :  $|K''_{z, \bar{z}}| > |K''_{z, z}|$ , esso è un estremante e precisamente un massimo se è in  $z_1$ :  $K''_{z, \bar{z}} < 0$  op. un minimo se è in  $z_1$ :  $K''_{z, \bar{z}} > 0$ . Se è, in  $z_1$ ,  $|K''_{z, \bar{z}}| < |K''_{z, z}|$ , esso non è estremante. Se è, in  $z_1$ ,  $|K''_{z, \bar{z}}| = |K''_{z, z}|$ , si ha il cosiddetto caso dubbio.

L. Giuliano.

Marcus, S.: Sur une classe de fonctions définies par des inégalités, introduite par M. A. Császár. *Acta Sci. math.* 19, 192—218 (1958).

L'A. appelle fonction interne une fonction réelle  $f(x)$  définie dans un intervalle  $(a, b)$  et satisfaisant aux inégalités

$$(*) \quad \min(f(x), f(y)) \leq f\left(\frac{1}{2}(x + y)\right) \leq \max(f(x), f(y))$$

pour  $a < x < y < b$ , et il établit pour ces fonctions une série de propositions, dont quelques-unes constituent des généralisations des résultats du rapporteur (ce Zbl. 34, 326; 38, 202) concernant les fonctions appelées strictement internes par l'A. (c'est-à-dire internes et telles que l'inégalité des premier et dernier membres de  $(*)$  implique  $(*)$  avec les deux signes  $<$ ). Tandis que les fonctions monotones sont évidemment internes, les fonctions internes non monotones (dont l'A. énumère une série d'exemples) présentent des propriétés bien singulières. Les théorèmes suivants sont caractéristiques: Soit  $f(x)$  interne et non monotone dans  $(a, b)$ ; (1) si  $m$  et  $M$  sont les bornes inférieure et supérieure de  $f(x)$  pour  $a < x < b$ , les limites inférieures unilatérales de  $f$  sont égales à  $m$  et celles supérieures à  $M$  partout dans  $(a, b)$ ; (2) pour



$m < \alpha < \beta < M$  chacun des ensembles  $\{f < \alpha\}$ ,  $\{f \leq \alpha\}$ ,  $\{f > \beta\}$ ,  $\{f \geq \beta\}$  est de mesure extérieure complète sur tout ensemble mesurable  $E \subset (a, b)$  (c'est-à-dire p. ex.  $|E \cap \{f < \alpha\}| = |E|$ ), tandis que l'ensemble  $\{\alpha < f < \beta\}$  est de mesure intérieure nulle, et tout ensemble à propriété de Baire contenu dans l'un de ces cinq ensembles est de première catégorie; (3)  $f(x)$  n'admet aucun point de continuité approximative ou qualitative [pour cette notion, v. la note de l'A. dans Acad. Republ. popul. Romîne, Studii Cerc. mat. 7, 251—272 (1956)], par conséquent  $f(x)$  ne peut être mesurable sur aucun ensemble mesurable de mesure positive, ni jouir de la propriété de Baire sur un ensemble à propriété de Baire et de deuxième catégorie; (4)  $f(x)$  n'est symétriquement continue en aucun point. De plus, si l'on modifie la définition des fonctions strictement internes en remplaçant dans (\*)  $f(\frac{1}{2}(x+y))$  par  $f(px+qy)$ , où  $p > 0$ ,  $q > 0$ ,  $p+q=1$ , on parvient à la notion de fonction strictement interne de poids  $p, q$ , et le théorème (3) subsiste si  $f(x)$  est une fonction non monotone de cette sorte. L'A. présente encore des applications à certaines équations fonctionnelles. *A. Császár.*

Musta, Șt.: Inverse trigonometrische und logarithmische Funktionen, die dieselbe Ableitung haben. Gaz. Mat. Fiz., București, Ser. A 9 (62), 8—11 (1957) [Rumänisch].

### Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Plessis, N. du: Concerning the validity of finite difference operations. J. London math. Soc. 34, 208—214 (1959).

Als Hilfsmittel für die Legitimation formaler Operatorenmethoden beweist Verf. folgende Theoreme: 1. Die Menge  $A(h)$  aller im Intervall  $0 \leq t \leq h$  mit komplexen  $a_r$  erklärten Funktionen  $\Phi(t) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r t^r$  bildet mit der Norm  $\|\Phi\| = \sum_{r=0}^{\infty} |a_r| h^r$  im Falle  $\|\Phi\| < \infty$  einen komplexen vollständigen Banachraum. 2. Unter der Voraussetzung  $|\Delta^r u_0| < K h^r$  ( $0 < h < 1$ ;  $K$  = geeignete Konstante) läßt sich das zunächst für Potenzen definierte lineare Funktional  $f(t^r) = \Delta^r u_0$  übertragen auf alle  $\Phi \in A$ . Damit ist  $\Delta^n u_r = f[(1+t)^r t^n]$ ,  $u(z) = f[(1+t)^z]$  ist für alle  $z$  analytisch und es wird  $u^{(k)}(z) = f[(1+t)^z (\log(1+t))^k]$ . Das Funktional  $f$  definiert also Korrespondenzen wie  $\Delta \sim t$ ,  $E \sim 1+t$  oder  $D \sim \log(1+t)$  ( $E$  = Verschiebungsoperator;  $D$  = Differentialoperator). Damit begründet Verf. z. B. Newtons Interpolationsformel mit vorderen Differenzen, Everetts Interpolationsformel mit zentralen Differenzen sowie Quadraturformeln wie die Trapezregel, die Simpsonsche Regel und die Euler-Maclaurinsche Summationsformel. *G. Bertram.*

Uhlmann, Werner: Eine wahrscheinlichkeitstheoretische Begründung der Integrationsformeln von Newton-Cotes. Z. angew. Math. Phys. 10, 189—207 (1959).

L'A. se propose d'étudier les formules de quadrature approchées  $\sum_{i=-n}^n a_i x(ih)$  pour une intégrale  $\int_{-nh}^{nh} x(t) dt$ , qui rendent minimum la variance  $E \eta^2$  de l'erreur  $\eta$ , dans l'hypothèse que  $x(t)$  est une fonction aléatoire stationnaire, ayant une fonction de covariance  $R(\tau)$  de classe  $C_k$ ; dans le cas symétrique  $a_i = -a_{-i}$ , il montre que si  $k = 4n + 5$ , les  $a_i$  admettent un développement taylorien limité dont le premier terme non nul est de la forme  $\alpha_i h$ ,  $\alpha_i$  étant égal au terme correspondant de la formule de Newton-Cotes, qui apparaît ainsi comme donnant asymptotiquement pour  $h \rightarrow 0$  l'erreur de variance minimum. Cette variance peut s'exprimer à l'aide de la variance de différences d'un ordre approprié de la fonction  $x(t)$ . *Ch. Blanc.*

Tricomi, Francesco G.: Sul resto delle formule di quadratura numerica migliorate col metodo di „estrapolazione“. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 14, 102—104 (1959).

En appliquant la méthode connue de diviser l'intervalle d'intégration en  $n$  parties égales et puis en  $2n$  parties égales, l'A. obtient une expression élégante du reste en fonction de l'oscillation de la dérivée  $n$ -ième. Cette expression a peu d'intérêt pour le calcul numérique étant donné la difficulté pratique de borner cette oscillation.

A. de Castro.

● Salzer, Herbert E. and Genevieve M. Kimbro: **Tables for bivariate osculatory interpolation over a cartesian grid.** San Diego, Calif.: Convair-Astronautics 1958. I, 40 p.

Formulas are developed for binary polynomials  $P(x, y)$  which agree together with the partial derivatives  $P_x(x, y)$  and  $P_y(x, y)$  with  $f \equiv f(x, y)$ ,  $f_x \equiv f_x(x, y)$  and  $f_y \equiv f_y(x, y)$  at  $n$  specified points. They have the advantage over ordinary bivariate interpolation of packing  $3n$  conditions into  $n$  points. Unlike univariate polynomial osculatory interpolation which always possesses a solution for any irregular configuration of fixed points, a binary polynomial of prescribed form may not satisfy those  $3n$  conditions for any choice of interpolation points, or may fail for just certain special configurations. Explicit formulas or methods are developed for the general 2- to 5-point cases. For interpolation over any square Cartesian grid for suitable configurations of  $(x_i, y_i)$  coefficients are given at intervals of 0,1.

E. J. Nyström.

Spitzbart, A. and D. L. Shell: **A Chebycheff fitting criterion.** J. Assoc. comput. Machin. 5, 22—31 (1958).

Méthode pour approximer une fonction  $f(x)$  par des polynômes  $P_n(x)$  du degré  $n$ . La méthode exige que  $f(x)$  soit connue aux  $n + 2$  points:  $x_k = \sin^2 k\pi/2(n + 1)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n + 1$ . Les AA. donnent aussi des généralisations pour deux et trois variables.

A. de Castro.

Voronovskaja (Voronovskaya), E. V.: **On the closest uniform approximation of polynomials.** Doklady Akad. Nauk SSSR 114, 927—929 (1957) [Russisch].

L'A. considère la famille des polynômes de degré  $n$  pour lesquels  $|P(x)|$  atteint son maximum  $\|P\|$  sur  $[0, 1]$  en  $s$  points, avec alternance des signes pour  $P$ ; il en ramène l'étude à celle des polynômes de norme  $\|P\| = 1$  qui maximisent une fonctionnelle linéaire. Les démonstrations ne sont pas données.

G. Bourion.

Timan, A. F.: **Über die beste Approximation differenzierbarer Funktionen durch algebraische Polynome auf einem endlichen Intervall der reellen Achse.** Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 22, 355—360 (1958) [Russisch].

Es sei  $W_r$  die Klasse der in  $[-1, +1]$   $r$ -mal differenzierbaren Funktionen mit  $|f^{(r)}(x)| \leq 1$  ( $-1 \leq x \leq +1$ ). Es gibt für jedes  $f \in W_r$  eine Polynomfolge  $P_n(f; x)$  (Grad von  $P_n \leq n$ ), so daß für jedes  $x \in [-1, +1]$

$$\lim n^r |f(x) - P_n(f; x)| \leq K_r (1 - x^2)^{r/2} \quad \text{mit} \quad K_r = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu(r+1)}}{(2\nu+1)^{r+1}}$$

erfüllt ist. Dabei ist die Konstante  $K_r$  kleinstmöglich. Die Konstante  $K_r$  ist dieselbe, wie bei dem entsprechenden Problem für trigonometrische Approximation (J. Favard, dies. Zbl. 17, 251).

G. Freud.

Dzjadyk, V. K.: **Über die Approximation von Funktionen durch gewöhnliche Polynome auf einem endlichen Intervall der reellen Achse.** Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 22, 337—354 (1958) [Russisch].

Eine Funktion  $f(x)$  besitzt dann und nur dann in  $[a, b]$  eine glatte, bzw. quasiglatten  $r$ -te Derivierte, falls es eine Polynomfolge  $\{P_n(x) = a_n x^n + \dots\}$  gibt, so daß

$$n^{r+1} (\sqrt{(b-x)(x-a)} + n^{-1})^{-r-1} |f(x) - P_n(x)|$$

für  $n \rightarrow \infty$   $O(1)$  bzw.  $O(1)$  ist. (Eine Verallgemeinerung dieses Satzes steht in



der nachstehend besprochenen Arbeit des Verf.; vgl. auch Bemerkung des Ref. dazu). Im weiteren wird ein vereinfachter Beweis des Timanschen Approximationsatzes (dies. Zbl. 42, 71) angegeben. G. Freud.

**Dzjadyk (Dziadyk), V. K.:** A further strengthening of Jackson's theorem on the approximation of continuous functions by ordinary polynomials. Doklady Akad. Nauk SSSR 121, 403—406 (1958) [Russisch].

Es sei  $f(x)$  eine in  $[a, b]$   $r$ -mal stetig differenzierbare Funktion ( $r = 0, 1, \dots$ ) und

$$\omega_2^{(r)}(\delta; f) = \sup_{|x'' - x'| \leq \delta} \left| f(x') - 2f\left(\frac{x' + x''}{2}\right) + f(x'') \right|, \quad x', x'' \in [a, b];$$

dann gibt es eine Polynomfolge  $\{P_n(x)\}$ , Grad von  $P_n \leq n$ , mit

$$(*) \quad |f(x) - P_n(x)| \leq C(r, b-a)n^{-r} \left( \sqrt{(b-x)(x-a)} + n^{-1} \right)^r \cdot [\omega_2^{(r)}(n^{-1} \sqrt{(b-x)(x-a)}) + \omega_2^{(r)}(n^{-2})].$$

Aus einem früheren Resultat des Verf. (dies. Zbl. 72, 58) folgt, daß für  $\omega_2^{(r)}(\delta) = \delta^\alpha$  (\*) notwendig und hinreichend ist, was nur für  $\alpha < 1$  bekannt war. Bemerkung des Ref.: Dasselbe Resultat wurde gleichzeitig mit einem recht verschiedenen Beweis vom Ref. (dies. Zbl. 83, 289) publiziert. Es scheint vorteilhaft, daß Verf. mit einem singulären Integral mit Polynomkern arbeitet. Schranken für  $C(r, b-a)$  wären wünschenswert. G. Freud.

**Elimov, A. V.:** Die Approximation von Funktionen mit vorgegebenem Stetigkeitsmodul durch Fourier-Summen. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 23, 115—134 (1959) [Russisch].

Für eine stetige, nach  $2\pi$  periodische Funktion  $f(x)$  werden  $\omega_1(f; \delta) = \sup_{|h| \leq \delta} \max_x |f(x+h) - f(x)|$ ,  $\omega_2(f; \delta) = \sup_{|h| \leq \delta} \max_x |f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)|$  gesetzt. Es sei  $\omega_1(t)$  eine positive, im Punkte  $t = 0$  stetige Funktion, mit  $\omega_1(0) = 0$ ,  $0 \leq \omega_1(t) - \omega_1(t') \leq \omega_1(t - t')$  ( $0 \leq t' \leq t$ ), und es sei  $\omega_2(\delta) = \omega_2(g; \delta)$  mit einer stetigen, nach  $2\pi$  periodischen Funktion  $g(x)$ . Die folgenden Klassen stetiger, nach  $2\pi$  periodischen Funktionen werden definiert:  $f \in H_{\omega_i}^i$  bedeutet, daß  $\omega_i(f; \delta) \leq \omega_i(\delta)$  ( $\delta \geq 0$ ) besteht ( $i = 1, 2$ );  $f \in \tilde{H}_{\omega_i}^2$  bedeutet, daß  $\omega_2(f; \delta) \leq \omega_2(\delta)$  mit einer Funktion  $\omega_2(\delta)$  besteht, für die  $\omega_2(\lambda \delta) \leq (\lambda + 1) \omega_2(\delta)$  ( $\lambda > 0, \delta \geq 0$ ) gilt;  $\varphi \in \tilde{H}_{\omega_i}^2$  bedeutet, daß  $\varphi(x) = f(x) + ax + b$  mit gewissen Konstanten  $a, b$  und  $f \in H_{\omega_i}^2$  gilt. Es sei

$$C^{(n)}(\omega_i) = \sup_{f \in H_{\omega_i}^i} \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \right| \quad (i = 1, 2; n = 1, 2, \dots).$$

Die folgenden Sätze werden bewiesen. Ist  $f \in \tilde{H}_{\omega_i}^2$  und  $f(0) = f(d) = 0$ , so gilt  $f(x) = O[\log(2d/x) \cdot \omega_2(x)]$  im  $[0, d]$ . Ist  $f \in \tilde{H}_{\omega_i}^2$ , so gilt  $f(x) - s_n(f; x) = \frac{n}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{[n/2]-2} \frac{1}{k^2} \int_0^{\frac{2k\pi}{n}} \left[ f\left(x+z+\frac{\pi}{2n}\right) + f\left(x-z-\frac{\pi}{2n}\right) \right] \cos nz dz + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ , wo  $s_n(f; x)$  die  $n$ -te Partialsumme der Fourierreihe von  $f$  bedeutet. Es gelten die folgenden Abschätzungen:

$$E_{s_n}(H_{\omega_i}^2) = \sup_{f \in H_{\omega_i}^2} \max_x |f(x) - s_n(f; x)| \leq \frac{C^{(n)}(\omega_2)}{\pi} \log n + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

$$E_{s_n}(H_{\omega_i}^1) = C^{(n)}(\omega_1) \pi^{-1} \log n + O(\omega_1(n^{-1})). \quad K. Tandori.$$

**Teljakovskij (Telakovsky), S. A.:** Approximation of differentiable functions by de la Vallée Poussin's sums. Doklady Akad. Nauk SSSR 121, 426—429 (1958) [Russisch].

Bezeichne  $s_n(f; x)$  die  $n$ -te Partialsumme der Fourierreihe der stetigen, nach  $2\pi$  periodischen Funktion  $f(x)$ . Es sei

$$v_{n,m}(f; x) = \sum_{k=n-m}^{n-1} s_k(f; x) \quad (1 \leq m \leq n; n = 1, 2, \dots)$$

und 
$$V_{n,m}(\mathfrak{M}) = \sup_{f \in \mathfrak{M}} \|f(x) - v_{n,m}(f; x)\|_C.$$

Im Falle  $m/n \rightarrow \theta$  ( $0 \leq \theta \leq 1$ ) gibt Verf. genaue asymptotische Abschätzungen für  $V_{n,m}(W^r)$  und  $V_{n,m}(\bar{W}^r)$  ( $r = 1, 2, \dots$ ), wo  $W^r$  bzw.  $\bar{W}^r$  die Klasse der Funktionen  $f$  bezeichnet, für die  $f^{(r)} \in L$  bzw.  $\tilde{f}^{(r)} \in L$  gilt. ( $\tilde{f}$  die konjugierte Funktion von  $f$  bedeutet.) K. Tandori.

**Suñ, Jun-šen:** Über die beste Approximation periodischer differenzierbarer Funktionen durch trigonometrische Polynome. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat.* **23**, 67—92 (1959) [Russisch].

Sei  $W^{(r)}(r > 0)$  die Klasse der stetigen,  $2\pi$ -periodischen Funktionen  $f(x)$ , die eine Weylsche Derivierte von der Ordnung  $r$  mit  $|f^{(r)}(x)| \leq 1$  besitzen; die zu diesen Funktionen  $f(x)$  konjugierten Funktionen bilden die Klasse  $\tilde{W}^{(r)}$ . Allgemeiner, sei  $W^{(r)}(\alpha)$  ( $r > 0, \alpha$  beliebig reell) die Klasse aller stetigen,  $2\pi$ -periodischen Funktionen  $f(x)$ , die eine Darstellung

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K(t-x) \varphi(t) dt$$

mit 
$$K(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r} \cos\left(kt - \frac{\pi\alpha}{2}\right), \quad |\varphi(t)| \leq 1, \quad \int_0^{2\pi} \varphi(t) dt = 0$$

gestatten; man hat  $W^{(r)} = W^{(r)}(r)$ ,  $\tilde{W}^{(r)} = W^{(r)}(1+r)$ . Sei  $\mathcal{E}_n(W^{(r)}(\alpha)) = \sup_{f \in W^{(r)}(\alpha)} E_n(f)$ , wobei  $E_n(f)$  die Genauigkeit der besten gleichmäßigen Annäherung von  $f(x)$  durch trigonometrische Polynome  $(n-1)$ -ter Ordnung bedeutet.

Für ganzzahlige  $r$  haben den Wert von  $\mathcal{E}_n(W^{(r)})$  und  $\mathcal{E}_n(\tilde{W}^{(r)})$  Favard (dies. Zbl. **16**, 59; **17**, 251), Achiezer und Krejn (dies. Zbl. **16**, 300) bestimmt; für beliebige  $r > 0$  und  $\alpha$  hat Sz.-Nagy (dies. Zbl. **21**, 401) bewiesen, daß

$$\mathcal{E}_n(W^{(r)}(\alpha)) \leq \frac{4}{\pi n^r} \left[ \cos \frac{\pi\alpha}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu+1)^{r+1}} + \left| \sin \frac{\pi\alpha}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)^{r+1}} \right| \right]$$

(für ganzzahlige  $r, \alpha$  besteht hier das Gleichheitszeichen). Später hat Džjadýk (dies. Zbl. **50**, 71) den exakten Wert von  $\mathcal{E}_n(W^{(r)})$  für  $0 < r < 1$  und Stečkin (dies. Zbl. **71**, 283) denjenigen von  $\mathcal{E}_n(W^{(r)}(\alpha))$  für  $0 < r \leq \alpha \leq 2-r$  bestimmt. — Im vorliegenden Aufsatz wird der exakte Wert von  $\mathcal{E}_n(W^{(r)}(\alpha))$  für  $r \geq 6$  und beliebiges  $\alpha$  bestimmt, und zwar ist

$$\mathcal{E}_n(W^{(r)}(\alpha)) = \frac{4}{\pi n^r} \left| \cos \frac{\pi\alpha}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin(2\nu+1)\beta\pi}{(2\nu+1)^{r+1}} - \sin \frac{\pi\alpha}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos(2\nu+1)\beta\pi}{(2\nu+1)^{r+1}} \right|,$$

wobei  $\beta$  die im Intervall  $0 \leq \beta < 1$  liegende (einzige) Lösung der Gleichung

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos[(2\nu+1)\beta\pi - \frac{1}{2}\pi\alpha]}{(2\nu+1)^r} = 0$$

bedeutet. — Der feine Überlegungen beanspruchende, ziemlich mühsame Beweis benutzt hauptsächlich die Methode von Džjadýk. B. Sz.-Nagy.

**Meňšov, D. E.:** Über die Grenzfunktionen einer trigonometrischen Reihe. *Trudy Moskovsk. mat. Obšč.* **7**, 291—334 (1958) [Russisch].

Es seien  $u_n(x)$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) in  $[a, b]$  meßbare, fast überall endliche Funktionen. Die  $n$ -te Partialsumme der Reihe (\*)  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$  wird mit  $Q_n(x)$  bezeichnet.



Im folgenden bezeichnen  $E, E_1, E_2, \dots, E_\alpha$  meßbare Untermengen von  $[a, b]$  mit positivem Maß;  $\varphi(x, E)$  bedeutet eine Funktion, die in  $E$  fast überall definiert ist. Die Funktion  $\varphi(x, E)$  wird die Grenzfunktion der Reihe (\*) genannt, wenn es eine Indexfolge  $n_1 < \dots < n_k < \dots$  gibt, derart, daß  $Q_{n_k}(x) \rightarrow \varphi(x, E)$  in  $E$  fast überall gilt. Es sei  $\text{mes}(\lim E_n) > 0$  und  $\text{mes}(E - \lim E_n) = 0$ ;  $\varphi(x, E)$  wird das Grenzelement im weiteren Sinne der Folge  $\{\varphi_n(x, E_n)\}$  genannt, wenn  $\varphi_n(x, E_n) \rightarrow \varphi(x, E)$  in  $E$  fast überall gilt. Es sei  $M = \{\varphi_\alpha(x, E_\alpha)\}$  eine Funktionenmenge;  $\varphi(x, E)$  wird das Grenzelement im weiteren Sinne von  $M$  genannt, wenn es eine Folge  $\varphi_n(x, E_n)$  aus  $M$  gibt, für die  $\varphi(x, E)$  das Grenzelement im weiteren Sinne ist. Es sei  $M'$  die Menge aller Grenzelemente im weiteren Sinne von  $M$ , und es sei  $\bar{M} = M \cup M'$ .  $M$  wird abgeschlossen im strengen Sinne genannt, wenn  $M = \bar{M}$  ist. Verf. beweist die folgenden Sätze. I. Es sei  $G(x)$ , bzw.  $F(x)$  die untere, bzw. die obere Grenze im Maß der Reihe (\*). Die Menge  $M$  aller Grenzfunktionen der Reihe (\*) hat die folgenden Eigenschaften: ( $\alpha$ )  $M$  ist abgeschlossen im strengen Sinne; ( $\beta$ ) ist  $\varphi(x, E) \in M$ , so ist  $\varphi(x, E)$  in  $E$  meßbar, und es gilt  $G(x) \leq \varphi(x, E) \leq F(x)$  fast überall in  $E$ ; ( $\gamma$ ) ist  $\varphi(x, E) \in M$  und  $E_0 = E \cup_x E [F(x) = G(x)]$ , so gehört die Funktion

$$\varphi_0(x, E_0) = \varphi(x, E) \text{ für } x \in E, \quad = F(x) \text{ für } x \in E_0 - E$$

zu  $M$ . II. Es sei  $[a, b] = [-\pi, \pi]$ ,  $M = \{\varphi_\alpha(x, E_\alpha)\}$  eine nichtleere Funktionenmenge, und es seien weiterhin  $F(x), G(x)$  im  $[-\pi, \pi]$  fast überall definierte, meßbare Funktionen, mit  $G(x) \leq F(x)$  (fast überall im  $[-\pi, \pi]$ ). Erfüllt  $M$  die Bedingungen ( $\alpha$ )—( $\gamma$ ), so gibt es eine trigonometrische Reihe

$$(**) \quad \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

mit folgenden Eigenschaften: (A)  $M$  ist die Menge aller Grenzfunktionen von (\*\*); (B)  $G(x)$ , bzw.  $F(x)$  ist die untere, bzw. obere Grenze im Maß der Reihe (\*\*); (C)  $a_n \rightarrow 0, b_n \rightarrow 0$ . Aus diesen Sätzen folgt: Es sei  $[a, b] = [-\pi, \pi]$  und  $M = \{\varphi_\alpha(x, E_\alpha)\}$  [ $\varphi_\alpha(x, E_\alpha)$  ist meßbar in  $E_\alpha$ ].  $M$  ist die Menge aller Grenzfunktionen der Reihe (\*\*) dann und nur dann, wenn  $M$  abgeschlossen im strengen Sinne ist.

K. Tandori.

**Temko, K. V.:** Über die absolute Konvergenz trigonometrischer Reihen. Mat. Sbornik, n. Ser. **43** (85), 401—408 (1958) [Russisch].

Verf. verallgemeinert die Sätze von O. Frostman (dies. Zbl. 13, 63) und S. Yano (dies. Zbl. 41, 193). Es sei  $\{\lambda_n\}$  eine positive, monoton nach 0 konvergierende, konvexe Folge mit  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty$ , und es sei

$$Q(x, r) = \frac{\lambda_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \lambda_n \cos nx \quad (0 < r < 1).$$

Die Menge  $B$  hat positive konvexe  $\lambda$ -Kapazität, wenn es ein in  $B$  konzentriertes Maß  $\mu$  gibt, so daß

$$\int_B Q(x - y, r) d\mu(y) = O(1) \quad (\text{für } r \rightarrow 1 - 0)$$

gleichmäßig besteht. I. Die Borelsche Menge  $B$  hat positive konvexe Kapazität dann und nur dann, wenn es ein in  $B$  konzentriertes Maß  $\mu$  gibt, so daß die Reihe

$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx) \lambda_n$  die Fourierreihe einer beschränkten Funktion ist, wo  $\alpha_n, \beta_n$  die Fourier-Stieltjes Koeffizienten von  $\mu$  bedeuten. II. Sind  $B_n (n = 1, 2, \dots)$  Borelsche Mengen, deren konvexe  $\lambda$ -Kapazitäten gleich 0 sind, dann ist die konvexe  $\lambda$ -Kapazität der Summe  $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$  auch gleich 0. III. Hat die Menge  $B$  positive konvexe  $\lambda$ -Kapazität, dann gibt es ein in  $B$  konzentriertes Maß  $\mu$ , so daß

$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \lambda_n < \infty$  gilt. IV. Ist  $(0 \leq) \varrho_n = O\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}\right)$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n = \infty$ , dann kann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \varrho_k |\cos(nx + \omega_n)| \right) \left( \sum_{k=1}^n \varrho_k \right)^{-1} = \frac{2}{\pi}$$

nur in einer Menge gelten, deren konvexe  $\lambda$ -Kapazität 0 ist. *K. Tandori.*

Ulj'janov, P. L.: Über die unbedingte Konvergenz und Summierbarkeit. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **22**, 811—840 (1958) [Russisch].

Einige Sätze dieser Arbeit sind Verallgemeinerungen von Sätzen einer vorhergehenden Arbeit des Verf. (dies. Zbl. **82**, 279). Mit  $T^*$  wird ein mit einer Matrix  $\|a_{nm}\|$  ( $n, m = 0, 1, \dots$ ) gegebenes Summationsverfahren bezeichnet, für die die Bedingungen  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nm} = 0$  ( $m = 0, 1, \dots$ ),  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} = 1$  erfüllt sind. Die

$n$ -te  $T^*$ -Summe  $\sigma_n$  der Reihe  $(*) \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu}$  ( $s_m = c_0 + \dots + c_m$ ) wird folgendermaßen definiert:

$$\sigma_n = \sum_{m=0}^{\infty} s_m a_{mn}, \text{ wenn diese Reihe konvergiert, } = \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left| \sum_{m=0}^N s_m a_{mn} \right| \text{ sonst.}$$

Die Reihe  $(*)$  wird  $T^*$ -summierbar zu  $\sigma$  genannt, wenn  $\sigma_n \rightarrow \sigma$  gilt. Z. B. werden die folgenden Sätze bewiesen. I. Es sei  $T^* = \|a_{nm}\|$ . Hat die trigonometrische

Reihe  $(**) \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$  die Eigenschaft, daß es für jede Umordnung von  $(**)$  eine Konstante  $A > 0$  und eine Menge  $E$  ( $\text{mes } E > 0$ ) gibt (diese hängen von der Umordnung ab), derart, daß

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left| \sum_{m=0}^N A_m(x) a_{nm} \right| \leq A < \infty \quad (\text{für } x \in E, N \geq N_0)$$

mit  $A_m(x) = s_m(x)$  oder  $A_m(x) = \tilde{s}_m(x)$  gilt, wo  $s_m(x)$ , bzw.  $\tilde{s}_m(x)$  die  $m$ -te Partialsumme der umgeordneten Reihe, bzw. die  $m$ -te Partialsumme der umgeordneten konjugierten Reihe bezeichnet, dann ist die Reihe  $(**)$  die Fourierreihe einer Funktion  $F(x) \in L^2$ ,  $F \notin L^p$  ( $p > 2$ ). II. Gibt es eine Indexfolge  $\{n_i\}$  mit  $\sum_{i=1}^{\infty} (a_{n_i}^2 + b_{n_i}^2) = \infty$ ,

für die die Anzahl der Lösungen der Gleichung  $n = \pm n_i \pm n_j$  ( $n > 0$ ) unter einer Konstante bleibt, dann kann die Reihe  $(**)$  für jedes  $T^*$  derart umgeordnet werden, daß die  $T^*$ -Summen der umgeordneten Reihe fast überall unbeschränkt sind und jede Teilfolge der Partialsummen der umgeordneten Reihe fast überall divergiert. Die umgeordnete konjugierte Reihe hat dieselben Eigenschaften. III. Ist die Reihe  $(**)$  bei jeder Umordnung in  $E$  ( $\text{mes } E > 0$ ) fast überall  $T^*$ -summierbar, dann ist die Reihe  $(**)$  in jeder Umordnung in  $E$  fast überall konvergent, und es gilt  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) < \infty$ . IV. Es gibt eine Funktion

$F(x) \in L^p$  (für jedes  $p > 0$ ) mit folgender Eigenschaft. Für jedes  $T^*$  kann die Fourierreihe von  $F(x)$  derart umgeordnet werden, daß die umgeordnete Reihe fast überall nicht  $T^*$ -summierbar ist. V. Ist die Orthogonalreihe  $(***) \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$

mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n| = 0$  in einer Untermenge  $E$  ( $\text{mes } E > 0$ ) des Grundintervalls

$[a, b]$  divergent, dann kann die Reihe für jedes  $T^*$  derart umgeordnet werden, daß die umgeordnete Reihe in  $E$  fast überall nicht  $T^*$ -summierbar ist. VI. Ist die Orthogonalreihe  $(***)$  in jeder Umordnung in  $E$  ( $\text{mes } E > 0$ ) fast überall  $T^*$ -

summierbar und bestehen  $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n| = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_H \varphi_n^2(x) dx > 0$  für jedes  $H \subseteq E$  ( $\text{mes } H > 0$ ), so ist die Reihe  $(***)$  in jeder Umordnung in  $E$  fast überall konver-

gent und es gilt  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$ .

*K. Tandori.*



Stein, Elias M.: Localization and summability of multiple Fourier series. *Acta math.* 100, 93—147 (1958).

This paper contains several interesting results on the spherical summability of multiple Fourier series. It is an appropriate adjunct to the fundamental paper by S. Bochner (this *Zbl.* 15, 157) and settles some of the problems that have remained open since, an account of which has been given, for instance, by the reviewer (this *Zbl.* 74, 54). Let  $f(x) \equiv f(x_1, \dots, x_k)$  be a Lebesgue integrable function defined in the fundamental cube  $Q_k$ :  $-\pi < x_i \leq \pi$ ,  $i = 1, \dots, k$  in Euclidean  $k$ -space. Let us write the Fourier series of  $f$  as usual:

$$f(x) \sim \sum a_n e^{in \cdot x},$$

where  $n = (n_1, \dots, n_k)$ ,  $n_i$  is integral, and  $n \cdot x = n_1 x_1 + \dots + n_k x_k$ . Let the spherical Riesz mean of order  $\delta$  of the multiple Fourier series of  $f$  at the point  $x$  be denoted by

$$S_R^\delta(x) \equiv S_R^\delta(x, f) = \sum_{|n| < R} \left(1 - \frac{|n|^2}{R^2}\right)^\delta a_n e^{in \cdot x},$$

where  $|n| = (n_1^2 + \dots + n_k^2)^{1/2}$ . Then Bochner has proved (loc. cit.) that for functions  $f \in L_1(Q_k)$ , we have

$$(1) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} S_R^\delta(x, f) = f(x)$$

at every point of continuity of  $f$ , provided that  $\delta > \frac{1}{2}(k-1)$ ; and, more generally, that the validity of (1) at a given point  $x$  depends, for  $\delta > \frac{1}{2}(k-1)$ , only on the "local" behaviour of the function  $f$ , i. e. on the values of  $f$  in any neighbourhood of the point  $x$ . This is not in general true for values of  $\delta$  less than or equal to  $\frac{1}{2}(k-1)$ . In fact, Bochner has shown that for  $k \geq 2$  there exists an  $f \in L_1(Q_k)$  which vanishes in a neighbourhood of the origin for which  $\limsup_{R \rightarrow \infty} S_R^\alpha(0, f) = +\infty$ , where  $\alpha = \frac{1}{2}(k-1)$ . For this reason  $\alpha$  is termed the

"critical exponent". If, on the other hand, one restricts oneself to functions  $f \in L_2(Q_k)$ , then, by another result of Bochner's, the validity of (1) for the critical exponent  $\delta = \alpha$  again depends only on the local behaviour of  $f$ . It has remained an open question whether localization holds for the critical exponent  $\delta = \alpha$  in the case of functions belonging to  $L_p(Q_k)$ ,  $1 < p < 2$ . The author answers this in the affirmative for the class of functions  $f$  for which  $\int_{Q_k} |f(x)| \log^+ |f(x)| dx < \infty$

which includes every  $L_p(Q_k)$  class for  $p > 1$ . He also obtains a series of interesting results on the validity of (1) for almost every  $x$ , and on associated problems connected with dominated summability. He proves that if  $f(x) \in L^p(Q_k)$ ,  $p > 1$ , then (1) holds almost everywhere for some  $\delta$  below the critical exponent, in fact for  $\delta > \alpha(2/p-1)$ , so that the notion of critical exponent turns out to be significant only for point-wise summability. A companion theorem is that if

$$\int_{Q_k} |f(x)| (\log^+ |f(x)|)^2 dx < \infty,$$

then (1) holds for  $\delta = \alpha$  almost everywhere. With the notation

$$S_{*,\delta}^\delta = S_{*,\delta}^\delta(x, f) = \sup_{0 < R < \infty} |S_R^\delta(x, f)|,$$

the author proves the inequality

$$(2) \quad \|S_{*,\delta}^\delta(x, f)\|_p \leq A_{p,\delta} \|f(x)\|_p \text{ for } f \in L_p(Q_k), \quad 1 < p \leq 2, \text{ and } \delta > \alpha(2/p-1).$$

This is a generalization to several variables of an inequality of Hardy and Little-

wood, and yields a result on norm convergence, namely

$$(3) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \|S_R^\delta(x, f) - f(x)\|_p = 0, \quad \delta > \alpha(2/p - 1).$$

Companion theorems to (2) and (3) are:

$$(2') \quad \int_{Q_k} S_*^\alpha(x, f) dx \leq A \int_{Q_k} |f(x)| (\log^+ |f(x)|)^2 dx + B, \quad \text{and}$$

$$(3') \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{Q_k} |S_R^\alpha(x, f) - f(x)| dx = 0 \quad \text{if} \quad \int_{Q_k} |f(x)| \log^+ |f(x)| dx < \infty.$$

On strong summability the author first proves that if  $f \in L_p(Q_k)$ ,  $1 < p \leq 2$ , then

$$(4) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_0^R |S_u^\delta(x, f) - f(x)|^2 du = 0$$

for almost every  $x$ , if  $\delta > \alpha(2/p - 1) - 1/p'$ ,  $1/p + 1/p' = 1$ , a result not included in (3). Of particular interest is his result that if  $f \in L_1(Q_k)$ , then (4) holds almost everywhere for the critical exponent  $\delta = \alpha$ , which generalizes to several variables an important theorem of Marcinkiewicz (this Zbl. 21, 402). The novelty of the author's method consists in a skilful application of an interpolation theorem for an analytic family of operators due to himself (this Zbl. 72, 324). The definition of  $S_R^\delta$  is extended to complex  $\delta$  so as to make it an analytic function in  $\delta$  (such an extension in itself is not new, cf. S. Bochner and K. Chandrasekharan, this Zbl. 54, 47), and a suitable strip  $a \leq \operatorname{Re} \delta \leq b$  is then considered. The line  $\operatorname{Re} \delta = a$  is made to correspond to an  $L_2$  result which can be deduced by using the Parseval relation, while the line  $\operatorname{Re} \delta = b$  is made to correspond to an  $L_1$  result which can be obtained by a direct estimate. The author's interpolation theorem then furnishes an argument of the Phragmen-Lindelöf type, which enables one to obtain  $L_p$  results on the intermediate lines  $\operatorname{Re} \delta = c$ ,  $a < c < b$ . From the  $L_p$  results the author obtains results "near  $L_1$ " by delicate limiting arguments. *K. Chandrasekharan.*

**Ibragimov, I. I.:** Extremum problems in the class of trigonometric polynomials. Doklady Akad. Nauk SSSR 121, 415—417 (1958) [Russisch].

Es seien

$$T_{n_1, \dots, n_k}(x_1, \dots, x_k) = \sum_{v_1 = -n_1}^{n_1} \dots \sum_{v_k = -n_k}^{n_k} C_{v_1, \dots, v_k} e^{i v_1 x_1 + \dots + i v_k x_k}$$

$$\text{und} \quad \|T_{n_1, \dots, n_k}\|_p = \left( \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} |T_{n_1, \dots, n_k}(x_1, \dots, x_k)|^p dx_1 \dots dx_k \right)^{1/p} \quad (p \geq 1).$$

I. Ist  $\kappa(x_1, \dots, x_k)$  integrierbar für  $\mathfrak{G} = (0 \leq x_j \leq 2\pi, j = 1, \dots, k)$  mit Fourierkoeffizienten  $b_{v_1, \dots, v_k}$ , so gilt

$$\left| \frac{1}{(2\pi)^k} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} T_{n_1, \dots, n_k}(t_1, \dots, t_k) \kappa(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k \right| \leq \\ \leq (2\pi)^{-k/p} \|T_{n_1, \dots, n_k}\|_p \left( \sum_{v_1 = -n_1}^{n_1} \dots \sum_{v_k = -n_k}^{n_k} |b_{v_1, \dots, v_k}|^p \right)^{1/p} \quad (1 \leq p \leq 2).$$

II. Für  $1 \leq p \leq 2$ ,  $p' \geq p$  gilt

$$\|T_{n_1, \dots, n_k}\|_{p'} \leq \left( \prod_{j=1}^k \frac{2n_j + 1}{2\pi} \right)^{1/p - 1/p'} \|T_{n_1, \dots, n_k}\|_p.$$

(Verschärfung einer Ungleichung von S. M. Nikol'skij, dies. Zbl. 49, 323.) Es gibt noch einige Abschätzungen über Polynome mehrerer Variablen. *K. Tandori.*

• **Byerly, William Elwood:** An elementary treatise on Fourier's series and spherical, cylindrical, and ellipsoidal harmonics, with applications to problems in mathematical physics. Unabridged and unaltered republ. of the last ed. New York: Dover Publications, Inc. 1959. IX, 287 p. \$ 1,75.

Vgl. die s. z. Besprechung im J.-Buch Fortschr. Math. 25 (1893—94), 815.



**Talaljan, A. A.:** Über universelle Orthogonalreihen. Akad. Nauk Armjan. SSR, Izvestija, Ser. fiz.-mat. Nauk **12**, Nr. 1, 27—42 (1959) [Russisch].

Es sei  $\{\varphi_n(x)\}$  ein im Intervall  $(a, b)$  orthonormiertes, vollständiges Funktionensystem. Sind  $F_1(x), F_2(x)$  beliebige, meßbare, fast überall definierte Funktionen mit  $F_1(x) \leq F_2(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ), dann gibt es eine Orthogonalreihe (\*)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$  mit folgenden Eigenschaften:  $a_n \rightarrow 0$ ;  $F_1(x)$  bzw.  $F_2(x)$  ist die untere, bzw. obere Grenze im Maß der Reihe (\*), und für jede meßbare, fast überall definierte Funktion  $f(x)$  mit  $F_1(x) \leq f(x) \leq F_2(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) gibt es eine Indexfolge  $n_1 < \dots < n_i < \dots$ , derart, daß  $s_{n_i}(x) \rightarrow f(x)$  fast überall in  $(a, b)$  besteht, wo  $s_n(x)$  die  $n$ -te Partialsumme der Reihe (\*) bezeichnet. Für trigonometrische Reihen hat diesen Satz D. E. Meňšov bewiesen (dies. Zbl. **39**, 70). *K. Tandori*.

**Alexits, G.:** Über die Konvergenz fast überall der Orthogonalreihen bei jeder Anordnung ihrer Glieder. Acta Sci. math. **19**, 158—161 (1958).

Es sei  $\{\varphi_n(x)\}$  ein orthonormiertes Funktionensystem im Grundintervall  $[a, b]$ , und es sei  $\{c_n\}$  eine reelle Zahlenfolge. Verf. verallgemeinert einen bekannten Satz von D. E. Meňšov [Fundamenta Math. **10**, 375—420 (1927)]. Es sei  $\{|c_{n_m}|\}$  die in monoton abnehmende Anordnung gestellte Folge der nichtverschwindenden  $|c_n|$ . Ist

$$(*) \quad \alpha_m \geq (4 + \varepsilon) \log \log m / \log m \quad (\varepsilon > 0, m \geq m_0),$$

so folgt aus (\*\*)  $\sum_{m=1}^{\infty} |c_{n_m}|^{2 - \alpha_m} < \infty$  die Konvergenz fast überall der Orthogonalreihe  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$  bei jeder Anordnung ihrer Glieder. Die Bedingung (\*) kann nicht verschärft werden. Ist nämlich für ein  $\varepsilon > 0$

$$\alpha_m \leq (4 - \varepsilon) \log \log m / \log m \quad (m \geq m_0),$$

so gibt es ein orthonormiertes System  $\{\Phi_n(x)\}$  und eine Koeffizientenfolge  $\{c_n\}$ , derart, daß die Bedingung (\*\*) besteht und die Orthogonalreihe  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \Phi_n(x)$  im Grundintervall überall divergiert. *K. Tandori*.

**Alexits, Georges:** Une contribution à la théorie constructive des fonctions. Acta Sci. math. **19**, 149—157 (1958).

Es sei  $\{p_n(x)\}$  im endlichen Intervall  $(a, b)$  ein zur nichtnegativen, integrierbaren Gewichtsfunktion  $w(x)$  orthonormiertes Polynomsystem ( $p_n(x)$  ist ein Polynom genau  $n$ -ten Grades, mit positivem Hauptkoeffizienten). Es sei  $f(x) \in L_w^2(a, b)$ . I. Ist

$$w(x) \leq M \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^n p_k^2(x) \leq A n \quad (x \in (c, d) \subseteq (a, b))$$

und gehört  $f(x)$  zu  $\text{Lip } \alpha$  ( $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ ) in  $I_1^+(c, d)$ , dann gilt

$$(*) \quad \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^n |s_{\nu}(x) - f(x)| \leq \frac{C(\delta)}{n^{\alpha}} \quad (c + \delta \leq x \leq d - \delta)$$

für jedes  $\delta > 0$ , wo  $C(\delta)$  eine nur von  $\delta$  abhängige, positive Konstante und  $s_{\nu}(x)$  die  $\nu$ -te Partialsumme der Entwicklung von  $f(x)$  nach dem System  $\{p_n(x)\}$  bedeutet.

II. Besteht  $0 < m \leq w(x) \leq M$  ( $x \in (c, d)$ ), dann ist (\*) notwendig und hinreichend dafür, daß  $f(x)$  in jedem  $(c + \delta, d - \delta)$  ( $\delta > 0$ ) zu  $\text{Lip } \alpha$  ( $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ ) gehört. Verf. verallgemeinert den Satz I auch für quasipolynomiale Systeme. Das System  $\{\varphi_n(x)\}$  wird quasipolynomial in  $(a, b)$  genannt, wenn die  $\varphi_n(x)$  ein in  $(a, b)$  orthonormiertes System zu einer nichtnegativen, integrierbaren Gewichtsfunktion  $w(x)$  bilden,  $\varphi_0(x)$  konstant ist und die Formel

$$\sum_{k=0}^n \varphi_k(t) \varphi_k(x) = \sum_{l=1}^r F_l(t, x) \sum_{i,j=-p}^p \gamma_{i,j}^{(n,l)} \varphi_{n+i}(t) \varphi_{n+j}(x)$$

besteht, wo  $p, r$  von  $n$  unabhängige, natürliche Zahlen bedeuten, die  $\gamma_{i,j}^{(n,l)}$  beschränkt sind und  $F_l(t, x) = O(|t - x|)$  ( $x \in (c + \delta, d - \delta)$ ,  $l = 1, \dots, r$ ) für jedes  $\delta > 0$  gleichmäßig besteht. III. Es sei  $w(x) > 0$  fast überall, und es sei  $\{\lambda_n\}$  eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge mit  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2} < \infty$ . Gehört  $f(x)$  zu  $\text{Lip } \alpha$  ( $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ ) in  $(c, d)$  ( $\zeta(a, b)$ ), so gilt

$$\frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^n |s_{\nu}(x) - f(x)| = o\left(\frac{\lambda_n}{n^{\frac{1}{2} + \alpha}}\right)$$

in  $(c, d)$  fast überall.

*K. Tandori.*

Arrighi, Gino: Considerazioni sulla serie  $\sum_{s=1}^{\infty} P_s(t) e^{qs t}$ . Boll. Un. mat. Ital.,

III. Ser. 13, 38—45 (1958).

L'A. dà anzitutto alcuni criteri sufficienti per la convergenza in un punto delle serie del tipo  $\sum_{s=1}^{\infty} P_s(t) e^{qs t}$ , dove  $t$  è una variabile reale, i  $P_s(t)$  sono polinomi coi coefficienti nel campo complesso, i  $q_s$  sono numeri, pure nel campo complesso (due a due distinti). Dà poi criteri sufficienti per la convergenza, che risulta uniforme, delle stesse serie in certi intervalli. — Le serie considerate comprendono, come casi particolari, le serie di Dirichlet e certe serie trigonometriche.

*F. Cecioni.*

### Spezielle Funktionen:

Carlitz, L.: Bernoulli and Euler numbers and orthogonal polynomials. Duke math. J. 26, 1—15; Errata. Ibid. 706 (1959).

The author generalizes to more general numbers results about the Bernoulli numbers obtained by Touchard (this Zbl. 71, 61), Wyman and Moser (this Zbl. 71, 62), and himself (this Zbl. 77, 281). Let

$$\beta_n = \beta_n(\lambda) = \{B_{n+1}(\lambda) - B_{n+1}\}/(n+1)\lambda,$$

where  $z e^{iz}/(e^z - 1) = \sum B_n(\lambda) z^n/n!$  Then there exist polynomials  $\Omega_n^{(\lambda)}(z)$  such that

$$(*) \quad \beta^r \Omega_n^{(\lambda)}(\beta) = K_n^{(\lambda)} \delta_{rn} \quad (0 \leq r \leq n),$$

where  $\delta_{rn}$  is the Kronecker delta,  $K_n^{(\lambda)}$  is an explicitly given number and the polynomial  $\Omega_n^{(\lambda)}$  can be expressed in terms of the polynomial  $F_n^{(\lambda)}(z)$  introduced by Pasternak [Philos. Mag. 28, 209—226 (1939)] and so in terms of a  ${}_3F_2$ . (The convention is that  $\beta^s$  on the left hand side of (\*) is replaced by  $\beta_s$  after the expression is put in powers of  $\beta$ ). Further, there is the orthogonality relation

$$2^n K_n^{(\lambda)} \delta_{mn} = \frac{\sin \pi \lambda}{2i\lambda} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \Omega_m^{(\lambda)}(z) \Omega_n^{(\lambda)}(z) \frac{dz}{\sin \pi z \sin \pi(z - \lambda)}$$

valid for  $-1 < \alpha < 0$ ,  $0 < \lambda < 1$ . This last is proved by means of the integral representation

$$\beta_n(\lambda) = \frac{\sin \pi \lambda}{2i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{z^n dz}{\sin \pi z \sin \pi(z - \lambda)}.$$

There are similar results in which the  $\beta_n$  are replaced by the numbers  $R_n = R_n(\lambda)$  defined by the expansion

$$\frac{1 - \lambda}{e^{\lambda} - \lambda} = \sum R_n(\lambda) \frac{x^n}{n!} \quad (\lambda \neq 1).$$

*J. W. S. Cassels.*

Lesky, Peter: Unendliche orthogonale Matrizen und Laguerresche Matrizen. Monatsh. Math. 63, 59—83 (1959).



Im ersten Teil gibt Verf. allgemeine Sätze über unendliche orthogonale Matrizen: Orthogonalitätsbedingungen, Abgeschlossenheit und Vollständigkeit, einen Darstellungssatz und Erweiterung auf orthogonale Funktionensysteme. Im zweiten Teil werden die Laguerreschen Matrizen eingeführt. Es seien

$$(1) \quad y_{\nu n} = a_{\nu 0} + \binom{n}{1} a_{\nu 1} + \dots + \binom{n}{\nu} a_{\nu \nu}, \quad \nu, n = 0, 1, 2, \dots$$

Polynome in  $n$  vom Grade  $\nu$  mit den Orthogonalitätsbedingungen:

$$(2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} y_{\nu n} y_{\mu n} = \begin{cases} 0, & \nu \neq \mu; \\ \sigma_{\nu} > 0, & \nu = \mu; \end{cases} \quad (3) \quad r_{\nu, \mu} = e^{-\mu/2} \frac{y_{\nu \mu}}{\sqrt{\sigma_{\nu}}}$$

die  $r_{\nu, \mu}$  bilden das normierte orthogonale System von Zeilenvektoren einer unendlichen orthogonalen Matrix, der Laguerreschen Matrix. Die Bestimmung der Polynome  $y_{\nu n}$  erfolgt mit einem Variationsprinzip:

$$(4) \quad y_{\nu n} = e^n \Delta^{\nu} \left( e^{-n} \binom{n}{\nu} \right), \quad n, \nu = 0, 1, 2, \dots,$$

wo  $\Delta^k$  die  $k$ -te Differenz bezüglich der Veränderlichen  $n$  bedeutet, und es ist:  $y_{0n} = 1$ ,  $y_{1n} = e^{-1} + n(e^{-1} - 1)$ , ... Indem Verf. in (2) eine allgemeine Gewichtsfunktion einführt:

$$(5) \quad \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} \binom{n+\alpha}{\nu} y_{\nu n}^{(\alpha)} y_{\mu n}^{(\alpha)} = \begin{cases} 0, & \nu \neq \mu; \\ \tau_{\nu} > 0, & \nu = \mu; \end{cases}$$

wo  $\alpha$  eine nichtnegative reelle Zahl bedeutet, kommt er zu der Verallgemeinerung:

$$(6) \quad \begin{cases} y_{\nu n}^{(\alpha)} = \left[ e^n \binom{n+\alpha}{\nu} \right] \Delta^{\nu} \left[ e^{-n} \binom{n+\alpha}{n-\nu} \right], & r_{\nu n}^{(\alpha)} = e^{n/2} \sqrt{\binom{n+\alpha}{n}} y_{\nu n}^{(\alpha)} / \sqrt{\tau_{\nu}}, \\ \tau_{\nu} = 1 / \binom{\alpha+\nu}{\nu} (e-1)^{\alpha+1} e^{\nu-\alpha-1}, & \alpha > 0; \quad \nu, n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Für die Polynome  $y_{\nu n}^{(\alpha)}$  werden eine erzeugende Funktion, eine Rekursionsformel bezüglich  $\nu$ , aus der die Christoffelsche Summendarstellung gewonnen wird, eine Differenzengleichung bezüglich  $n$  und eine Darstellung der  $y_{\nu n}^{(\alpha)}$  durch die  $y_{\nu k}^{(\beta)}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ ,  $\alpha > \beta \geq 0$ , die der Integralformel von Kogbetliantz bei den Laguerreschen Polynomen entspricht und zur Ableitung folgender Abschätzung dient:

$$\left| y_{\nu n}^{(\alpha)} \right| \leq \frac{e \alpha \sqrt{e^n - 1}}{(e-1)(n+\alpha)e^{\nu/2}} \leq \frac{\sqrt{2e} \alpha e^{(n-\nu)/2}}{(n+\alpha)\sqrt{e-1}}, \quad \alpha > 0; \quad \left| y_{\nu n}^{(0)} \right| \leq \frac{\sqrt{e} e^{(n-\nu)/2}}{\sqrt{e-1}};$$

$\nu, n = 0, 1, 2, \dots$ . Den Abschluß bildet der Satz: „Die mit den Elementen  $r_{\nu n}^{(\alpha)}$  gebildete unendliche Matrix ist für jedes  $\alpha > 0$  eine unendliche orthogonale Matrix; das System der Zeilen- und Spaltenvektoren ist abgeschlossen und vollständig.“

O. Volk.

Popov, Blagoj S.: L'évaluation explicite des expressions de Turán-Szegő. C. r. Acad. Sci., Paris 248, 2158—2159 (1959).

Ausgehend von der Darstellung der Produkte  $P_m(x) P_n(x)$  und  $\frac{d^r P_m(x)}{dx^r} \frac{d^r P_n(x)}{dx^r}$ ,  $m \geq r \geq 1$ ,  $n \geq r \geq 1$  durch die  $P_{m+n-2k}(x)$  bzw.  $\frac{d^r P_{m+n-2k}(x)}{dx^r}$ , wo die  $P_l(x)$  die Legendreschen Polynome sind, erhält Verf. für die Turánschen Ausdrücke:

$$\begin{aligned} A_n(x) &= (P_n(x))^2 - P_{n+1}(x) P_{n-1}(x) = \frac{1}{2n+1} - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n,k} P_{2n-2k}(x), \\ A_n^r(x) &= \left[ \frac{d^r P_n(x)}{dx^r} \right]^2 - \frac{d^r P_{n+1}(x)}{dx^r} \frac{d^r P_{n-1}(x)}{dx^r} = \sum_{k=0}^{n-r} \beta_{n,r,k} \frac{d^r P_{2n-r-2k}(x)}{dx^r}, \end{aligned}$$

woraus unmittelbar die bekannten Ungleichungen folgen.

O. Volk.

Kuipers, L.: Relations between continuous generalized Legendre associated functions (recurrence formulas). Math. Scandinav. 6, 200—206 (1958).

Den zwei früher gegebenen Rekursionen (dies. Zbl. 84, 68) wird in Part I eine dritte zugefügt:

$$2(k+1)((k+\tfrac{1}{2}(m+n))(z^2-1)^{1/2}P_k^{m-1,n-1}(z) + \{2(k+1)z - (m-n)\}P_k^{m,n}(z) - 2(k-\tfrac{1}{2}(m-n)+1)P_{k+1}^{m,n}(z) = 0.$$

Daraus wird unter Anwendung der früher gegebenen Rekursionen eine ganze Tabelle von Rekursionen gewonnen. In Part II wird eine Rekursion mit einer Ableitung und in Part III eine inhomogene gegeben.

O. Volk.

Al-Salam, W. A.: The Bessel polynomials. Duke math. J. 24, 529—545 (1957).

Die Besselschen Polynome (B. P.)  $y_n(x, a, b)$  vom Grade  $n$ , ganze rationale Lösungen der Differentialgleichung

$$x^2 y'' + (ax + b)y' - n(n + a - 1)y = 0,$$

in der  $a$  und  $b$  willkürliche Parameter sind (von denen der zweite unbeschadet der Allgemeinheit gleich 2 gewählt werden kann), sind schon mehrfach untersucht worden, zuerst von Krall und Frink (dies. Zbl. 31, 297). Die Polynome  $Y_n^{(\alpha)}(x) = y_n(x, \alpha + 2, 2) = {}_2F_0(-n, n + \alpha + 1; -x/2)$  stehen in naher Beziehung zu den Laguerreschen Polynomen (1)  $Y_n^{(\alpha)}(x) = n!(-x/2)^n L_n^{(-2n-\alpha-1)}(2/x)$ ; [(2)  $\theta_n^{(\alpha)}(x) = x^n Y_n^{(\alpha)}(1/x)$  ist eine andere häufig angewandte Schreibweise]. Verf. gibt ihre Rekursionsformeln an, und er kennzeichnet die Folge  $\{Y_n^{(\alpha)}(x)\}$  differential- und differenzenrechnerisch. Von seinen Integraldarstellungen der B. P. sei eine mit Jacobischen Polynomen gebildete angeführt,

$$Y_n^{(\alpha+\beta)}\left(\frac{x}{s}\right) = \frac{n! s^{\alpha+1}}{\Gamma(1+\alpha+n)} \int_0^\infty t^\alpha P_n^{(\alpha,\beta)}(1+xt) e^{-st} dt \quad (\Re s > 0, \alpha > -1),$$

vermöge deren sich Eigenschaften der  $P_n^{(\alpha,\beta)}$  auf die B. P. übertragen lassen. Dabei ergeben sich Erzeugungen der B. P., unter ihnen die folgende:

$$\sum_{n=0}^\infty Y_n^{(\beta-n)}(x) \frac{t^n}{n!} = e^t \left(1 - \frac{tx}{2}\right)^{-1-\beta}; \quad \sum_{k=0}^\infty (-\lambda)^k Y_n^{(k-n)}(x) = \frac{1}{1+\lambda} Y_n^{(-n)}\left(\frac{x}{1+\lambda}\right)$$

ist eine weitere, und es gibt bilineare Erzeugende. In Reihen nach den  $Y_n^{(\beta)}(x)$  entwickelt Verf. auch die Funktionen  $(z/2)^{1+\beta} \exp(xz^2/8)$ , die Potenz und (Multiplikationstheorem)  $Y_m^{(\alpha)}(\lambda x)$ . Ferner gewinnt er einen Zusammenhang der B. P. mit den Hermiteschen Polynomen. Das Produkt zweier B. P. stellt er dar durch das Integral

$$Y_n^{(\alpha)}(u) Y_n^{(\alpha)}(v) = \frac{n!}{\Gamma(1+\alpha+n)} \int_0^\infty e^{-t} t^\alpha P_n^{(\alpha,0)} \left[1 + t \left(u + v + uv \frac{t}{2}\right)\right] dt.$$

Einen Integralausdruck mit einem B. P. findet er auch für  $J_{2n+\alpha+1}(z)$ . Zum Schluß berechnet er längs des Einheitskreises mit der Gewichtsfunktion

$$\varrho(x, \alpha) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+n-1)} \left(-\frac{2}{x}\right)^n$$

der  $Y_n^{(\alpha)}(x)$  das Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \varrho(z, \alpha) Y_m^{(\beta)}(z) Y_n^{(\alpha)}(z) dz = \frac{2(-1)^{n+1} \Gamma(\alpha-\beta+1) \Gamma(\alpha+2) (-m)_n (m+\beta+1)_n}{\Gamma(m+n+\alpha+2) \Gamma(n-m+\alpha-\beta+1)},$$

dessen Wert für  $\beta = \alpha$  die Orthogonalität der B. P. aussagt. L. Koschmieder.

Rajagopal, A. K.: On Bessel polynomials. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 13, 418—422 (1958).

Nach der Feststellung des Verf. hat man bei der Behandlung der Besselschen Polynome (B. P.)  $y_n(x, a, b)$  bisher nicht berücksichtigt, daß sie — in einer beson-



deren Gestalt — der Funktionalgleichung (F-Gleichung) von Truesdell (dies. Zbl. 45, 343) gehorchen. [Bemerkung des Ref.: Verf. nennt die Formel für die Laguerreschen Polynome  $L_n^\nu(1/z) = (-1)^n e^{1/z} z^{1+n-\nu} (d/dz)^n (e^{-1/z} z^{-\nu-1})$  "a result due to Truesdell"; dies trifft aber nicht zu, vgl. S. 242, Z. 11 der in dies. Zbl. 29, 392 besprochenen Arbeit des Ref.]. Die Beziehung der B. P. zur F-Gleichung besteht darin, daß

$$z^{-2n-1-\nu} e^{-1/z} y_n(bz, 1-2n-\nu, b) = F(z, n)$$

eine ihrer Lösungen ist. Kraft dessen schreibt Verf. die Haupteigenschaften der Funktion  $F(z, n)$ , nämlich

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial z} F(z, n) = F(z, n+1), \quad (2) \quad F(z+h, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} F(z, \alpha+n),$$

$$(3) \quad F(kz, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k-1)^n z^n}{n!} F(z, \alpha+n),$$

$$(4) \quad \sum_{n=0}^{\infty} F(z, \alpha+n) \omega^n = \int_0^{\infty} e^{-t} F(z+t\omega, \alpha) dt$$

auf die B. P. um. Dadurch ergeben sich für diese (1\*) eine auch in einer Arbeit von Al-Salam (s. vorstehendes Referat) erscheinende Rekursionsformel und wie in (2), (3), (4) je eine Erzeugende (2\*), (4\*) und ein Multiplikationstheorem (3\*). Ihre Wiedergabe im einzelnen unterbleibe hier; auch nur erwähnt sei das Konturintegral für  $y_{n+\alpha}(bz, 1-2n-\nu-2\alpha, b)$ , das sich aus

$$(5) \quad F(z, n+\alpha) = \frac{\Gamma(n+1)!}{2\pi i} \oint_C \frac{F(y, \alpha)}{(y-z)^{n+1}} dy$$

bei passender Integrationslinie  $C$  ergibt.

L. Koschmieder.

**Shukla, H. S.:** Certain theorems of Cayley and Orr type for bilateral hypergeometric series. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 10, 48—59 (1959).

I risultati ottenuti un secolo fa da Cayley e più tardi da Orr circa il prodotto di due serie ipergeometriche, e successivamente ampliati da Bayley, Burchnall e Chaundy (questo Zbl. 31, 391), sono stato generalizzato recentemente da Henrici [Pacific J. Math. 5, Suppl. II, 923—931 (1955)]. Nuovi e importanti estensioni di quelli risultati, sono i vari teoremi che stabilisce l'A. riguardanti le serie ipergeometriche di tipo bilaterale, cioè:

$${}_rH_r \left[ \begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_r; \\ b_1, b_2, \dots, b_r; \end{matrix} z \right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n \dots (a_r)_n}{(b_1)_n (b_2)_n \dots (b_r)_n} z^n$$

mediante opportune trasformazione dalla formola da Slater (questo Zbl. 46, 72) relativa al prodotto  ${}_rH_r$  per il quoziente di fattoriale:

$$\Gamma \left[ \begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_r; \\ b_1, b_2, \dots, b_r; \end{matrix} \right] = \frac{\Gamma(a_1) \Gamma(a_2) \dots \Gamma(a_r)}{\Gamma(b_1) \Gamma(b_2) \dots \Gamma(b_r)}.$$

Assegnando valori particolari ai parametri che intervengono in queste espressione e mediante opportune trasformazione delle formole già note, risultano quelli teoremi che includono come semplice casi speciali i risultati sopra menzionati e, in particolare, il teorema di Henrici.

J. Ma. Orts.

**MacRobert, T. M.:** Infinite series of  $E$ -functions. Proc. Glasgow math. Assoc. 4, 26—28 (1958).

Die Grundlage der vom Verf. gewonnenen Darstellungen der  $E$ -Funktionen durch unendliche Reihen bildet die Barnesse Integraldarstellung der  $E$ -Funktion:

$$E \left( \begin{matrix} p; \alpha_r; \\ q; \varrho_s; \end{matrix} z \right) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\Gamma(\zeta) \Pi \Gamma(\alpha_r - \zeta)}{\Pi \Gamma(\varrho_s - \zeta)} z^\zeta d\zeta;$$

damit und mit Hilfe von Formeln von Whipple, Dougall und Kummer wird u. a.

bewiesen ( $|\text{ampl } z| < \pi$ ):

1. 
$$E\left(\begin{matrix} p; \alpha_r \\ q; \varrho_s \end{matrix}; z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! (2z)^n} E\left(\begin{matrix} p; \alpha_r + n \\ q; \varrho_s + n \end{matrix}; 2z\right).$$
2. 
$$\frac{\Gamma(\varrho_1)}{\Gamma(\sigma)} E\left(\begin{matrix} p; \alpha_r \\ q; \varrho_s \end{matrix}; z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\varrho_1 - \sigma; n)}{(\varrho_1; n) n!} z^{-n} E\left(\begin{matrix} p; \alpha_r + n \\ q; \sigma + n, \varrho_2 + n, \dots, \varrho_a + n \end{matrix}; z\right)$$
3. 
$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2}k+1)}{\Gamma(k+1)} E\left(\begin{matrix} p; \alpha_r \\ q; \varrho_s \end{matrix}; z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(k; n)}{n! 2^n} E\left(\begin{matrix} \frac{1}{2}k+1+n, \alpha_1+n, \dots, \alpha_p+n \\ k+1+2n, \varrho_1+n, \dots, \varrho_a+n \end{matrix}; z\right).$$

*O. Volk.*

**MacRobert, T. M.:** Infinite series of  $E$ -functions. *Math. Z.* **71**, 143—145 (1959).

Ausgehend von der Darstellung der  $E$ -Funktion durch ein Barnes-Integral werden folgende Beziehungen bewiesen:

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(zt)^n}{n!} E\left(\begin{matrix} p; \alpha_r + n \\ q; \varrho_s + n \end{matrix}; z^{-2}\right) = E\left(\begin{matrix} p; \alpha_r \\ q; \varrho_s \end{matrix}; (z^2 - tz)^{-1}\right)$$

$$|\text{amp } z| < \frac{1}{2}\pi, |\text{amp } (z - t)| < \frac{1}{2}\pi, |t/z| < 1;$$

$$(2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(l+2n) \Gamma(l+n) (l-\varrho_1+1; n) (k; n) \Gamma(\varrho_1-k)}{n! \Gamma(\varrho_1+n) \Gamma(l-k+1+n) z^n} \times \\ \times E\left(\begin{matrix} l-k+1+n, \alpha_1+n, \alpha_2+n, \dots, \alpha_p+n \\ l+2n+1, \varrho_1-k+n, \varrho_2+n, \dots, \varrho_a+n \end{matrix}; z\right) = E\left(\begin{matrix} p; \alpha_r \\ q; \varrho_s \end{matrix}; z\right),$$

$|\text{amp } z| < \pi, \Re(\varrho_1 - k) > 0$ . Als Hilfssatz wird bewiesen:

$$\left(\sin \frac{\vartheta}{z}\right)^{-2\zeta} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - \zeta)}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(1 - \zeta)} \left\{ 1 + 2 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(\zeta; r)}{(1 - \zeta; r)} \cos r \vartheta \right\},$$

$$0 \leq \vartheta \leq \pi; (\zeta; 0) = 1, (\zeta; r) = \zeta(\zeta+1) \dots (\zeta+r-1), r = 1, 2, 3, \dots$$

*O. Volk.*

**MacRobert, T. M.:** Integrals of products of  $E$ -functions. *Math. Ann.* **137**, 412—416 (1959).

Auswertung der beiden Integrale ( $m, l, n, p, q$  natürliche Zahlen,  $l \geq n+1$ ,  $p \geq q+1$ ,  $|\text{amp } z| < \frac{1}{2}(l-n+1)\pi$ ):

$$(1) \quad \int_0^{\infty} \lambda^{k-1} E\left(\begin{matrix} l; \beta_u \\ n; \sigma_v \end{matrix}; \lambda^{-1} z\right) E\left(\begin{matrix} p; \alpha_r \\ q; \varrho_s \end{matrix}; \lambda^m\right) d\lambda,$$

$$\Re(m\alpha_r + k) > 0, r = 1, 2, \dots, p; \Re(\beta_u - k) > 0, u = 1, 2, \dots, l;$$

$$(2) \quad \int_0^{\infty} \lambda^{-k-1} E\left(\begin{matrix} l; \beta_u \\ n; \sigma_v \end{matrix}; \lambda z\right) E\left(\begin{matrix} p; \alpha_r \\ q; \varrho_s \end{matrix}; \lambda^m\right) d\lambda,$$

$$\Re(k) > 0, \Re(m\alpha_r + \beta_u - k) > 0, r = 1, 2, \dots, p; u = 1, 2, \dots, l.$$

Für  $m = 1$  siehe F. M. Ragab (dies. Zbl. **52**, 69).

*O. Volk.*

## Funktionentheorie:

**Zajcev, M. N.:** Über vollständige Systeme ganzer analytischer Funktionen. *Vestnik Moskovsk. Univ., Ser. Mat. Mech. Astron. Fiz. Chim.* **13**, Nr. 4, 3—15 (1958) [Russisch].

Le fait que le système  $\{f(\alpha_n z)\}$  soit complet dans un domaine  $G$  du plan complexe (pour la convergence uniforme dans l'intérieur de  $G$ ) n'entraîne pas que toute fonction  $F(z)$  holomorphe dans  $G$  admette un développement en série  $\sum a_n f(\alpha_n z)$  (contre-exemple:  $f(z) = e^z$ ,  $\alpha_n = \sqrt{n}$ , avec  $F(z)$  n'admettant pas de prolongement analytique dans un demi-plan  $\text{Re } z > c$ ). L'A. cherche à obtenir un système  $\{A_n(z)\}$  de combinaisons linéaires finies des  $f(\alpha_n z)$  pour lequel toute fonction holo-



morphe admette un développement  $\sum c_n A_n(z)$ ; il y parvient dans les hypothèses suivantes:  $f(z)$  entière d'ordre  $\varrho$  et type  $\sigma$  ( $0 < \varrho < \infty$ ,  $0 < \sigma < \infty$ ), de plus  $b_n \neq 0$  pour tout  $n$ ,  $\{n^{1/\varrho} |b_n|^{1/n}\}$  est convergente; les  $\alpha_n$  vérifient  $n |\alpha_n|^{-\varrho} \rightarrow \infty$ . — Cette étude se rattache à des travaux de A. O. Gel'fond (ce Zbl. 20, 299), A. I. Markuševič [Mat. Sbornik, n. Ser. 17 (59), 211—252 (1945)], A. F. Leont'ev (ce Zbl. 49, 330), Gel'fond et Leont'ev (ce Zbl. 44, 299). *G. Bourion.*

**Lehner, Joseph:** Partial fraction decompositions and expansions of zero. Trans. Amer. math. Soc. 87, 130—143 (1958).

Verf. systematisiert und verallgemeinert ein bereits bei Poincaré auftretendes, später von Rademacher in einem Spezialfall wiederentdecktes Phänomen im Bereiche der automorphen Formen (Entwicklung der Null) auf folgende Weise: Es seien zunächst  $g_k(z)$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) ganze Funktionen in  $z$  vom Minimaltyp der Ordnung 1, es sei  $\sum_{k=0}^{\infty} |g_k(n)|$  für alle ganzen  $n$  konvergent und

$$\limsup_{n \neq 0} \sum_{k=0}^{\infty} |g_k(n)|^{1/|n|} \leq 1.$$

Weiter seien die  $\varepsilon_k$  verschiedene komplexe Zahlen vom Betrage 1, die  $\alpha_k$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) mögen eine beschränkte Folge komplexer Zahlen bilden und es werde

$$\Phi_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_k(n) z^n$$

gesetzt. Dann stellt

$$(1) \quad P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \Phi_k(\varepsilon_k^{-1} z)$$

sowohl in  $|z| < 1$  als auch in  $|z| > 1$  je eine holomorphe analytische Funktion von  $z$  dar. Der Beweis basiert auf einem Satz von Wigert. Verf. beweist sodann eine Umkehrung des obigen Sachverhalts; er zeigt ferner, daß, wenn die  $\varepsilon_k$  einen Bogen des Einheitskreises frei lassen, die genannten beiden analytischen Funktionen über diesen Bogen hinweg ineinander analytisch fortgesetzt werden können. Zum Schluß gibt er auf Grund der vorangehenden Konstruktion ein allgemeines Verfahren an, aus dem im Einheitskreis ein System von nicht trivialen Entwicklungen der Null gewonnen werden kann. Diese sind von der Gestalt  $P(z) = 0$  für  $|z| < 1$  (vgl. (1)) und reduzieren sich in dieser Darstellung nicht auf ein nicht-leeres endliches Gliederaggregat. *H. Petersson.*

**Mitrović, Dragiša:** Le théorème  $\Omega$  relatif aux dérivées de la fonction  $\zeta$  de Riemann. Periodicum math.-phys. astron., II. Ser. 14, 13—18 (1959).

Für  $\sigma > 1$  gilt offenbar  $|\zeta^{(k)}(s)| \leq \zeta^{(k)}(\sigma)$  ( $s = \sigma + it$ ;  $k = 0, 1, 2, \dots$ ). Aus dem bekannten Dirichletschen Satz über diophantische Approximationen folgt aber auch  $|\zeta^{(k)}(s)| \geq \zeta^{(k)}(\sigma)$  für gewisse  $t \rightarrow \infty$ . Diese Beziehungen gelten noch für allgemeinere Dirichletreihen. *G. Hoheisel.*

**Koosis, P.:** Proof of a theorem of the brothers Riesz. Studia math. 17, 295—298 (1958).

Es wird ein Widerspruchsbeweis für den folgenden Satz von F. und M. Riesz gegeben: Ist die komplexwertige Funktion  $F(x)$  auf  $[-\pi, \pi]$  von beschränkter Variation und mit der Periode  $2\pi$ , sowie stets  $2F(x) = F(x+0) + F(x-0)$ , ist weiter das Poisson-Integral

$$f(z) = f(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\varphi-\theta)} dF(\theta)$$

holomorph für  $|z| < 1$ , so ist  $F$  auf  $[-\pi, \pi]$  absolut-stetig. *H. Günzler.*

**Wilson, R.:** The Hadamard product of an integral function and a power series. J. London math. Soc. 33, 398—403 (1958).

Let  $F_1(z) \equiv \sum_0^{\infty} a_{n1} z^n$  of order  $\varrho$ , type  $h$ , ( $0 < \varrho < \infty$ ,  $0 < h < \infty$ ), and  $f_2(z) \equiv \sum_0^{\infty} c_{n2} z^{-n-1}$  converge in the whole plane and  $|z| > r > 0$  respectively.

Properties of the Hadamard product  $H(z) \equiv \sum_0^{\infty} a_{n1} c_{n2} z^n$  of  $F_1(z)$  and  $z^{-1} f_2(z^{-1})$  are determined with the aid of the generalized Laplace transform

$$f_1(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\sigma-1} z^{-1} F_1\left(\frac{t^{\sigma}}{z}\right) dt, \quad (\sigma = \varrho^{-1}),$$

of  $F_1(z)$ .  $H(z)$  is of course an integral function of, at most, (i) order  $\varrho$  and type  $h r^{\varrho}$ . Let d. s. g. denote "directions of strongest growth". Theorem 1. Let  $H(z)$  satisfy (i). Then the d. s. g. of  $H(z)$  are identical with the singular directions of the Hadamard product of  $z^{-1} f_2(z^{-1})$  and  $z^{-1} f_1(z^{-1})$ . In Theorems 2 and 3, cases are enumerated in which it follows that  $H(z)$  satisfies (i) and has  $\theta_1 + \theta_2$  as a d. s. g.; where  $\theta_1$  is the only d. s. g. of  $F_1(z)$ , and  $\theta_2$  is one of the singular directions of  $z^{-1} f_2(z^{-1})$ , (Theorem 2); and  $z^{-1} f_2(z^{-1})$  has only one singular direction  $\theta_2$ , and  $\theta_1$  is one of the d. s. g. of  $F_1(z)$ , (Theorem 3). The methods are similar to those used by the same author (this Zbl. 78, 263; 80, 56).

N. A. Bowen.

Rooney, P. G.: On some properties of functions analytic in a half-plane. Canadian J. Math. 11, 432—439 (1959).

Wird der Raum  $\mathfrak{S}_p(\omega)$  als Menge der in  $\Re s > \omega$  analytischen Funktionen  $f(s)$  definiert, für die  $\mu_p(f; x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x + iy)|^p dy$  für  $x > \omega$  beschränkt ist, so gelten die vom Ref. (dies. Zbl. 16, 260) bewiesenen Sätze: Wenn  $e^{-\omega t} \varphi(t) \in L_p(0, \infty)$ ,  $1 < p \leq 2$ , so gehört die Laplace-Transformierte  $f(s) = \mathfrak{L}\{\varphi\}$  zu  $\mathfrak{S}_p(\omega)$  mit  $p^{-1} + q^{-1} = 1$ ; ist umgekehrt  $f \in \mathfrak{S}_p(\omega)$ ,  $1 < p \leq 2$ , so gibt es ein  $\varphi(t)$  mit  $e^{-\omega t} \varphi(t) \in L_q(0, \infty)$  und  $\mathfrak{L}\{\varphi\} = f(s)$ . Die Beweise beruhten auf der Titchmarshschen Verallgemeinerung des Plancherelschen Satzes über die Fourier-Transformation. Indem der Verf. stattdessen den von Hardy und Littlewood [Math. Ann. 97, 159—209 (1926)] aufgestellten Satz über die Fourier-Transformation benutzt, gelangt er zu folgenden Sätzen:  $\mathcal{H}_p(\omega)$  sei der Raum der in  $\Re s > \omega$  analytischen  $f(s)$  mit für  $x > \omega$  beschränktem

$$\nu_p(f; x, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |x - \omega + iy|^{p-2} |f(x + iy)|^p dy.$$

Wenn  $e^{-\omega t} \varphi(t) \in L_p(0, \infty)$ ,  $1 < p \leq 2$ , so ist  $f(s) \in \mathcal{H}_p(\omega)$ ; ist  $f \in \mathcal{H}_q(\omega)$ ,  $q \geq 2$ , so gibt es ein  $\varphi$  mit  $e^{-\omega t} \varphi(t) \in L_q(0, \infty)$  und  $\mathfrak{L}\{\varphi\} = f(s)$ . — In einer früheren Arbeit [Canadian J. Math. 10, 421—430 (1958; dies. Zbl. 81, 323)] hat Verf. die oben erwähnte Theorie des Ref. auf Räume  $\mathfrak{S}_{\lambda,p}(\omega)$  erweitert, denen das Integral

$$\mu_p^{\lambda}(f; \omega) = \int_{\omega}^{\infty} (x - \omega)^{q\lambda-1} [\mu_p(f; x)]^q dx$$

zugrunde lag. Analog erweitert Verf. seine vorigen Sätze auf Räume  $\mathcal{H}_{\lambda,p}(\omega)$ , die durch die Beschränktheit von  $\nu_p^{\lambda}(f; \omega) = \int_{\omega}^{\infty} (x - \omega)^{p\lambda-1} \nu_p(f; x, \omega) dx$  definiert sind.

G. Doetsch.

Ganapathy Iyer, V.: On permutable integral functions. J. London math. Soc. 34, 141—144 (1959).

L'A. démontre le résultat suivant: si  $P(z)$  est un polynôme de degré  $> 1$ , les seules fonctions entières  $f(z)$  telles que  $f(P(z)) = P(f(z))$  sont des polynômes. La démonstration se base sur l'inégalité suivante (J. Clunie, ce Zbl. 65, 65): si  $\alpha, \beta$



sont deux fonctions entières,  $\gamma = \alpha(\beta)$ ,  $A(r)$ ,  $B(r)$ ,  $C(r)$  les modules maximaux de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  sur le cercle  $|z| = r$ , alors il existe un  $k > 1$  tel que pour tout  $r \geq 1$ ,  $A(B(r)) \leq C(kr) \leq A(B(kr))$ . L'A. détermine aussi les fonctions entières  $f$  lorsque  $P$  est un polynôme de degré 1. J. Dieudonné.

● **Anastassiadis, Jean:** Recherches algébriques sur le théorème de Picard-Montel. (Actualités scientifiques et industrielles. 1273). (Exposés sur la théorie des fonctions. XVIII.) Paris: Hermann 1959. 52 p.

Verf. betrachtet ganze Funktionen  $f(z)$  endlicher Ordnung  $p$ , die durch eine Potenzreihenentwicklung  $f(z) = \sum c_k z^k$  gegeben sind. Ist nun  $a$  ein Picardscher Ausnahmewert, so gelangt Verf. aus der Gleichung  $f(z) - a = e^{P(z)}$  durch Koeffizientenvergleich zu einer einfachen algebraischen Methode, die Zahl  $a$  aus den  $n + 2p$  ersten  $c_k$  zu berechnen. Hierbei ist  $n (> 0)$  die kleinste Zahl, für die

$$A_n = \begin{vmatrix} c_n & \dots & c_{n+p-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n+p-1} & \dots & c_{n+2p-2} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ist die Existenz eines endlichen Ausnahmewertes nicht im Voraus bekannt, so muß allerdings noch die Erfüllung unendlich vieler linearer Gleichungen mit je  $p + 1$  Gliedern nachgeprüft werden. Die Methode ergibt einen elementaren Beweis des Satzes von Picard innerhalb der Klasse von meromorphen Funktionen endlicher Ordnung. Demselben Prinzip folgend, gelangt Verf. zu einer etwas mühsameren Berechnung von  $m$ -mal angenommenen Werten und von Polynomen  $m$ -ten Grades, die nirgends  $= f(z)$  sind. Auch die Ausnahmewerte meromorpher Funktionen lassen sich in derselben Weise berechnen. Verf. betrachtet ferner Linearkombinationen ganzer Funktionen, die entweder identisch, nirgends oder in endlich vielen Punkten verschwinden. Er schließt mit Einzigkeitsfragen für Funktionen, die in bezug auf einen Wert exakt gleiche Verteilung zeigen. G. af Hällström.

**Lehto, Olli:** A generalization of Picard's theorem. Ark. Mat. 3, 495—500 (1958).

Eine Punktmenge  $E$  in der komplexen Ebene heißt eine Picard-Menge [P. M.], wenn keine außerhalb  $E$  meromorphe Funktion in der Komplementärmenge von  $E$  mehr als 2 Werte ausläßt. Die Arbeit befaßt sich mit der Frage, wann eine gegebene Punktfolge  $E = \{a_v\}$  ohne Häufungspunkte im Endlichen eine P. M. ist. Es wird gezeigt, daß dafür die Bedingung

$$(\log |a_v|)^{2+\delta} = O(\log |a_{v+1}|) \quad (\delta > 0)$$

hinreichend ist. Nicht hinreichend ist dagegen, wie an einem Gegenbeispiel demonstriert wird, die Bedingung (\*)  $|a_{v+1}/a_v| \geq q > 1$ . — Die Menge  $E$  heißt „P. M. für ganze Funktionen“, wenn keine ganze Funktion außerhalb  $E$  mehr als einen endlichen Wert ausläßt. Hinreichend für diese Eigenschaft ist die Bedingung  $|a_v/a_{v+1}| = O(v^{-2})$ . Liegen alle Punkte von  $E$  auf einem Strahl, so ist bereits (\*) hinreichend [gemeinsames Resultat mit K. I. Virtanen]. Die letzte Bedingung kann nicht mehr wesentlich abgeschwächt werden. P. Seibert.

**Künzi, H. P. and H. Wittich:** The distribution of the  $a$ -points of certain meromorphic functions. Michigan math. J. 6, 105—121 (1959).

In dieser Arbeit wird die Werteverteilung der meromorphen Funktionen betrachtet, deren Graph (im Sinne von Speiser, Nevanlinna und Elfving) aus endlich vielen periodischen oder doppelperiodischen Enden besteht. C. Constantinescu.

**Kuramochi, Zenjiro:** Cluster sets of analytic functions in open Riemann surfaces with regular metrics. I. Osaka math. J. 11, 83—90 (1959).

Es sei  $D$  ein Gebiet der  $z$ -Ebene,  $C$  der Rand von  $D$  und  $f$  eine meromorphe Funktion auf  $D$ . Man setzt für  $z_0 \in C$ ,  $S_{z_0}^{(D)} = \bigcap_{r>0} \overline{f(D_r(z_0))}$  (wo für jede Menge  $F$ ,  $F_r(z_0)$  die Menge  $\{z \in F: |z - z_0| < r\}$  bedeutet) und für jede Menge  $E \subset C$ ,  $S_{z_0}^{(C-E)} =$

$\bigcap_{r>0} \bigcup_{z \in (C-E)r(z_0)} S_z^{(D)}$ . Ist  $E$  vom harmonischen Maße Null, so hat Ohtsuka gezeigt (dies. Zbl. 66, 324), daß  $S_{z_0}^{(D)} - S_{z_0}^{(C-E)}$  eine offene Menge ist und  $f$  in jeder Umgebung von  $z_0$  alle Werte dieser Menge annimmt, bis auf eine Menge der Kapazität Null (Verallgemeinerung einiger früherer Sätze von Iversen, Doob, Seidel, Beurling, Noshiro, Kunugui, Brelot und Tsuji). Der Zweck dieser Arbeit ist es, diesen Satz auf den Fall auszudehnen, in welchem  $D$  eine Riemannsche Fläche,  $z_0$  ein Punkt und  $E$  eine Menge des idealen Randes von  $D$ ,  $f$  aber weiter eine meromorphe Funktion ist. Es wird zuerst bewiesen, daß  $S_{z_0}^{(D)} - S_{z_0}^{(C-E)}$  offen ist (Verf. benutzt andere Bezeichnungen). Weiter wird gezeigt, daß für verschiedene Klassen von „dünnen“ Mengen  $E$  in jeder Umgebung von  $z_0$  die Funktion  $f$  jeden Wert von  $S_{z_0}^{(D)} - S_{z_0}^{(C-E)}$  unendlich oft annimmt bis auf eine „dünne“ Menge, deren Klasse von der Klasse der Menge  $E$  abhängt. C. Constantinescu.

**Dinghas, Alexander:** Verzerrungsschranken bei schlichten Abbildungen des Einheitskreises. Arch. der Math. 8, 413—416 (1958).

**Dinghas, Alexander:** Über einige Monotoniesätze in der Theorie der schlichten Funktionen. Avhdl. Norske Vid. Akad. Oslo I 1959, Nr. 1, 18 S. (1959).

Es handelt sich in den beiden Arbeiten (im folgenden der Reihenfolge nach mit I und II bezeichnet) um die Klasse aller in  $|z| < 1$  schlichten und durch  $w(0) = 0$ ,  $w'(0) = 1$  normierten Funktionen. Wenn  $w(z)$  mit keiner der Koebeschen Extremalfunktionen zusammenfällt, so ist nach Hayman (dies. Zbl. 53, 47) die Funktion  $\Phi_0(r) = M(r, w) (1-r)^2/r$ , ( $M(r, w) = \max |w(z)|$ ), im  $r$ -Intervall  $[0, 1]$  eigentlich monoton abnehmend. Nach Krzyż (dies. Zbl. 65, 309) besitzt die Funktion  $\Phi_1(r) = M(r, w') (1-r)^3/(1+r)$  dieselbe Eigenschaft. Dementsprechend stellt sich in II Verf. die Frage, ob die Funktionen  $\psi_0(r) = \mu(r, w) (1+r)^2/r$ , ( $\mu(r, w) = \min |w(z)|$ ), und  $\psi_1(r) = \mu(r, w') (1+r)^3/(1-r)$  im  $r$ -Intervall eigentlich monoton zunehmend sind. Unter Verwendung der Blumenthalschen Untersuchungen über die Struktur der Punktmenge  $\Gamma = \{z \mid \operatorname{Im}(zw'/w) = 0\}$ , worin die Kurven  $\Gamma_1 = \{z \mid |w(z)| = M(r, w)\}$  und  $\Gamma_2 = \{z \mid |w(z)| = \mu(r, w)\}$  enthalten sind (bzw.  $\Gamma'$ ,  $\Gamma'_1$  und  $\Gamma'_2$ ), nebst bekannten Abschätzungen von  $|zw'/w|$  und  $\operatorname{Re}(zw''/w')$ , wird folgender Satz bewiesen: Fällt  $w(z)$  mit keiner der Koebeschen Funktionen zusammen, so haben  $\Phi_0$  und  $\Phi_1$  im Intervall  $[0, 1]$  mit Ausnahme einer höchstens abzählbaren Punktmenge mit dem Punkt  $r = 1$  als einzigen Häufungspunkt eine (endliche) negative Ableitung. In den Ausnahmepunkten existieren die vordere und die hintere Derivierte und sind beide negativ. Entsprechendes gilt für  $\psi_0$  und  $\psi_1$ , mit dem einzigen Unterschied, daß hier die Ableitungen positiv sind. Es werden demnächst die Funktionen besprochen, die im konvexen Falle an Stelle der oben gegebenen Funktionen  $\Phi_0$ ,  $\Phi_1$ ,  $\psi_0$ ,  $\psi_1$  treten. In I gibt Verf. einen Beweis für den Landau-Martyschen Satz

$$|w^{(n)}(z)| \leq n! |w'(z)| (n+r) (1+r)^{-1} (1-r)^{-n+1}$$

(dessen Gültigkeit von der Richtigkeit der Bieberbachschen Vermutung abhängt). In II wird mit Hilfe einer Ungleichung von Kung Sun und Jenkins diese Abschätzung verbessert, woraus sich mit  $\Phi_n(r) = M(r, w^{(n)}) (1-r)^{n+2}/(n!(n+r))$  die Monotonieeigenschaft  $\Phi_n(r) \leq \Phi_1(r) \leq \Phi_0(r) \leq 1$  ergibt. Schließlich wird gezeigt, daß die Funktion  $A_n(r) = M(r, w^{(n)}) - n!(n+r) (1-r)^{-n-2}$  im Intervall  $[0, 1]$  negativ und eigentlich monoton abnehmend ist, wenn  $w(z)$  nicht eine Koebe-Funktion ist. H. Waadeland.

**Hoh, Chen-chih:** The Szegő problem in the theory of schlicht functions. Science Record, n. Ser. 2, 86—91 (1958).

Let  $S$  denote the class of all normalized schlicht functions  $w = f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ ,  $|z| < 1$ , and let  $D_f$  be the image domain of  $|z| < 1$  given by the transformation  $w = f(z)$ ,  $f \in S$ . The Szegő problem for a sub-class  $S'$  of  $S$  is to



determine  $\min_{f \in S'} \max_{1 \leq k \leq n} \alpha_k(f)$ , where  $\alpha_k(x) \exp \{[(2k+1)/n + \varepsilon] i \pi\}$ ,  $0 \leq \varepsilon \leq 2$ , is the boundary point lying on the ray  $\arg w = [(2k+1)/n + \varepsilon] \pi$  and nearest to  $w = 0$ , ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). By means of the concepts of supporting and anti-supporting circle of  $D_f$  at a boundary point  $w_0$ , as being respectively the smallest circle passing through  $w_0$  containing  $D_f$  in its interior and the greatest circle passing through  $w_0$  contained in the complement of  $D_f$  the author defines certain sub-classes of  $S$ . For these sub-classes he obtains, using the method of Grötzsch, precise solutions of the Szegő problem. He also gives an extension of Szegő's problem. The theorems are all stated without proofs. H. Waadeland.

**Kakehashi, Tetsujiro:** On schlicht functions. I. Proc. Japan Acad. **35**, 134—136 (1959).

Let  $\{F_k(z)\}$  be the sequence of schlicht functions, given by

$$F_0(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2, \quad F_1(z) = \left[\frac{1+z}{1-z} + i\lambda_1\right]^2,$$

$$F_k(z) = [\{F_{k-1}(z) + \mu_{k-1}\}^{1/2} + i\lambda_k]^2 = A_0^{(k)} + A_1^{(k)}z + \dots,$$

$\lambda_k$  being arbitrary real numbers and  $\mu_k$  arbitrary positive numbers. By means of an induction procedure the author proves the inequality  $|A_1^{(k)}| \geq 4$  and the asymptotic relation  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{A_n^{(k)}}{n A_1^{(k)}} \right] = \kappa$ ,  $|\kappa| = 1$ . H. Waadeland.

**Sakaguchi, Kôichi:** On a certain univalent mapping. J. math. Soc. Japan **11**, 72—75 (1959).

A function  $f(z)$ , regular in  $|z| < 1$ , is said to be star-like with respect to symmetrical points, if for every  $r < 1$  and sufficiently close to one and every  $\zeta$  on  $|z| = r$ , the angular velocity of  $f(z)$  about the point  $f(-\zeta)$  is positive as  $z = \zeta$  traverses the circle  $|z| = r$  in the positive direction. It is proved that  $\operatorname{Re} [zf'(z)/(f(z) - f(-z))] > 0$ ,  $|z| < 1$ , is a necessary and sufficient condition for  $f(z)$  to be univalent and starlike with respect to symmetrical points. The necessity is a consequence of the definition and the minimum principle for harmonic functions. The sufficiency depends on the fact that  $f(z) - f(-z)$  is univalent and starlike with respect to the origin for  $|z| < 1$ , and hence  $f(z)$  is close-to-convex (and therefore univalent) there. From the proved theorem follows immediately the precise estimates  $|a_n| \leq 1$ ,  $n \geq 2$ , when  $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ . He next proves, that  $f(z) = z + \dots$ , regular in  $|z| < 1$  and satisfying for a positive integer  $k$  the inequality

$$\operatorname{Re} \left\{ z f'(z) \left[ \sum_{v=0}^{k-1} \frac{f(\varepsilon^v z)}{\varepsilon^v} \right]^{-1} \right\} > 0, \quad |z| < 1,$$

is a univalent and close-to-convex function in  $|z| < 1$ . The proof is done by putting  $\varepsilon^k z$  for  $z$  in the inequality and adding from  $\mu = 1$  to  $k-1$ , from which follows

that  $\sum_{v=0}^{k-1} \left\{ \frac{f(\varepsilon^v z)}{\varepsilon^v} \right\}$  is univalent and star-like with respect to the origin for  $|z| < 1$ .

By means of a lemma of Kaplan (this Zbl. **48**, 311) is shown that in the inequality  $f(z)$  may be replaced by  $F_n(z)$ , where  $F_0(z) = f(z)$ ,  $F_1(z) = zf'(z)$ ,  $F_2(z) = z(zf'(z))'$ ,  $\dots$ . Finally the similar theorem for multivalently close-to-convex functions is stated. H. Waadeland.

**Sakaguchi, Kôichi:** On functions starlike in one direction. J. math. Soc. Japan **10**, 260—271 (1958).

For the class of  $k$ -fold symmetric functions  $f_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn+1} z^{kn+1}$  ( $a_1 = 1$ ), regular in the unit circle and starlike in the direction of one ray (and hence in  $k$

symmetric directions) the author gives the sharp radius of convexity  $|K - |K^2 - 1||^{1/k}$ , where  $K = \frac{1}{2}[3k - 9 + |9k^2 - 32k|]$ . The proof is an immediate consequence of a distortion lemma, which is proved by constructing certain functions on which the Carathéodory and Robertson coefficient estimates may be applied.

Moreover it is proved that the partial sums  $\sum_{n=0}^m a_{2n+1} z^{2n+1}$  of an odd function

$\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} z^{2n+1}$  ( $a_1 = 1$ ), regular in the unit circle and starlike in the direction of one ray are starlike with respect to the origin for  $|z| < \frac{1}{3}$  and convex for

$|z| < \frac{1}{3} \sqrt{3}$ . The bounds are sharp. The proof is based on a coefficient lemma and a distortion lemma for  $k$ -fold symmetric functions, which permit estimates of  $\operatorname{Re}[z f_m' / f_m]$  and of  $\operatorname{Re}[1 + z f_m'' / f_m']$ . By means of the previous results the author proves, in the last section of the paper, several theorems and corollaries, which give the exact star-radius and convexity-radius for partial sums of the

form  $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} z^{2n+1}$  and  $\sum_{n=0}^m a_n z^n$  under various conditions for the function

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

H. Waadeland.

Effertz, F. H. und K. H. Breuer: Ein Algorithmus und ein Klassifikationsprinzip für Funktionen mit nichtnegativem Realteil. Math. Ann. 138, 335—341 (1959).

Es wird ein Algorithmus für in  $\operatorname{Re} \lambda > 0$  analytische Funktionen angegeben, die dort nichtnegativen Realteil besitzen. Hieraus ergibt sich für diese Funktionen ein Klassifikationsprinzip: die in  $\operatorname{Re} \lambda > 0$  analytischen Funktionen können in zwei Klassen eingeteilt werden, von denen die erste diejenigen Funktionen enthält, für die der angegebene Algorithmus beliebig weit fortsetzbar ist, die zweite die, für die der angegebene Algorithmus nach endlich vielen Schritten abbricht. Der grundlegende Satz lautet folgendermaßen: Es sei  $F_\nu(\lambda)$  eine in  $\operatorname{Re} \lambda > 0$  analytische Funktion mit  $\operatorname{Re} F_\nu(\lambda) \geq 0$ , nicht von der Form

$$(*) \quad F_\nu(\lambda) = [s_\nu \bar{g}_\nu(\lambda) + \bar{s}_\nu \varepsilon g_\nu(-\lambda)] / [\bar{g}_\nu(\lambda) - \varepsilon g_\nu(\lambda)],$$

wobei  $|\varepsilon| = 1$ ,

$$g_\nu(\lambda) = \prod_{i=1}^{m_\nu} (\lambda - \lambda_i^{(\nu)}) \quad (\operatorname{Re} \lambda_i^{(\nu)} > 0)$$

und  $F_\nu(\lambda_i^{(\nu)}) = s_\nu$  ( $i = 1, 2, \dots, m_\nu$ ). Dann ist auch

$$F_{\nu+1}(\lambda) = [K S_\nu(\lambda) - \bar{K} T_\nu(\lambda)] / [S_\nu(\lambda) + T_\nu(\lambda)]$$

eine in  $\operatorname{Re} \lambda > 0$  analytische Funktion, die dort nichtnegativen Realteil besitzt. Hier ist  $\operatorname{Re} K > 0$ , ferner

$$S_\nu(\lambda) = \varepsilon g_\nu(-\lambda) (S_\nu - F_\nu(\lambda)), \quad T_\nu(\lambda) = \bar{g}_\nu(\lambda) (S_\nu - F_\nu(\lambda)).$$

Auf diese Weise kann jeder in  $\operatorname{Re} \lambda > 0$  analytischen Funktion  $F_\nu(\lambda)$  mit nichtnegativem Realteil, die nicht von der Gestalt (\*) ist, eine andere  $F_{\nu+1}(\lambda)$  mit derselben Eigenschaft zugeordnet werden. Tritt einmal eine Funktion  $F_{\nu+\mu}(\lambda)$  mit (\*) auf, so bricht der Algorithmus ab. Durch geeignete Wahl von  $\varepsilon$  und durch die Substitutionen  $\lambda = (1 - z) / (1 + z)$ ,  $F_\nu(\lambda) = [1 - f_\nu(z)] / [1 + f_\nu(z)]$  erhält man den bekannten Schurschen Algorithmus für beschränkte Funktionen. P. Szűsz.

Przeworska-Rolewicz, D.: Problème non linéaire d'Hilbert pour un système infini de fonctions. Ann. Polon. math. 5, 293—301 (1958).

W. Pogorzelski (this Zbl. 65, 64, 65) solved the non-linear Hilbert problem of finding the sequence  $\{I_n(z)\}$  of functions satisfying the relations

$$\Phi_n^-(t) = G_n(t) \Phi_n^-(t) - F_n[t, \Phi_1^-(t), \Phi_1^-(t), \Phi_2^-(t), \Phi_2^-(t), \dots],$$

(where  $G$  and  $F$  have given properties), for  $n = 1, 2, 3, \dots, p$ ,  $p$  being finite. The



present author obtains the generalization for the case when  $p$  is infinite. (For notation, see this Zbl. on the Pogorzelski papers just referred to). *N. A. Bowen.*

**Osserman, Robert:** A lemma on analytic curves. *Pacific J. Math.* **9**, 165—167 (1959).

Using the universal covering surface, the author proves the following lemma: every closed curve on a Riemann surface is homotopic to an analytic closed curve, and homologous to a finite sum of analytic Jordan curves. *C. Constantinescu.*

**Jenkins, James A.:** On a type problem. *Canadian J. Math.* **11**, 427—431 (1959).

Es sei  $S$  der Halbstreifen der  $z$ -Ebene ( $z = x + iy$ ),  $S = \{x > a, 0 < y < b\}$  und  $\mathfrak{R}$  die Riemannsche Fläche, die aus  $S$  durch Identifizierung der Punkte  $x$  und  $f(x) + ib$  entsteht, wo  $f$  eine zunehmende Funktion ist (die noch andere Bedingungen erfüllen muß). Da  $\mathfrak{R}$  zweifach zusammenhängend ist, so ist sie einem Kreisring  $1 < |\zeta| < R$  konform äquivalent.  $\mathfrak{R}$  heißt vom hyperbolischen, bzw. parabolischen Typ, je nachdem  $R < \infty$ , oder  $R = \infty$  ist. Verf. gibt hinreichende Bedingungen in bezug auf  $f$ , damit  $\mathfrak{R}$  vom hyperbolischen Typ sei. Diese Bedingungen stellen eine Verbesserung einer hinreichenden Bedingung von Volkovyskij dar (dies. Zbl. **60**, 232). *C. Constantinescu.*

**Matsumoto, Kikui:** Remarks on some Riemann surfaces. *Proc. Japan Acad.*

**34**, 672—675 (1958).

Die Arbeit ist den Beziehungen zwischen den verschiedenen Klassen von Riemannschen Flächen und ihren Eigenschaften gewidmet. Sie enthält folgende Hauptergebnisse: 1. Ist eine Riemannsche Fläche  $R$  in  $O_{HB\infty} - O_G$  (bzw.  $O_{HD\infty} - O_G$ ) enthalten, und  $G$  ein Gebiet auf  $R$ , das nicht vom Typus  $SO_{HB}$  (bzw.  $SO_{HD}$ ) ist, so ist  $G \in O_L$  (bzw.  $G \in O_{AD}$ ). 2. Eine meromorphe Funktion auf einer Riemannschen Fläche aus der Klasse  $O_{HB\infty}$  ist immer lokal vom Typus  $Bl$ . 3. Es sei  $R$  eine Riemannsche Fläche, und  $\Omega_i$  eine abnehmende Folge von Gebieten auf  $R$ , deren Durchschnitt ein Punkt ist; ist, für jedes  $i$ , wenigstens eine Komponente von  $f^{-1}(\Omega_i)$  nicht vom Typus  $SO_{HD}$ , so gehört  $R$  der Klasse  $O_{HD}$  nicht an. Es werden keine Beweise gegeben. *C. Constantinescu.*

**Väisälä, Jussi:** On normal quasiconformal functions. *Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A. I* **266**, 33 p. (1959).

Diejenigen Funktionen  $w(z)$ , die Verf. als  $K$ -quasikonform im Gebiet  $G$  bezeichnet (man vergleiche auch die Benennungen pseudoanalytisch und pseudomeromorph), können durch folgende Zerlegungseigenschaft (nach Stoilow) charakterisiert werden. Es gilt  $w(z) = f(T(z))$ , wobei  $T(z)$  eine schlichte quasikonforme Abbildung von  $G$  auf  $G'$  vermittelt (im Sinne topologischer Abbildung mit Höchstwert  $K$  für das Vergrößerungsverhältnis des Vierecksmoduls) und  $f(T)$  in  $G'$  von meromorpher Natur ist. Lehto und Virtanen bezeichnen (dies. Zbl. **77**, 77) ein in  $G$  meromorphes  $w(z)$  als ebenda normal, falls die Menge aller  $w(S(z))$  eine normale Familie bildet. Hierbei durchläuft  $S(z)$  alle konformen Abbildungen von  $G$  (bzw. von der universellen Überlagerungsfläche von  $G$ , falls  $G$  nicht einfach zusammenhängend ist) auf sich selbst. Die Definition bleibt für beliebiges kugelstetiges  $w(z)$  sinnvoll. Verf. zeigt, daß Normalität nur dann eintreten kann, wenn (die universelle Überlagerungsfläche von)  $G$  vom hyperbolischen Typus ist, was unten vorausgesetzt werde. Sei  $\sigma$  der hyperbolische Abstand zweier Punkte aus  $G$  und  $s$  der sphärische Abstand der Bildpunkte. Es ist  $w(z)$  genau dann normal, wenn für beliebige Punktpaare gilt  $s \leq \mu(\sigma)$  mit nichtabnehmendem  $\mu(\sigma)$  und  $\mu(\sigma) \rightarrow 0$  für  $\sigma \rightarrow 0$ . Für  $K$ -quasikonformes  $w(z)$  kann immer  $\mu(\sigma) = M\sigma^{1/K}$  gesetzt werden; ferner ist ein solches  $w(z)$  in  $G$  gleichzeitig mit  $f(T)$  in  $G'$  normal oder nicht. Verf. überträgt mehrere Sätze von Lehto und Virtanen (loc. cit.) über das Randverhalten einer normalen meromorphen Funktion mit sinngemäßen Modifikationen auf normale quasikonforme Funktionen. So hat ein  $w(z)$  dieser Art den Winkelgrenzwert  $\alpha$  in jedem Randpunkt  $z_0$ , wo  $\alpha$  Zielwert ist, wofern  $G$  ein Jordangebiet ist. Sind die in  $z_0$  endenden Randbogen

$\alpha$ -Zielwege, hat  $w$  sogar  $\alpha$  als gleichmäßigen Grenzwert, schon wenn die Normalitätsbedingung  $s \leq M\sigma^{1/K}$  nur für gegen  $z_0$  konvergierendes Punktpaar gilt (erweiterter Satz von Lindelöf). Das kleinstmögliche  $M$  für die Funktion  $f$ , wenn nur infinitesimale Punktpaare betrachtet werden, wird als Normalitätskonstante  $C$  auch von  $w(z)$  definiert. Verf. gibt Abschätzungen von  $C$  mit Hilfe von  $\mu(\sigma)$  und ferner durch  $C$  ausgedrückte Abschätzungen nach unten von  $|w(z)|$  auf Randteilen. Die Aussage, daß  $w(z)$  nicht in der Umgebung einer isolierten wesentlichen Singularität normal sein kann, enthält den Satz von Picard für die Klasse quasikonformer Funktionen. — Grundlegend für die Beweise waren gewisse Verzerrungsaussagen über quasikonforme Abbildungen von Hersch und Pfluger [dies. Zbl. 49, 63 (H.-P.); 66, 328 (H.)]. Diese drücken sich durch aus elliptischen Integralen hervorgehende reelle Funktionen aus, und dasselbe gilt infolgedessen für mehrere Abschätzungsaussagen und Beweise des Verf.

G. af Hällström.

Kahramaner, Suzan: Sur le comportement d'une représentation presque-conforme dans le voisinage d'un point singulier. *Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A* 22, 127—139 (1959).

Zwei von R. Nevanlinna mitgeteilte Sätze über fastkonforme Abbildungen werden bewiesen [s. *Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A* 1 251/7 (1958)].  $y = y(x)$  sei eine eindeutige und stetig differenzierbare Funktion für  $0 < |x| \leq R$ . In der Umgebung von  $x = 0$  seien die folgenden Bedingungen erfüllt:  $\lim_{r \rightarrow 0} rM(r) = 0$ , und  $\int_0^{\bar{E}_r} \bar{E}_r dr < \infty$ ; hier ist  $M(r) = \max_{|x|=r} |y(x)|$  und  $\bar{E}_r = \max_{r \leq |x| \leq R} |E_{yx}(x)|$ , wo die Größe  $E_{yx}(x)$  die Abweichung der Abbildung  $x \rightarrow y$  von der Konformität charakterisiert. Dann gilt für jedes im Kreis  $|x| \leq R$  befindliche Gebiet  $g_x$  (mit dem Rande  $\partial g_x$ ,  $0 \in g_x$ ):  $y(x)$  ist für  $x = 0$  stetig und

$$y(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial g_x} \frac{y(x)}{x} dx - \frac{1}{2\pi i} \int_{g_x} \frac{E_{yx}(x)}{x} d\sigma_x.$$

Ist allgemeiner  $\int_0^{\bar{E}_r} \frac{\bar{E}_r}{r^n} dr < \infty$ , wo  $E_r = \max_{|x| \leq r} |E_{yx}(x)|$ , so gilt die folgende asymptotische Entwicklung  $y(t) = \sum_{v=0}^n c_v t^v + t^n \varepsilon(t)$ , wo die Konstanten  $c_v$  durch die Formel

$$2\pi i c_v = \int_{\partial g_x} \frac{y(x)}{x^{v+1}} dx - \int_{g_x} \frac{E_{yx}(x)}{x^{v+1}} d\sigma_x$$

bestimmt sind.

Y. Juve.

Belinskij (Belinsky), P. P.: On areal measure in quasiconformal mapping. *Doklady Akad. Nauk SSSR* 121, 16—17 (1958) [Russisch].

Es sei  $w = f(z)$  eine  $q$ -quasikonforme Abbildung eines Rechteckes  $K \subset (z)$  auf ein Rechteck aus  $(w)$ , bei der die Ecken sich entsprechen. Sind  $S_1$  und  $S_2$  zwei verschiedene Teilmengen von  $K$ , für die  $S_1 \cup S_2 = K$  ist, so stellt Verf. folgende Ungleichung fest:

$$(1) \quad \frac{1}{\sqrt{q}} \leq \left( \text{mes } S_1 \iint_{S_1} \frac{D(u,v)}{D(x,y)} dx dy \right)^{1/2} + \left( \text{mes } S_2 \iint_{S_2} \frac{D(u,v)}{D(x,y)} dx dy \right)^{1/2}.$$

Wenn  $\text{mes } S_1 = \sigma$ ,  $\text{mes } f(S_1) = \sigma + \Delta\sigma$ , und  $1 - q^{-1} = \varepsilon$  ist, so schätzt Verf. die Inhaltsveränderung für kleines  $\varepsilon$  wie folgt ab:  $|\Delta\sigma| \leq \sqrt{\varepsilon} + O(\varepsilon)$ . Aus (1) leitet er einen neuen einfachen Beweis folgenden bekannten Satzes ab: durch eine Abbildung aus der abgeschlossenen Hülle der Klasse von  $q$ -quasikonformen Abbildungen erhalten sich die Mengen vom Maß Null.

C. Andreian Cazacu.



## Modulfunktionen. Automorphe Funktionen. Fastperiodische Funktionen:

Lint, J. H. van: On the multipliersystem of the Riemann-Dedekind function  $\eta$ . Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 61, 522—527 (1958).

Verf. gibt eine elementare und reizvolle, aber etwas mühsame Bestimmung für die expliziten Multiplikatorwerte der Dedekindschen  $\eta$ -Funktion bei Ausübung beliebiger Modulsstitutionen  $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Die Bestimmung vermeidet die Heranziehung Dedekindscher Summen; die  $v(S)$  werden aus den Werten von  $v$  für die Erzeugenden  $S = U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  und  $S = T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  der Modulgruppe  ${}_1\Gamma$  konstruiert. Das Verfahren beruht wesentlich auf der folgenden Relation, die zwischen den Werten eines (geraden oder ungeraden) abelschen Charakters  $v_0 = v_0(S) = v_0 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  auf  ${}_1\Gamma$  besteht: Ist  $p$  eine Primzahl  $> 3$ , so gilt:

$$(1) \quad v_0 \begin{pmatrix} a & bp \\ c & d \end{pmatrix} = v_0^p \begin{pmatrix} a & b \\ cp & d \end{pmatrix}, \text{ wenn } \begin{pmatrix} a & b \\ cp & d \end{pmatrix} \in {}_1\Gamma \text{ und } c \text{ ganz.}$$

Ein Beweis findet sich bei Hecke, einen anderen erbringt der Verf. Aus dem genannten Sachverhalt folgt, daß  $v$  als ein Charakter auf der Modulargruppe  $\mathfrak{M}[12]$  (der Modulgruppe im Restklassenring mod 12) aufgefaßt werden kann. Durch Betrachtung der Kommutatorgruppen der  $\mathfrak{M}[3]$  und  $\mathfrak{M}[4]$  läßt sich zeigen, daß  $v_0 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \zeta^{g(a,b,c,d)}$  ist, wo  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in {}_1\Gamma$ ,  $g(a,b,c,d) = (a+d)c - bd(c^2-1)$  und  $v_0(U) = \zeta$  eine 12-te Einheitswurzel angibt. Bezeichnet nun  $v$  das Multiplikatorsystem von  $\eta$ , so ist  $v^2 = v_0$  ein ungerader abelscher Charakter auf  ${}_1\Gamma$ , und hier liefert die Anwendung einer Heckeschen Formel die fehlende Vorzeichenbestimmung und damit das gesuchte Ergebnis.

H. Petersson.

Rankin, R. A.: The construction of automorphic forms from the derivatives of given forms. Michigan math. J. 4, 181—186 (1957).

Es sei  $\Gamma$  eine in der oberen  $z$ -Halbebene diskontinuierliche Gruppe linearer Substitutionen  $z \rightarrow Tz$ , deren Matrizen  $T = \begin{pmatrix} a & d \\ c & d \end{pmatrix}$  reelle Elemente und die Determinante 1 haben.  $\{\Gamma, k, v\}$  bezeichne die Gesamtheit der automorphen Formen der Gruppe  $\Gamma$ , deren Dimension  $= k$  ist und die zu dem Multiplikatorsystem  $v$  gehören. Sind  $m+1$  automorphe Formen  $f_i(z) \in \{\Gamma, k_i, v_i\}$  ( $0 \leq i \leq m$ ) gegeben, so entsteht die Frage nach denjenigen Polynomen  $P(z)$  in den  $f_i$  und deren Ableitungen, welche wieder automorphe Formen zur Gruppe  $\Gamma$  darstellen. Verf. behandelt diese Frage wie im Falle  $m=0$  (s. z. B. Gundlach, dies. Zbl. 79, 104) unter dem folgenden Gesichtspunkt: Das gesuchte Polynom  $P(z)$  ist formal zu konstruieren und habe dann die genannte Eigenschaft für jede willkürliche Wahl der  $\Gamma, k_i, v_i, f_i \in \{\Gamma, k_i, v_i\}$  ( $0 \leq i \leq m$ ). Hierfür ergibt sich eine notwendige und hinreichende Bedingung, die etwa besagt, daß  $P$  als Polynom in gewissen expliziten Ausdrücken darstellbar ist, die durch rationale Operationen (insbesondere Determinantenbildung) aus den  $f_i$  und ihren Ableitungen entstehen. In Spezialfällen kann dadurch unter Benutzung einer Aussage nach Art des Riemann-Rochschen Satzes bewiesen werden, daß eine einzelne automorphe Form  $f_0 = f$  ( $m=0$ ) einer homogenen algebraischen Differentialgleichung genügt.

H. Petersson.

Lehner, Joseph: The Fourier coefficients of automorphic forms on horocyclic groups. II. Michigan math. J. 6, 173—193 (1959).

(Teil I, s. dies. Zbl. 81, 76). — Es bezeichne  $\Gamma$  eine Grenzkreisgruppe von erster Art, die in der oberen Halbebene  $\mathfrak{H}$  der komplexen  $\tau$ -Ebene ( $\tau = x + iy, y > 0$ ) operiert.  $\Gamma$  enthalte parabolische Substitutionen. Es sei  $f(\tau)$  eine automorphe Form  $\{\Gamma, -r, v\}$ , d. h.  $f(\tau)$  gehöre zur Gruppe  $\Gamma$ , zur Dimension  $-r$  und zum Multiplikatorsystem  $v$ ; überdies sei  $r \leq 0$ ,  $|v| \equiv 1$  und  $f$  in  $\mathfrak{H}$  holomorph. Daraus folgt

nach einem allgemeinen Satz, daß  $f$  nicht ganz sein kann, also in mindestens einer Spitze (d. h. einem parabolischen Fixpunkt) von  $\Gamma$  eine negative Ordnung aufweisen muß. Da die automorphe Form  $f$  durch ihre in diesem Sinne erklärten Hauptteile in den endlich vielen Spitzen eines Fundamentalbereichs von  $\Gamma$  eindeutig bestimmt ist, entsteht die Aufgabe, sie aus den Hauptteilkoeffizienten explizit zu konstruieren. Diese Aufgabe wird vom Verf. mit Hilfe einer Modifikation der Methode der Kreisintegration (Farey dissection) dahin gelöst, daß er eine explizite Darstellung der Fourierkoeffizienten von  $f$  zu nicht negativen Exponenten  $n + \kappa$  ableitet, die für  $r < 0$  genau, für  $r = 0$  mit einem Fehler bestimmter Größenordnung gilt. Hinsichtlich der Struktur dieser Formel ist auf die Originalabhandlung zu verweisen. Für den Beweis ist einerseits wesentlich, daß die arithmetisch definierte Farey dissection durch eine andersartige Zerlegung der Integrationsstrecke ersetzt werden muß. Diese Zerlegung, die mit einer vom Ref. angewendeten (dies. Zbl. 82, 295) im wesentlichen übereinstimmt, entspricht der Aufspaltung der Integrationsstrecke durch die Spitzensektoren der Bereiche, die aus einem festen Fundamentalbereich von  $\Gamma$  durch Ausübung der Substitutionen von  $\Gamma$  hervorgehen. Andererseits wird bei der Integration die einzelne Teilstrecke durch den oberen Teilbogen des die Teilstrecke als Sehne umfassenden Kreises (Parazykels) ersetzt, der die reelle Achse in der zugehörigen Spitze von  $\Gamma$  berührt. Die Ergebnisse stimmen für  $r < 0$  mit denen des Ref. überein, für  $r = 0$  sind sie mit einem Restglied  $O(1)$  gegenüber  $O(\sqrt{n})$  schärfer als die des Ref., betreffen hier aber nur multiplikative Funktionen von  $\Gamma$ , nicht dagegen die Integrale automorpher Formen der multiplikativen Differentialklassen  $\{\Gamma, -2, v\}$  ( $|v| \equiv 1$ ). Das Hauptglied hat überall die Größenordnung  $(n + \kappa)^\alpha e^{c\sqrt{n+\kappa}}$  mit festen  $\alpha, c$  ( $\alpha < 0 < c$ ). *H. Petersson.*

**Neville, E. H.:** The elliptic integrals of the third kind. *Canadian J. Math.* 11, 175—194 (1959).

Verf. hat in seinem Buch (Jacobian Elliptic Functions, 2nd ed., Cambridge 1951, dies. Zbl. 43, 76) die Theorie der Jacobischen elliptischen Funktionen neu formuliert. Sie wird dadurch ähnlich übersichtlich und gegen Gittertransformationen invariant wie die Weierstraßsche Theorie, während die Vorteile der Jacobischen Funktionen für die Anwendungen erhalten bleiben. In der vorliegenden Arbeit stellt er die elliptischen Integrale dritter Gattung nach denselben Richtlinien dar. Damit hat er das Programm seines Buches vollständig durchgeführt. *H. Lenz,*

**Guinand, A. P.:** Concordance and the harmonic analysis of sequences. *Acta math.* 101, 235—271 (1959).

If  $\{a_n\}$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) is a periodic sequence of period  $N$ , then there is a finite Fourier series for  $\{a_n\}$  which can be written

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=1}^N b_m e^{2\pi i m n / N} \quad \text{where} \quad b_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=1}^N a_m e^{-2\pi i m n / N}.$$

Consider the "weighted sequences"  $\{a_n, \alpha_n\}$  ( $a_n$  weight attached to  $\alpha_n$ ) and  $\{b_n, \beta_n\}$ , where  $\alpha_n = \beta_n = n(2\pi/N)^{1/2}$ . Then

$$(*) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \sum_{-T < \beta_n < T} b_n e^{i\beta_n x} &= \begin{cases} a_n & (x = \alpha_n) \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \sum_{-T < \alpha_n < T} a_n e^{-i\alpha_n x} &= \begin{cases} b_n & (x = \beta_n) \\ 0 & \text{elsewhere.} \end{cases} \end{aligned}$$

The author wants to generalize this reciprocity between two periodic weighted sequences to more general weighted sequences  $\{a_n, \alpha_n\}$  where the  $\alpha_n$  are not necessarily equally spaced. A weighted sequence  $\{a_n, \alpha_n\}$  in which the  $\alpha_n$  are real and arranged in increasing order of magnitude is said to be  $B^2$  a. p. with respect to a function  $A(x)$



if the function  $\sum'_{0 \leq \alpha_n \leq x} a_n - A(x)$  is  $B^2$  almost periodic. Here the dash indicates that the terms  $a_n$  corresponding to  $\alpha_n = 0$  and  $\alpha_n = x$  are to be halved if they occur, and if  $x$  is negative the sum is to be interpreted as  $-\sum'_{x \leq \alpha_n \leq 0} a_n$ . The general investigations of the paper are carried out under the assumption that  $A(x)$  is of the special form  $A(x) = Ax$  with  $A$  a constant. Let

$$(**) \quad \sum'_{0 \leq \alpha_n \leq x} a_n - Ax \sim c_0 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \neq 0}^{\infty} \frac{b_n}{\beta_n} e^{i\beta_n x} \quad (\beta_0 = 0).$$

Assume that: 1. The  $\beta_n$  have no finite point of accumulation, and arrange them in increasing order of magnitude, 2. For some  $B$  and some  $\delta$  in  $0 < \delta < \frac{1}{2}$

$$0 < \beta_n \leq x \quad b_n - Bx = O(x^\delta) \text{ as } x \rightarrow \pm \infty,$$

3. The Fourier series on the right-hand side of (\*\*) converges in mean square over every finite interval to the function on the left-hand side, 4.  $\sum'_{0 \leq \alpha_n \leq x} a_n - Ax = o(x)$

as  $x \rightarrow \pm \infty$ , 5.  $\sum_{\alpha_n \neq 0} \left| \frac{a_n}{\alpha_n} \right|^2$  is convergent. Then the weighted sequence  $\{b_n, \beta_n\}$  is

$B^2$  a. p. with respect to  $Bx$ . As the goal of his general investigations the author arrives at sufficient conditions that the weighted sequence  $\{a_n, \alpha_n\}$  with which he started and the weighted sequence  $\{b_n, \beta_n\}$  deduced from (\*\*) satisfies the inversion formula (\*). A section is devoted to the study of such meromorphic almost periodic functions (quotients between analytic almost periodic functions) whose poles with their residues as weights form a  $B^2$  a. p. weighted sequence with respect to  $Ax$  ( $A$  constant). In a final section it is remarked that the Riemann hypothesis is equivalent to the hypothesis that the weighted sequence  $\{p^{-m/2} \log p, \pm m \log p\}$  ( $p$  prime,  $m = 1, 2, 3, \dots$ ) is  $B^2$  a. p. with respect to  $4 \sinh \frac{1}{2} x$ . E. Følner.

### Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen:

Luxemburg, W. A. J.: On the convergence of successive approximations in the theory of ordinary differential equations. III. Nieuw Arch. Wiskunde, III. Ser. 6, 93—98 (1958).

Die Problematik ist ähnlich wie in den früheren Arbeiten (s. dies. Zbl. 81, 78; 84, 77). Die Voraussetzungen werden ein wenig verallgemeinert. Verf. beweist zuerst den Fixpunktsatz für die Abbildung  $T$ , welche auf einem verallgemeinerten vollständigen metrischen Raume  $X$  (in welchem die Entfernung  $d(x, y)$  je zweier Punkte  $x, y \in X$  nicht notwendig endlich ist) definiert wird, und welche lokal die Eigenschaften einer Kontraktion besitzt (d. h. es gibt eine solche Konstante  $C > 0$ , daß für je zwei Elemente  $x, y \in X$ , für welche  $d(x, y) \leq C$  ist, die Ungleichung  $d(Tx, Ty) \leq \varrho d(x, y)$ ,  $0 < \varrho < 1$ , gilt). Durch Verwendung dieses Fixpunktsatzes beweist er dann den Satz von Kooi (Thesis V. U., Amsterdam 1956) über die gleichmäßige Konvergenz der Piccardschen Approximationen

$$\varphi_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(u, \varphi_{n-1}(u)) du, \quad n = 1, 2, \dots,$$

gegen die Lösung  $\varphi(t)$ ,  $\varphi(t_0) = x_0$ , der Differentialgleichung  $x' = f(t, x)$  auf einem Intervall  $\langle t_0 - c, t_0 + c \rangle$  unter folgenden Bedingungen: 1.  $f(t, x)$  ist stetig auf dem Gebiete  $R$ :  $0 < |t - t_0| \leq a$ ,  $|x - x_0| \leq b$ ,  $a, b > 0$ ; 2. auf  $R$  gilt:  $|f(t, x)| \leq M |t - t_0|^p$ ,  $p > -1$ ,  $M > 0$ ;  $|t - t_0|^r |f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq k |x_1 - x_2|^q$ ,  $q \geq 1$ ,  $k > 0$ ,  $q(1 + p) - r = p$ ,  $\varrho = k(2M)^{q-1}/(1 + p)^q < 1$ . M. Švec.

Schmeidler, F.: Partikuläre Integrale von dynamischen Gleichungssystemen. Astron. Nachr. 285, 58—64 (1959).

Untersucht wird die Frage, wann ein dynamisches System  $dx_i/dt = \xi_i(x_1, \dots, x_n)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) partikuläre Lösungen besitzt, welche vorgegebene Beziehungen zwischen den Koordinaten  $F_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, F_l(x_1, \dots, x_n) = 0$  erfüllen. Falls die  $F_k(x_1, \dots, x_n)$  ( $1 \leq k \leq l = n - m < n$ ) unabhängig sind und aus  $F_k = 0$  ( $k = 1, 2, \dots, l$ ) die Gleichungen  $\sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial F_k}{\partial x_i} = 0$  ( $k = 1, 2, \dots, l$ ) folgen, beweist Verf. unter geeigneten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen die Existenz partikulärer Lösungen  $x_i = x_i(t, c_1, \dots, c_m)$  der gesuchten Art mit  $m$  willkürlichen Integrationskonstanten. Anwendung dieses Satzes auf das Dreikörperproblem ergibt einen neuen Beweis für die Existenz Lagrangescher Lösungen, bei denen die drei Massen ein gleichseitiges Dreieck bilden. *H. Rüßmann.*

**Bruwier, L.:** Sur une équation différentielle linéaire. *Mathesis* 68, 105—110 (1959).

Es handelt sich um die Differentialgleichung

$$\sum_{r=0}^n \frac{(a x + b)^r}{r!} \left( \frac{d^r f}{dt^r} \right)_{t=c x + d} y^{(r)} = 0;$$

$a, b, c, d$  sind gegebene Konstante,  $f(t)$  ein bekanntes Polynom vom Grade  $n$ . Falls  $a \neq 0$  ist, so läßt sich die betrachtete Differentialgleichung in eine Eulersche Gleichung transformieren. Falls aber  $a = 0$  ist, so erhält man durch geeignete Transformation eine Differentialgleichung von der Form:

$$P^{(n)}(x) z^{(n)}/n! + P^{(n-1)}(x) z^{(n-1)}/(n-1)! + \dots + P(x) z = 0.$$

$P(x)$  ist ein Polynom vom Grade  $n$ .

*S. Fenyő.*

**Hille, Einar:** An application of Prüfer's method to a singular boundary value problem. *Math. Z.* 72, 95—106 (1959).

Verf. behandelt mit dem von Prüfer für diese Differentialgleichung eingeführten Polarkoordinaten-Verfahren die Eigenwertaufgabe, die aus  $b(x) y'' + \lambda y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$  und der Bedingung besteht, daß es zu  $\lambda$  eine für alle  $x \geq 0$  existierende Lösung  $y_0(x, \lambda)$  gibt, die für  $x \rightarrow \infty$  einen Limes hat. Nach Bemerkungen über schon erledigte Fälle wird bewiesen: Es sei  $b(x) = (x+1)^2 \omega(x)$ ,  $\omega(x) > 0$ , stetig differenzierbar,  $\omega'(x) > 0$  für große  $x$  und schließlich

$$(*) \quad I = \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{b(s)}} < \infty.$$

Dann gilt für den  $n$ -ten Eigenwert

$$\lambda_n = (\pi n/I)^2 (1 + o(1)) \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Der Fall, daß (\*) nicht gilt, wird unter zusätzlichen Bedingungen ebenfalls behandelt.

*E. Kamke.*

**Buckens, F.:** Über Eigenwertscharen. *Österreich. Ingenieur-Arch.* 12, 82—93 (1958).

Verf. betrachtet die  $r$  gewöhnlichen selbstadjungierten, volldefiniten Eigenwertprobleme  $2m$ -ter Ordnung

$$M[y] = \lambda^{(e)} N_e[y] \quad (e = 1, \dots, r), \quad U_\mu[y] = 0 \quad (\mu = 1, \dots, 2m).$$

$\lambda_1^{(e)}$  sei jeweils der kleinste Eigenwert. Das  $r$ -parametrische zusammengesetzte Problem

$$M[y] = \sum_{e=1}^r \lambda^{(e)} N_e[y]$$

besitze bei gleichen Randbedingungen die positive Eigenwertschar  $(\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r)})$ .

Zunächst wird die bekannte Temple-Dunkerleysche Formel  $\sum_{e=1}^r \frac{\lambda^{(e)}}{\lambda_1^{(e)}} \geq 1$  diskutiert

und ein stetiges Analogon dazu bewiesen. Soll das zusammengesetzte Problem nichttriviale Lösungen haben, dann müssen zwischen den  $\lambda^{(e)}$  gewisse charak-



teristische Beziehungen der Form  $F_n(\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r)}) = 0$  bestehen. Verf. zeigt, daß die zugehörigen Flächen in einem  $(\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r)})$ -Raum gewisse Konkavitätseigenschaften bzw. Hüllflächeneigenschaften für Ebenenfamilien haben. Beispiele: Axial gedrückte Schwingstäbe mit Differentialgleichungen der Form

$$(\alpha y'')' = -Py'' + \omega^2 my - \left[ y' \int_x^L \gamma(\xi) d\xi \right],$$

unter verschiedenen Voraussetzungen über  $\alpha$ ,  $P$ ,  $\omega^2$  und  $\gamma(x)$  bei verschiedenen Randbedingungen. G. Bertram.

**Rojtenberg (Roitenberg), Ja. N. (J. N.):** On the accumulation of perturbations in non-stationary linear systems. Doklady Akad. Nauk SSSR 121, 221—224 (1958) [Russisch].

Consider  $\sum f_{jk}(D) y_k = x_j(t)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , with  $f_{jk}$  polynomials in  $D$  with variable coefficients such that  $(f_{jk}(D))$  is non-singular; let  $m_k \geq 1$  be the order of the highest derivative of  $y_k$ . The author shows that if the matrix of the coefficients of  $D^{m_k} y_k$  is not identically zero then the system can be transformed into the

form  $\dot{z}_j + \sum a_{jk}(t) z_k = X_j(t)$ ,  $j = 1, \dots, \sum_1^n m_k$  where  $X_{l_j}$  is linear in  $x_k(t)$  for  $l_j = \sum_1^j m_k$  and  $X_j \equiv 0$  otherwise. Thus properties of  $y_j$  important in certain applications can be obtained from those of  $x_j(t)$  and  $z_j$ . H. A. Antosiewicz.

**Kondrat'ev (Kondratiev), V. A.:** The zeros of the solutions of equation  $y^{(n)} + p(x)y = 0$ . Doklady Akad. Nauk SSSR 120, 1180—1182 (1958) [Russisch].

Es werden die Sturm- und Kneserschen Vergleichskriterien für die Oszillation der Lösungen von Differentialgleichungen verallgemeinert. Man untersucht die Differentialgleichung (1)  $y^{(n)} + p(x)y = 0$ . Die Funktion  $p(x)$  wird stetig auf dem Intervall  $\langle a, \infty \rangle$  vorausgesetzt. Man sagt, daß die Gleichung (1) die Eigenschaft  $A$  hat, wenn jede ihre Lösungen entweder unendlich viele Nullstellen auf  $\langle a, \infty \rangle$  besitzt oder wenn sie monoton gegen Null für  $x \rightarrow \infty$  konvergiert. Wenn jede Lösung von (1) höchstens  $n - 1$  Nullstellen besitzt, so nennt man die Gleichung (1) nichtoszillatorisch. Folgende zwei Theoreme werden angeführt: T. 1. Es sei  $p(x) \geq q(x) > 0$ . Wenn die Gleichung  $y^{(n)} + q(x)y = 0$  die Eigenschaft  $A$  hat, so hat diese Eigenschaft auch die Gleichung (1). T. 2. Es sei  $p_1(x) \leq p(x) \leq p_2(x)$ . Sind die Gleichungen  $y^{(n)} + p_1(x)y = 0$ ,  $y^{(n)} + p_2(x)y = 0$  nichtoszillatorisch, so ist auch die Gleichung (1) nichtoszillatorisch. Einige Folgerungen werden mittels dieser Theoreme abgeleitet, indem man als Vergleichsgleichung die Eulersche Gleichung  $y^{(n)} + kx^{-n}y = 0$  nimmt. M. Švec.

**Opial, Z.:** Sur un critère d'oscillation des intégrales de l'équation différentielle  $(Q(t)x')' + f(t)x = 0$ . Ann. Polon. math. 6, 99—104 (1959).

In  $(Q(t)x')' + f(t)x = 0$  seien  $Q, Q', f$  in  $\langle 0, +\infty \rangle$  stetig,  $Q > 0$ ,  $\int_0^\infty \frac{ds}{Q(s)} = +\infty$  und es existiere eine positive, mit ihrer Ableitung stetige Funktion  $\omega(t)$  mit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \omega(s) \left\{ f(s) - Q(s) \left[ \frac{\omega'(s)}{2\omega(s)} \right]^2 \right\} ds = +\infty;$$

dann ist die Differentialgleichung oszillatorisch, d. h. jede Lösung hat in  $\langle 0, +\infty \rangle$  unendlich viele Nullstellen. Durch passende Wahl von  $\omega(s)$  erhält man hieraus einige schon in der Literatur bekannte Kriterien als Spezialfälle. Wenn für  $Q \equiv 1$  die Differentialgleichung nicht oszillatorisch ist, so besitzt sie ein Integral  $x(t)$  mit  $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{appr } x(t) = \infty$ , d. h. für jedes endliche  $k$  hat die Menge der  $t$ -Werte mit  $x(t) < k$  ein endliches Lebesguesches Maß. Hier darf statt  $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{appr}$  nicht einfach  $\lim$  geschrieben werden. L. Collatz.

**Barrett, John H.:** Second order complex differential equations with a real independent variable. *Pacific J. Math.* 8, 187—200 (1958).

Die durch (1)  $\dot{s} = q\bar{c}$ ,  $\dot{c} = -q\bar{s}$ ,  $s(a) = 0$ ,  $c(a) = 1$  in  $I(a \leq x < \infty)$  definierten Funktionen  $c(x) = c[a, x; q]$  und  $s(x) = s[a, x; q]$  [für  $q(x) = q_1(x) + i q_2(x) \neq 0$  mit stetigen reellen Funktionen  $q_1, q_2$ ; der Punkt bedeutet Ableitung nach  $x$ ] haben einige Eigenschaften mit cosinus und sinus gemeinsam. Sie sind Lösungen der Gleichung (2)  $(\dot{y}/q)\bar{q} + y = 0$ , und es gilt  $|s|^2 + |c|^2 = 1$ , die Funktionen sind also beschränkt (die Funktionen werden nur im Reellen betrachtet); für komplexes  $k$  mit  $|k| = 1$  gilt  $s[a, x; kq] = ks[a, x; q]$  und  $c[a, x; kq] = c[a, x; q]$  in  $I$ . Es folgen Sätze über Darstellung in Polarkoordinaten (z. B.  $s[a, x; q] = h(x) \exp[i\alpha(x)]$ ) und über den oszillatorischen Charakter von  $s$  und  $c$ . Für gewisse Klassen von  $q$  ist  $s$  oszillatorisch und  $c$  hat in  $I$  keine Nullstelle. Die allgemeinere Gleichung (3)  $(p\dot{y})' + fy = 0$  (mit  $p = p_1 + ip_2 \neq 0$ ,  $f = f_1 + if_2$ ,  $p_v$  und  $f_v$  reell stetig in  $I$ ) kann durch eine „komplexe Prüfer-Transformation“ auf (2) zurückgeführt werden. Ist  $y$  eine Lösung von (3) mit  $y(a) = 0$ ,  $y \neq 0$  und wird  $\omega(x) \neq 0$  aus der Klasse  $C'$  beliebig gewählt, so gibt es stetige Funktionen  $\rho \neq 0$ ,  $q \neq 0$  mit  $y = \rho s[a, x; q]$ ,  $p\dot{y} = \bar{\omega} \bar{\rho} \bar{c}[a, x; q]$ . Mittels dieser Transformation können Untersuchungen über Beschränktheit und über Oszillationscharakter getrennt durchgeführt werden.

*L. Collatz.*

**Szarski, J. et T. Wazewski:** Sur l'existence des intégrales asymptotiques des équations différentielles issues d'un ensemble de dimension zéro. *Colloquium math.* 6, dédié à C. Kuratowski, 215—218 (1958).

Let  $\dot{x} = f(x, y, t)$ ,  $\dot{y} = g(x, y, t)$  where  $f, g$  are continuous on an open set  $W \subset E^3$  and such that through every point of  $W$  there passes a unique solution. Let  $Z \subset E^3$  be a compact totally discontinuous set with at least two distinct points and such that if  $K$  is a homeomorph of the (open) unit ball in  $E^3$  and if  $p \in Z \cap K$  and  $q \in Z - \bar{K}$  then  $Z \cap \partial K \neq \emptyset$ ; such a set  $Z$  exists and has dimension zero. The authors show that  $Z$  contains at least one point for which the trajectory through it can be continued to the right indefinitely and remains in  $T: |x| < 1, |y| < 1, t \in E$ , provided these assumptions hold:  $\bar{T} \subset W$ , and if  $A: |x| = 1, |y| \leq Y, t \in E$ , and  $B_i: |x| \leq 1, y = (-1)^{i+1}, t \in E, i = 1, 2$ , then  $Z \cap (B_i - A) \neq \emptyset$  and  $Z \subset T \cup B_1 \cup B_2 - A$ ; moreover,  $xf < 0$  on  $A$  and  $yg > 0$  on  $B_1 \cup B_2$ . The proof is based on Wazewski's topological method.

*H. A. Antosiewicz.*

**Mikolajski, Z.:** Remarque sur la structure de l'ensemble engendré par les intégrales asymptotiques d'un système d'équations différentielles. *Colloquium math.* 6, dédié à C. Kuratowski, 219—221 (1958).

Verf. zeigt am Beispiel  $\dot{x} = -x \varrho^2(x, y)$ ,  $\dot{y} = y \varrho^2(x, y)$ , wo  $\varrho$  die Euklidische Distanz von  $(x, y)$  zu dem festen Punkt  $(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b)$  in  $R: |x| \leq a, |y| \leq b$  bedeutet, daß die Menge der Punkte, durch welche die Lösungen für alle  $t > 0$  in  $R$  fortgesetzt werden können, nicht zusammenhängend zu sein braucht. Dies bejaht eine Frage, die Wazewski für Systeme  $\dot{X} = F(X, Y)$ ,  $\dot{Y} = G(X, Y)$  mit ähnlichen Eigenschaften aufgeworfen hat.

*H. A. Antosiewicz.*

**Golomb, Michael:** Solution of certain nonautonomous differential systems by series of exponential functions. *Illinois J. Math.* 3, 45—65 (1959).

Verf. knüpft an die Arbeit von W. Wasow (s. dies. Zbl. 81, 79) an und verallgemeinert seine Resultate. Es handelt sich um das System (1)  $y' = f(y) + \sum_{k=1}^{\infty} g_k e^{i w_k x}$ .

Dabei bedeutet  $y$  einen  $n$ -dimensionalen Vektor,  $f(y)$  eine Vektorfunktion,  $g_k$  konstante Vektoren und  $w_k$  reelle Zahlen. Man unterscheidet zwei Fälle: a) die Zahlen  $w_k$  sind rational unabhängig; b) die Zahlen  $w_k$  sind rational abhängig — d. h. es gibt eine Zahl  $w \neq 0$  so, daß  $w_k$  Vielfache von  $w$  sind. Es gehe das System (1) durch die Substitution  $u = y - a$  in das System (2)  $u' = A u + h(u) +$



$+\sum_{k \geq 1} g_k e^{i w_k x}$  über.  $A$  bedeutet eine konstante Matrix, deren Eigenwerte die Zahlen  $i v_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ ,  $v_j$  nicht notwendig alle verschieden, sind.  $h(u)$  bedeutet eine Vektorfunktion, deren Komponenten  $h_j$  in Form von Potenzreihen der Veränderlichen  $u_1, u_2, \dots, u_n$  darstellbar sind, welche Reihen höchstens mit der Potenz 2 beginnen und für  $\|u\| \leq \varrho \left( \|u\| = \max_j |u_j| \right)$  konvergieren. Es sei  $M$

die Menge der Zahlen  $\mu$ , die lineare Kombinationen von  $w_1, w_2, \dots$  mit nichtnegativen ganzen Koeffizienten sind. Es sei  $\inf_{j=1, 2, \dots, n; \mu \in M} |v_j - \mu| = \delta > 0$ . Unter den

angeführten Bedingungen hat das System (1) im Falle a) eine Lösung, welche in der Form (3)  $y = a + \sum_{r \geq 1} a_r e^{i \mu_r x}$ ,  $\mu_r \in M$ , darstellbar ist. Die Reihe auf der rechten Seite konvergiert absolut und gleichmäßig für  $-\infty < x < \infty$ , wenn  $\sum_{k \geq 1} \|g_k\| \leq \gamma$  ist. Die Zahl  $\gamma > 0$  hängt nur von  $f$  ab. Im Falle b) hat das System

$y' = f(y) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k e^{i k w x}$  eine Lösung, die in Form einer absolut konvergierenden

Fourierschen Reihe (4)  $y = a + \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{i k w x}$  darstellbar ist, wenn keiner der

Eigenwerte  $i v_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , gleich einer der Zahlen  $i k w$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , ist

und wenn  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|g_k\| \leq \gamma$  ist. Die Koeffizienten  $a_r$  bzw.  $a_k$  lassen sich schritt-

weise aus Systemen von linearen Gleichungen ausrechnen. Ist das System (1) reell, so ist auch die Lösung (3) bzw. (4) reell. Es sei weiter  $q v_0 - \mu_0 = 0$ , wo  $q \geq 2$  eine ganze Zahl und  $i v_0$  ein Eigenwert der Matrix  $A$  ist, d. h. es sei  $a_0 e^{i(\mu_0/q)x}$  eine Lösung des Systems  $u' = A u$ . Dann hat das System (1) im Falle a) eine Lösung, die in der Form

$$y = a + a_0 e^{i(\mu_0/q)x} + \sum_r a_r e^{i(\mu_r/q)x}$$

darstellbar ist, wenn  $\|a_0\|$  klein genug ist. Die Koeffizienten  $a_r$  hängen von  $a_0$  ab und lassen sich schrittweise aus gewissen Systemen von linearen Gleichungen ausrechnen. Die Zahlen  $\mu_r$  sind lineare Kombinationen von  $\mu_0, q w_1, q w_2, \dots$  mit nichtnegativen ganzen Koeffizienten. Im Falle b) ist die Situation ähnlich. Wenn  $i p q^{-1} w$ ,  $p$  und  $q$  relativ prim, ein Eigenwert der Matrix  $A$  ist und wenn keiner der übrigen Eigenwerte der Matrix  $A$  gleich einer der Zahlen  $i(m(p/q) + k)w$ ,  $m = 1, 2, \dots$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , ist, so hat das System (1) eine Lösung der Form

$$y = a + a_0 e^{i(p/q)wx} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ m \geq 1}}^{\infty} a_{k,m} e^{i(m(p/q) + k)wx},$$

$\|a_0\|$  klein genug. Wenn  $\sum_k g_k e^{i w_k x}$  eine periodische Funktion der Periode  $\tau$  ist, so hat das System (1) unendlich viele periodische Lösungen mit der Periode  $q\tau$ . Am Ende der Arbeit wird die Stabilität der Lösung (3) bzw. (4) behandelt. Außerdem betrachtet Verf. auch das System (5)  $y' = g(x, y)$ . Von der Funktion  $g(x, y)$  verlangt er, daß das System (5) durch die Substitution  $u = y - ay$  in das System

$$(6) \quad u' = A(x)u + h(x, u) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k e^{i w_k x}$$

übergehe und daß

$$A(x) = A + \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{i w_k x} \quad \text{und} \quad h(x, u) = \sum_{\substack{\nu=1 \\ \sum_{\nu=1}^n k_\nu \geq 2}} h_{k_1, k_2, \dots, k_n} u_1^{k_1} u_2^{k_2} \dots u_n^{k_n}$$

sei. Es wird dann die Existenz der Lösung von (5) bewiesen, die sich in der Form  $y = a + \sum_{r \geq 1} a_r e^{i w_r x}$  darstellen läßt.

M. Švec.

Loud, W. S.: Periodic solutions of  $x'' + c x' + g(x) = \varepsilon f(t)$ . Mem. Amer. math. Soc. Nr. 31, 58 p. (1959).

Verf. behandelt die Existenz, Eindeutigkeit und Stabilität der periodischen Lösungen der Differentialgleichung (1)  $x'' + c x' + g(x) = \varepsilon f(t)$ ,  $' = \frac{d}{dt}$ , für kleine Werte von  $\varepsilon$  und  $c$  ( $c \geq 0$ ). Es wird vorausgesetzt:  $f(t)$  periodisch,  $g(x) = 0$  für  $x = 0$  oder für  $x$  in einem Segment, der den Anfangspunkt umfaßt,  $x g(x) \geq 0$ . Es werden besonders die periodischen Lösungen von (1) studiert, welche für  $\varepsilon = c = 0$  in die periodischen Lösungen von (2)  $x'' + g(x) = 0$  übergehen und welche dieselbe Periode wie  $f(t)$  haben. Unter den oben angeführten Voraussetzungen über  $g(x)$  besitzt die Differentialgleichung (1) nur periodische Lösungen. Die Lösungen von (1), welche in der Nähe der einfachsten periodischen Lösung von (2), nämlich  $x \equiv 0$ , verlaufen, werden durch die Methode der Perturbation behandelt. Die Fälle, in denen die Lösungen von (1) in der Nähe der nichtkonstanten Lösung von (2) verlaufen, werden mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen untersucht. In den Stabilitätsfragen der Lösungen von (1) spielt eine wichtige Rolle die Abhängigkeit zwischen den Perioden und den Amplituden von Lösungen der Differentialgleichung (2), die in den ersten Absätzen beschrieben ist. Zum Schluß werden die Ergebnisse auf die Duffingsche Differentialgleichung und auf das einfache Pendel mit Dämpfung übertragen.

M. Ráb.

Jakubovič (Iakubovich), V. A.: On the boundedness and stability in the whole of the solutions of some non-linear differential equations. Doklady Akad. Nauk SSSR 121, 984—986 (1958) [Russisch].

Verf. untersucht das Verhalten der Lösungen eines von Lué angegebenen Systems von Differentialgleichungen für einen Regelkreis, das eine stetige nicht-lineare Funktion  $\varphi(\sigma)$  enthält. In vier Sätzen, deren Beweise zum Teil nur angedeutet sind, werden die Eigenschaften der Funktion  $\varphi(\sigma)$  zur Abschätzung der Beschränktheit bzw. asymptotischen Stabilität im Ganzen ausgenutzt. Frühere Ergebnisse des Verf. zum gleichen Thema werden hier ergänzt, indem für die charakteristische Gleichung des zugeordneten linearen Systems eine Nullwurzel zugelassen wird. Sind zwei Nullwurzeln vorhanden, dann ist das System stets instabil.

K. Magnus.

### Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

Berruti Onesti, Natalia: Un teorema di esistenza per l'equazione  $F(x, y, z, \partial z/\partial x, \partial z/\partial y) = 0$ . Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser. 13, 89—114 (1959).

È provato il seguente teorema „La funzione  $F(x, y, z, p, q)$  sia definita nel campo  $\Omega_\infty: -\infty \leq x \leq +\infty, -\infty \leq y \leq +\infty, -\infty \leq z \leq +\infty, |p| \leq \Omega_1, |q| \leq \Omega_2$  ( $\Omega_1, \Omega_2$  costanti reali positive), e sia ivi continua assieme alle sue derivate prime, le quali siano inoltre limitate e lipschitziane nel complesso delle variabili in tutto  $\Omega_\infty$ ;  $F_p$  e  $F_q$  non si annullino contemporaneamente. Le funzioni  $f(x), g(x), \pi(x), \chi(x)$  siano definite in un intervallo  $\alpha \leq x \leq \beta$  e siano ivi continue assieme alle  $f'(x), g'(x)$ ; le  $f'(x), \pi(x), \chi(x)$  siano lipschitziane in tale intervallo, e siano inoltre, per  $\alpha \leq x \leq \beta, |\pi(x)| \leq \mu_1 < \Omega_1, |\chi(x)| \leq \mu_2 < \Omega_2, g'(x) = \pi(x) + \chi(x) f'(x), F(x, f(x), g(x), \pi(x), \chi(x)) = 0, F_q(x, f(x), g(x), \pi(x), \chi(x)) - F_p(\dots) \neq f'(x)$ . In tali ipotesi esiste almeno una funzione  $z = z(x, y)$ , definita in un campo  $C$  (precisato nel corso della dimostrazione), la quale è continua in  $C$  assieme alle sue derivate prime, su ogni segmento  $x = x_0 (y = y_0)$  appartenente al campo  $C$ , è, assieme a  $\partial z(x, y)/\partial x, \partial z(x, y)/\partial y$ , a rapporto incrementale limitato rispetto a  $y$  (a  $x$ ) con costante di Lipschitz indipendente da  $x$  (da  $y$ ), soddisfa in tutto  $C$  la

$$F(x, y, z(x, y), \partial z(x, y)/\partial x, \partial z(x, y)/\partial y) = 0,$$

e inoltre soddisfa la condizione  $z(x, f(x)) = g(x), (\alpha \leq x \leq \beta)$ “. La dimostrazione



è fondata sul metodo delle caratteristiche, integrato da considerazioni delicate, che permettono di invertire un cambiamento di variabili, di determinare con precisione in campo  $C$  (al quale appartiene la curva  $y = f(x)$ ), di costruire le tre funzioni  $z = z(x, y)$ ,  $p = p(x, y)$ ,  $q = q(x, y)$ , definite in  $C$ , e soddisfacenti le

$$F(x, y, z(x, y), p(x, y), q(x, y)) = 0, \quad z(x, f(x)) = g(x), \\ p(x, f(x)) = \pi(x), \quad q(x, f(x)) = \chi(x),$$

e di provare che è, in tutto  $C$ ,  $\partial z(x, y)/\partial x = p(x, y)$ ,  $\partial z(x, y)/\partial y = q(x, y)$ .

M. Cinquini-Cibrario.

Haimovici, M.: Sur le prolongement des équations du II-e ordre à une fonction inconnue de deux variables indépendantes et sur les transformations de ces équations. III. An. şti. Univ. "Al. I. Cuza" Iaşi, n. Ser., Sect. I 3, 53—75, russ. und französ. Zusammenfassg. 75 (1957) [Rumänisch].

C'est la dernière partie d'un travail dont les deux premières sont parues dans les mêmes Annales [1, 69—136 (1955); 2, 105—131 (1956)]. On y continue l'étude effective des équations transformables, dont la classification a été donnée dans la première partie. La méthode de recherche est toujours celle du calcul extérieur d'Elie Cartan.

G. Vranceanu.

Budak, B. M. and A. D. Gorbunov: The difference method for the solution of Goursat's non-linear problem. Doklady Akad. Nauk SSSR 117, 559—562 (1958) [Russisch].

Verff. stellen einige Theoreme zusammen über die Existenz von Lösungen der Gleichung  $u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$  mit  $u(x, 0) = \varphi(x)$ ,  $0 \leq x \leq l_x$ ,  $u(0, y) = \psi(y)$ ,  $0 \leq y \leq l_y$ , und betrachten die Bedingungen für gleichmäßige Konvergenz der Lösungen der aus dieser Differentialgleichung hergeleiteten Differenzengleichung.

E. M. Bruins.

Budak, B. M. and A. D. Gorbunov: Straight line method for solving a non-linear boundary problem in a region bounded by a curve. Doklady Akad. Nauk SSSR 118, 858—861 (1958) [Russisch].

Gorbunov, A. D. and B. M. Budak: Die Methode der Geraden zur Lösung einer nicht-linearen Randwertaufgabe in einem Bereich mit krummliniger Begrenzung. Vestnik Moskovsk. Univ., Ser. Mat. Mech. Astron. Fiz. Chim. 13, Nr. 3, 3—12 (1959) [Russisch].

Im erstgenannten Aufsatz werden die Methode und die Resultate skizziert, die im zweiten Aufsatz genau ausgearbeitet und mit Beweisen versehen sind. Verff. stellen die Aufgabe, die Lösung der Gleichung  $u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$  zu finden, wo  $f$  stetig ist und gewissen Lipschitz-Bedingungen genügt im Gebiete  $G$ :  $0 \leq x \leq l_x$ ,  $g(x) \leq y \leq l_y$ ,  $|u| \leq l_u$ ,  $|u_x| \leq l_{u_x}$ ,  $|u_y| \leq l_{u_y}$ ,  $g'(x) \geq 0$  für  $0 \leq x \leq l_x$ ,  $g(0) = 0$ . Die Randbedingungen sind von der Form  $u(x, g(x)) = \varphi(x)$ ,  $0 \leq x \leq l_x$ ;  $u(0, y) = \psi(y)$ ,  $0 \leq y \leq l_y$ . Die gegebene Gleichung wird zuerst umgeschrieben in eine Differenzengleichung

$$u'_{k+1}(y) = u'_k(y) + h f\left(x_k, y, u_k(y), \frac{u_{k+1}(y) - u_k(y)}{h}, u'_k(y)\right),$$

welche eine eindeutig bestimmte Lösung  $u_{k+1}(y)$  liefert. Durch Summieren entsteht auch

$$u'_k(y) = \psi'(y) + h \sum_{i=0}^{k-1} f_i(y), \quad \text{mit } f_i(y) = f\left(x_i, y, u_i(y), \frac{\Delta u_i(y)}{h}, u'_i(y)\right).$$

Integration liefert dann  $u_k(y)$ . Ausgehend von  $\tilde{u}(x, y) = u_k(y) + \frac{\Delta u_k(y)}{h}(x - x_k)$  wird dann eine gleichmäßig gegen die gesuchte Lösung konvergierende Funktionenklasse  $\tilde{u}(x, y)$  erhalten.

E. M. Bruins.

Bicadze (Bitsadze), A. V.: On a Frankl's problem. Doklady Akad. Nauk SSSR 109, 1091—1094 (1956) [Russisch].

Nel piano  $(x, y)$  indichi  $D$  la regione interna alla curva costituita da a) il segmento  $AA'$ ,  $A' = (0, -1)$ ,  $A = (0, 1)$ ; b) l'arco di curva  $x = \int_{-1}^y \frac{du}{\sqrt{K(u)}}$  di estremi

$A', C = (a_1, 0)$ ,  $a_1 = \int_{-1}^0 \frac{du}{\sqrt{K(u)}}$ , essendo  $K(y)$  una funzione definita per  $y \neq 0$ ,

$yK(y) > 0$ ; c) il segmento  $CB$ , con  $B = (a, 0)$ ,  $a > a_1$ ; d) un arco semplice di Jordan  $\sigma = BA$  appartenente al semipiano  $y > 0$ . Assegnate le funzioni  $\psi_1(s)$  ( $s$  arco di  $\sigma$ ),  $\psi_2(x)$ ,  $a_1 \leq x \leq a$ ,  $f(y)$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ , I. Frankl' [Priklad. Mat. Mech. 20, 196—202 (1956)] ha posto il problema della risoluzione dell'equazione di tipo misto  $(')$   $K(y) U_{xx} + U_{yy} = 0$  con le condizioni  $('')$   $U|_{\sigma} = \psi_1$ ,  $U|_{CB} = \psi_2$ ,  $U_x|_{A'A} = 0$ ,  $U(0, y) - U(0, -y) = f(y)$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ . L'A. tratta il caso particolare  $K(y) = \operatorname{sgn} y$  (nel quale la  $(')$  è detta equazione di Lavrentiev) supponendo che  $\sigma$  sia regolare, che  $(''')$   $dy/ds \geq 0$  lungo la  $\sigma$  e che  $\psi_1, \psi_2, f$  siano funzioni hölderiane e prova l'esistenza ed unicità della soluzione, regolare in  $D$ ,  $y \neq 0$ , continua in  $D$ .

R. Conti.

Bicadze (Bitsadze), A. V.: On the uniqueness of the solution of Frankl's problem for Chaplyguin's equation. Doklady Akad. Nauk SSSR 112, 375—376 (1957) [Russisch].

L'A. prova che l'unicità della soluzione del problema  $(')$ ,  $('')$  di Frankl' considerato nel lavoro recensito sopra è assicurata anche senza l'ipotesi  $(''')$ . R. Conti.

Ladyženskaja, O. A.: Über die Konstruktion von unstetigen Lösungen quasilinearer hyperbolischer Gleichungen als Grenzwerte der Lösungen der entsprechenden parabolischen Gleichungen, wenn der „Zähigkeitskoeffizient“ gegen Null strebt. Trudy Moskovsk. mat. Obšč. 6, 465—480 (1957) [Russisch].

Verf. untersucht verallgemeinerte Lösungen der Gleichung  $(1)$   $\partial u / \partial t + \partial \varphi(u) / \partial x = 0$ ;  $u|_{t=0} = \psi$ , die als schwache Grenzwerte der Lösungen  $u(x; \varepsilon_n, n, m)$  der Gleichung  $(2)$

$$\partial u / \partial t + \partial \varphi_m(u) / \partial x = \varepsilon_n \partial^2 u / \partial x^2; \quad u|_{t=0} = \psi_n(x)$$

(wobei  $\psi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \psi$  fast überall,  $\varphi_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \varphi$  gleichmäßig in  $[c_1, c_2]$ ) definiert sind.

Es wird der folgende Satz bewiesen: Voraussetzung:  $\psi$  meßbar und beschränkt;  $0 < c_1 \leq \partial^2 \varphi / \partial u^2 \leq c_2$ . Behauptung: Für beliebiges  $f \in L^2(x, t)$  mit kompaktem Träger gilt:

$$\int_{t \geq 0} \int f(x, t) [u(x; \varepsilon_n, n, m) - u(x, \varepsilon_n, n', m')] dx dt \rightarrow 0$$

für  $n, m, n', m' \rightarrow \infty$ ;  $\varepsilon_n, \varepsilon_n' \rightarrow 0$ . Die Grenzfunktion  $u$  ist beschränkt und meßbar; sie genügt der folgenden Identität

$$(3) \quad \int_0^t \int u \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \varphi(u) \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] dx dt + \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \Phi(x, 0) dx \equiv 0$$

für  $\Phi \in C_0^1(E^2)$  und der Ungleichung  $(4)$   $\Delta^{-1}(u(x + \Delta, t) - u(x, t)) \leq M(t)$ . Es existiert ein einziges meßbares, den Relationen (3), (4) genügendes  $u$ .

K. Maurin.

Pogorzelski, W.: Étude de la matrice des solutions fondamentales du système parabolique d'équations aux dérivées partielles. Recherche Mat. 7, 153—185 (1958).

L'A. considera nelle  $n$  funzioni incognite  $u_1, u_2, \dots, u_n$  delle  $n + 1$  variabili  $x_1, x_2, \dots, x_n, t$  un sistema di  $N$  equazioni lineari omogenee, ciascuna delle quali uguaglia la derivata parziale rispetto a  $t$  di una delle  $u_\alpha$  a una combinazione lineare (con coefficienti funzioni di  $X(x_1, \dots, x_n)$  e  $t$ ) delle  $u_\alpha$  medesime e di tutte le loro derivate parziali rispetto alle  $x_i$  fino a quelle di ordine  $M$ . Il sistema è supposto parabolico nel senso di Petrovsky, onde  $M$  dovrà essere pari. Le ipotesi di regolarità sui coefficienti sono assai generali. Dopo aver determinato una matrice di quasisoluzioni e aver stabilito alcune limitazioni ad essa relative, l'A. passa allo



studio degli integrali analoghi a quello di Poisson-Weierstrass relativo all'equazione del calore considerata in un semispazio, e costruisce poi i quasipotenziali di carica spaziale, provando relativamente a tali integrali teoremi che estendono nel modo più diretto quelli che sono classici nel caso dell'equazione del calore, in particolare studiando la derivabilità del quasipotenziale. Dalla matrice delle quasisoluzioni passa poi alla determinazione della matrice delle soluzioni fondamentali, attraverso la risoluzione di un sistema di equazioni integrali singolari di tipo Volterra, seguendo la traccia del procedimento già usato in un suo precedente lavoro (questo Zbl. 72.103).

G. Cimmino.

**Pogorzelski, W.:** Propriétés des solutions du système parabolique d'équations aux dérivées partielles. Math. Scandinav. 6, 237—262 (1958).

L'A., appoggiandosi sui risultati del lavoro cui si riferisce la precedente recensione, dà, per i potenziali di cariche spaziali costruiti mediante la matrice delle soluzioni fondamentali, i teoremi analoghi a quelli ivi stabiliti per i quasipotenziali. Egli perviene così a dedurre in ipotesi molto generali che il detto potenziale verifica il sistema delle equazioni non omogenee ottenute da quelle di partenza col porre come termini noti le componenti del vettore-densità prese col segno meno. Ne risulta pure una formula risolutiva del problema di Cauchy per tale sistema non omogeneo.

G. Cimmino.

**Pogorzelski, W.:** Premier problème de Fourier pour l'équation parabolique dont les coefficients dépendent de la fonction inconnue. Ann. Polon. math. 6, 15—44 (1959).

L'equazione considerata è del tipo

$$(1) \quad \sum_{\alpha, \beta=1}^n a_{\alpha\beta}(A, t, u) \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \sum_{\alpha=1}^n b_\alpha(A, t, u) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + c(A, t) u - \frac{\partial u}{\partial t} = \\ = F\left(A, t, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right),$$

dove  $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$  varia in una regione  $\Omega$  di frontiera  $S$  e  $t$  varia nell'intervallo  $I(0 \leq t \leq T)$ , la forma quadratica  $\sum_{\alpha, \beta=1}^n a_{\alpha\beta} X_\alpha X_\beta$  essendo supposta definita positiva. In grande generalità di ipotesi sulla regolarità dei dati, viene trattato il problema di determinare in  $\Omega \times I$  una soluzione  $u(A, t)$ , che si riduca a zero per  $t = 0$  e su  $S$ . Sostituendo nei coefficienti e nel secondo membro di (1) alla incognita  $v$  e le rispettive derivate parziali, e applicando poi il metodo della funzione di Green alla equazione lineare in  $u$  (con coefficienti dipendenti da  $v$ ) così ottenuta, si viene a trovare una trasformazione funzionale fra le  $v$  e le  $u$ ; il problema posto si riconduce in tal modo a quello della ricerca di un punto unito nella detta trasformazione funzionale. L'A. riesce a dimostrare che sono verificate, nelle ipotesi poste, le condizioni di applicabilità del teorema di Schauder, e conclude pertanto che esiste il punto unito voluto, cioè una soluzione del problema considerato.

G. Cimmino.

**Hofmann, Rudolf:** Zur Lösung spezieller Wärmeleitungsprobleme. Z. angew. Math. Phys. 10, 233—244, engl. Zusammenfassg. 244 (1959).

Si risolvono, nel caso non stazionario, col metodo della trasformata di Laplace due particolari problemi al contorno per l'equazione della conduzione del calore relativamente ad un mezzo omogeneo e termicamente isotropo, occupante lo spazio interno ad un cilindro rotondo di altezza finita o ad una sfera. Supposta nulla la temperatura iniziale il problema al contorno nasce dal supporre il cilindro o la sfera immersi in un mezzo ambiente a temperatura nulla ad eccezione di una regione variabile col tempo, della superficie cilindrica o sferica a comune col mezzo, ove la stessa temperatura è una funzione assegnata del tempo. Tali condizioni al contorno sono suggerite da particolari problemi di interesse tecnico. Il metodo viene poi appli-

cato ad un problema al contorno del tutto analogo, relativo ad un mezzo occupante la regione interna ad un parallelepipedo retto rettangolo con una distribuzione uniforme di sorgenti di portata costante. *G. Sestini.*

**Montaldo, Oscar:** Un problema di valori al contorno per un'equazione parabolica del quarto ordine. *Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari* 28, 1—8 (1958).

Übersetzung in ein System Volterrascher Integralgleichungen des Problems eine gewissen allgemeinen Randbedingungen befriedigende Lösung  $u(x, y)$  der Gleichung  $u_{xxxx} - 2\lambda u_{xyy} + u_{yy} = 0$  ( $\lambda$  konstant  $> 0$ ) in einem Gebiet des Typus  $\chi_1(y) \leq x \leq \chi_2(y)$ ,  $0 \leq y \leq h$  zu finden. Je nachdem  $\lambda > 1$ ,  $= 1$ , oder  $< 1$  ist, haben die Hauptlösungen, und folglich die entsprechenden Integralgleichungen, verschiedene Formen, die vom Verf. explizit angegeben werden. *G. Cimmino.*

● **Garnir, H. G.:** Les problèmes aux limites de la physique mathématique. Introduction à leur étude générale. (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften. Math. Reihe, Bd. 23.) Basel und Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1958. 234 S. sFr./DM 29,—.

Dans cet intéressant livre, l'A. traite minutieusement un exemple de problème à la limite résolu par les méthodes de l'analyse fonctionnelle, proposées spécialement par S. L. Sobolev, L. Schwartz, J. L. Lions. Il s'agit du problème de type Dirichlet-Neumann pour l'équation

$$(1) \quad a u_t'' + b u_t' + c u - \Delta_x u = m(x, t).$$

Cette équation est considérée comme une équation différentielle concernant la fonction  $u$  de  $t$  avec des conditions initiales de Cauchy et prenant les valeurs dans un espace hilbertien de fonctions en  $x$ . Les dérivées sont considérées dans le sens de la théorie des distributions, mais tous les éléments qui interviennent sont des fonctions localement intégrables. L'A. construit une transformation  $J$  qui réalise l'inversion de la transformation de Laplace dans la théorie des distributions et par laquelle l'équation (1) est réduite à une équation métaharmonique

$$(2) \quad (-\Delta + z)u = f,$$

où  $z$  est un nombre complexe non négatif, ni nul. Les conditions de Dirichlet-Neumann posées pour l'équation (1) restent les mêmes pour l'équation (2). Précisons ces conditions. Soit  $\Omega$  un domaine de l'espace de la variable  $x$  et  $\hat{\Omega}$  sa frontière; on décompose  $\hat{\Omega}$  dans deux parties disjointes  $\hat{\Omega}_D$  et  $\hat{\Omega}_N$ , on désigne par  $V(\Omega)$  l'espace hilbertien des fonctions  $u \in L_2(\Omega)$  qui ont les dérivées de premier ordre et le laplacien (au sens de la théorie des distributions) appartenant aussi à  $L_2(\Omega)$ , avec un produit scalaire équivalent à  $\langle u, v \rangle_{L_2} + \sum \langle u'_{x_i}, v'_{x_i} \rangle_{L_2}$ ; de même, on désigne par  $V_{\hat{\Omega}_D}$  le sous-espace de  $V(\Omega)$  formé par les limites des éléments qui s'annulent dans un voisinage (variable avec l'élément considéré) de  $\hat{\Omega}_D$ ; alors la condition de Dirichlet s'exprime par  $u \in V_{\hat{\Omega}_D}$  et la condition de Neumann par

$$\langle \Delta u, v \rangle_{L_2} + \sum \langle u'_{x_i}, v'_{x_i} \rangle_{L_2} = 0.$$

La solution de l'équation (2) avec ces conditions est  $G_z f$  où  $G_z$  est une application linéaire et continue de  $L_2(\Omega)$  sur  $V_{\hat{\Omega}_D}$ , équivalente à la fonctionnelle bilinéaire  $\langle f, v \rangle_{L_2}$  et appelée l'opérateur de Green. Cette application est mise sous forme intégrale au moyen d'une solution élémentaire. A l'opérateur  $G_z$  correspond, pour l'équation (1) un opérateur-distribution  $G_\varphi$  qui donne la solution de cette équation. On discute en détail la forme de la solution pour les cas  $a > 0$  et  $a = 0$ ,  $b > 0$ . Par son contenu, aussi que par la présentation, le livre est très utile à tous ceux qui désirent s'initier dans les méthodes modernes de la théorie des équations aux dérivées partielles. Notons que la lecture ne demande pas des connaissances spéciales d'analyse fonctionnelle, car l'A. introduit toutes les notions nécessaires, en démontrant tous les résultats qu'il fait intervenir dans son exposé. *G. Marinescu.*



Boigelot, A. et H. G. Garnir: Nouvelles expressions des noyaux de Green relatifs aux opérateurs métaharmonique, des ondes et de la diffusion. *Ricerche Mat.* 7, 186—204 (1958).

Les AA. donnent une nouvelle expression intégrale de l'opérateur de Green, en faisant intervenir une solution élémentaire de l'opérateur  $\Delta^k$ . Les formules de représentation en découlent plus simplement que dans le livre de H. Garnir (cf. la recension précédente).

G. Marinescu.

Bellman, Richard: On the non-negativity of Green's functions. *Boll. Un. mat. Ital.*, III. Ser. 12, 411—413 (1957).

Es sei  $\lambda_1$  der kleinste Eigenwert des Eigenwertproblems  $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \lambda u = 0$ ,  $u(x, y, z) \in D$ ,  $u = 0$ ,  $(x, y, z) \in B$ , wo  $B$  der Rand des Gebietes  $D$  ist. Es sei weiter  $q(x, y, z) \leq \lambda_1 - d$ ,  $d > 0$ . Dann ist die Greensche Funktion, die zum Differentialoperator  $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + q(x, y, z)u$  gehört, nicht positiv. Man beweist diese Behauptung, indem man das zugehörige Variationsproblem löst. Man kann dasselbe Resultat erhalten als Folgerung aus einem allgemeinen Resultat, welches Aronszajn und Smith [Techn. Rep. 15, Univ. of Kansas (1956)] durch Verwendung der Theorie des reproduzierenden Kernes ableiteten.

M. Švec.

Rasulov, M. L.: A formula for the expansion of an arbitrary function into a series of fundamental functions in a certain class of boundary problems with a parameter for linear partial differential equations. *Doklady Akad. Nauk SSSR* 120, 252—255 (1958) [Russisch].

Verf. behandelt nach einer Methode, die er in einer 1952 erschienenen Arbeit (dies. Zbl. 48, 332) entwickelt hat, eine Klasse von Randwertaufgaben für lineare partielle Differentialgleichungen mit einem Parameter, die durch eine teilweise Trennung der Veränderlichen ausgezeichnet ist. Dabei ist die Darstellung auf eine übersichtlichere und abgerundete Form als früher gebracht worden. Als Repräsentant der Klasse wird folgende Aufgabe behandelt: Die Gleichung lautet

$$L_1(\tilde{x}, \partial/\partial\tilde{x}, \lambda) v(x, f, \lambda) + a(\tilde{x}) L_2(\tilde{x}, \partial/\partial\tilde{x}) v(x, f, \lambda) = f(x), x = (\tilde{x}, \tilde{x}).$$

Sie wird in einem Gebiet betrachtet, das das Descartessche Produkt zweier beschränkter Gebiete  $D_1$  und  $D_2$  mit den Rändern  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  in Euklidischen Räumen darstellt:  $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_s) \in D_1$ ,  $\tilde{x} = (x_{s+1}, \dots, x_n) \in D_2$ .  $L_1$  und  $L_2$  bedeuten auf  $\tilde{x}$  bzw.  $\tilde{x}$  angewandte lineare Differentialoperatoren, von denen  $L_1$  die Form hat:

$$L_1(\tilde{x}, \frac{\partial}{\partial\tilde{x}}, \lambda) = \sum_{k \leq q-1}^{m+k+l \leq p} \lambda^{mk} A_{k l_1 \dots l_s}(\tilde{x}) \frac{\partial^l}{\partial x_1^{l_1} \dots \partial x_s^{l_s}} - \lambda^p$$

mit den natürlichen Zahlen  $m$  und  $q$  ( $p = mq$ ). Die Randbedingungen sind

$$(1) \quad \lim_{\tilde{x} \rightarrow \tilde{y}} \sum_{k=0}^q \lambda^{mk} B_k(\tilde{y}, \frac{\partial}{\partial\tilde{x}}) v(x) = 0, \quad (2) \quad \lim_{\substack{\tilde{x} \rightarrow \tilde{y} \\ \tilde{y} \in \Gamma_2}} C(\tilde{y}, \frac{\partial}{\partial\tilde{x}}) v(x) = 0.$$

Sie enthalten lineare Differentialoperatoren  $B_k$  bzw.  $C$  bezüglich der Veränderlichen  $\tilde{x}$  bzw.  $\tilde{x}$ , deren Koeffizienten noch von  $\tilde{y} \in \Gamma_1$  bzw.  $\tilde{y} \in \Gamma_2$  abhängen. — Die Methode der Behandlung besteht in der Zerlegung der Aufgabe in zwei Teilrandwertaufgaben und der Zusammensetzung ihrer Lösung aus den Lösungen der beiden Teilaufgaben. Letztere lauten:  $L_2(\tilde{x}, \partial/\partial\tilde{x}) z - \mu z = \varphi(\tilde{x})$  mit der Randbedingung (2) und  $L_1(\tilde{x}, \partial/\partial\tilde{x}, \lambda) w + a(\tilde{x}) \mu w = f(\tilde{x})$  mit der Randbedingung (1). In ihnen sind die Veränderlichen getrennt. Vorausgesetzt wird die Existenz der eindeutigen bestimmten Lösungen für beliebige rechte Seiten der Gleichungen  $\varphi(\tilde{x}) \in L^2(D_2)$  bzw.  $f(\tilde{x}) \in L^2(D_1)$ :

$$z(\tilde{x}, \varphi, \mu) = \int_{D_2} G_2(\tilde{x}, \tilde{\xi}, \mu) \varphi(\tilde{\xi}) d\tilde{\xi}, \quad w(\tilde{x}, f, \mu, \lambda) = \int_{D_1} G_1(\tilde{x}, \tilde{\xi}, \mu, \lambda) f(\tilde{\xi}) d\tilde{\xi}$$

( $\nu = 1, 2, \dots$ ) mit den zugehörigen Greenschen Funktionen  $G_1$  bzw.  $G_2$ , die analytische

Funktionen der Parameter  $\mu$  bzw.  $\lambda$  in der komplexen Ebene darstellen bis auf jeweils abzählbar viele Punkte  $\mu_\nu$  bzw.  $\lambda_{\nu k}$  ( $k=1, 2, \dots$ ), die Pole der zugehörigen Greenschen Funktion. Die Lösung der ursprünglichen Randwertaufgabe lautet dann, sofern sie im gleichen Sinne existiert:

$$v(x, f, \lambda) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{C_\nu} d\mu \int_{D_1} G_2(\tilde{x}, \tilde{\xi}, \mu) \int_{D_1} G_1(\tilde{x}, \tilde{\xi}, \mu_\nu, \lambda) f(\xi) d\xi,$$

$f(x) \in L^2(D_1 \times D_2)$ . Dabei bedeuten die  $C_\nu$  einfach geschlossene Kurven in der Ebene, die jeweils nur einen Pol  $\mu_\nu$  enthalten. — Ähnlich lassen sich die Reihenentwicklungen willkürlicher Funktionen nach den Fundamentalfunktionen der beiden Teilrandwertaufgaben zu einer Reihenentwicklung nach den Fundamentalfunktionen der ursprünglichen Aufgabe zusammensetzen. Die so entstehende Formel ist eine Verallgemeinerung einer von Tamarkin für lineare gewöhnliche Differentialgleichungen angegebenen Formel [Math. Z. 27, 1—54 (1928)] auf die hier betrachtete Klasse von partiellen Differentialgleichungen.

*E. Svenson.*

**Durstine, R. M. and D. H. Shaffer:** Determination of upper and lower bounds for solutions to linear differential equations. *Quart. appl. Math.* 16, 315—317 (1958).

Soit un problème linéaire  $L(u) + \Phi = 0$  dans un domaine  $D$ ,  $M_j(u) = \lambda_j$  sur la frontière  $B$  de  $D$ , tel qu'il lui correspond une fonction de Green  $G(x, \xi)$  de signe constant dans  $D$ ; si on a deux solutions approchées  $w_1$  et  $w_2$  satisfaisant aux conditions aux limites, avec  $L(w_i) + \Phi = \varepsilon_i$ , et si les quantités  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  satisfont à l'une des inégalités  $1 > M \geq \varepsilon_2/\varepsilon_1 \geq m$  ou  $M \geq \varepsilon_2/\varepsilon_1 \geq m > 1$ , alors la solution exacte est comprise entre  $w_1 + (w_1 - w_2)/(M - 1)$  et  $w_1 + (w_1 - w_2)/(m - 1)$ . Deux exemples sont traités.

*Ch. Blanc.*

**Miranker, W. L.:** The  $L^2$ -maximum principle for solutions of  $\Delta u + k^2 u = 0$  in unbounded domains. *Ann. of Math.*, II. Ser. 67, 72—82 (1958).

Si prova qui il seguente teorema, che l'A. chiama principio di massimo in  $L^2$ . Sia  $u$  una soluzione a valori complessi della equazione  $\Delta u + k^2 u = 0$  nel dominio esterno ad una sfera  $n$ -dimensionale di raggio  $a$ ; la  $u$  soddisfi alla condizione di radiazione

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_R} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - i k u \right| R^{n-1} d\omega = 0,$$

ove  $\Sigma_R$  indica la superficie di una sfera  $n$ -dimensionale di raggio  $R$  e centro in un punto fisso arbitrario e  $d\omega$  è l'elemento di superficie della sfera unitaria; allora se  $1 - \varepsilon^2 > 0$ ,  $k$  è reale e  $ka$  sufficientemente grande riesco

$$|u(P)| \leq \lambda \left\{ \int_{\Sigma} |u|^2 a^{n-2} d\omega \right\}^{1/2} + \mu \left\{ \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \left[ \frac{k^2}{\varepsilon^2} \int_{\Sigma} |u|^2 a^{n-2} d\omega + \int_{\Sigma} |V_t u|^2 a^{n-2} d\omega \right] \right\}^{1/2},$$

ove  $\Sigma$  indica la superficie della sfera di raggio  $a$  considerata,  $\lambda$  e  $\mu$  sono costanti positive dipendenti solo da  $k$  ed  $a$  e  $V_t u$  denota la componente tangenziale del gradiente di  $u$ . La dimostrazione è conseguita tramite certe maggiorazioni integrali della derivata normale di  $u$  su  $\Sigma$  mediante i valori della  $u$  e di  $V_t u$  su  $\Sigma$  (Lemma 3), utilizzando la rappresentazione di  $u$  come somma di potenziali di strato su  $\Sigma$ . Tali maggiorazioni sono analoghe a quelle stabilite da M. I. Višik (questo Zbl. 42, 337) per le soluzioni dell'equazione di Laplace in una sfera.

*L. Cattabriga.*

### Variationsrechnung:

**Ladyženskaja (Ladyzhenskaia), O. A.:** Differential properties of weak solutions of some  $n$ -dimensional variation problems. *Doklady Akad. Nauk SSSR* 120, 956—959 (1958) [Russisch].



The problem consists in the determination of the inf of the functional

$$I(u) = \int_{\Omega} F(u_i) dx, \text{ where } dx = dx_1 \cdots dx_n, u_i = \partial u / \partial x_i, i = 1, \dots, n;$$

$\Omega$  is a bounded region of the  $n$ -dimensional Euclidean space,  $F$  is twice continuously differentiable with respect to its arguments, satisfying some further conditions. The problem is as follows: among all functions  $u$ , satisfying the relation  $u(x) - \varphi(x) \in \tilde{W}_p^1(\Omega)$ , where  $W$  is the space of all functions summable in some way together with some of their derivatives on the region  $\Omega$ , determine  $\inf I(u)$ . The function which realizes this inf is named a generalized solution of this variational problem. Two theorems are explained and generalized. Contrary to other authors (Bernstein, Tonelli, Morrey, Cesari, Nirenberg, Miranda, Stampacchia, Giorgi, etc.) in this paper the author presents a very simple and natural way for the determination of generalized solutions. D. Rašković.

**Plotnikov, V. I.:** Über die Differenzierbarkeit der Lösungen regulärer Variationsaufgaben in nicht-parametrischer Form. Mat. Sbornik, n. Ser. 47 (89), 355—396 (1959) [Russisch].

Making use of results of other authors (Bernstein, Lichtenstein, Hopf, Morrey, Sigalov, Stampacchia, Saks, Kronrod, Kazimirov, McShane) in this detailed paper a new method is explained for the determination of conditions under which the continuous solution of the regular problem of the calculus of variations satisfies Lipschitz's conditions. The paper has three chapters. The first chapter deals with the formulation and the proof of the basic problem (see author, this Zbl. 80, 86). The generalized saddle formed solution is given and the majors are obtained. The second chapter of the paper is devoted to the major approximations  $(F_n)$  based on the Vandermonde determinant. The third chapter deals with the proof of the theorem: "Let  $z(x, y) \in C^3$ ,  $(x, y) \in K^e$ :  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq \varrho^2$ , be the solution of the Euler-Lagrange equation of the corresponding function  $F$ , satisfying the conditions: the function  $F(x, y, z, p, q)$  is determined and continuous at all points  $(x, y) \in G$ , where  $G$  is a bounded twice measured space, there exists the relation  $F = f(F^{(1)}(p, q) + F^{(2)}(x, y, z, p, q)$ ,  $f(x, y, z) > 0$ ,  $F^{(1)}(p, q)$  homogeneous on  $p, q$  with degree  $\alpha \geq 2$ , satisfying the condition  $F_{pp}^{(1)} F_{qq}^{(1)} - (F_{pq}^{(1)})^2 > 0$ ,  $p^2 + q^2 = 1$ ;

$$|\partial^{\beta} F^{(2)} / \partial p^m \partial q^n \partial x^r \partial y^s \partial z^t| \leq L(p^2 + q^2)^{(\alpha - r - m - n)/2},$$

$m + n + r + s + t = \beta$ ,  $\beta = 0, 1, \dots, 5$ , the functions  $F_n$  are determined for  $(x, y) \in K^e$ :  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq \varepsilon^2$ ,  $K^e \subset G$  and for  $z \in J^{z_0} = (-z_0, z_0)$ ,  $z_0 > 0$ ,  $z_0 \neq f(n)$ , then

$$\max \{z_x^2(x, y) + z_y^2(x, y)\}^{1/2} \leq M/(\varrho^2 - \varrho_1^2)$$

if  $(x, y) \in K^{e_1}$ :  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq \varrho_1^2 < \varrho^2$ , and  $M > 0$  depends only on  $\max |z(x, y)|$ , on  $L, \gamma, \Delta$  and does not depend on  $F$  and  $z(x, y)$ ." D. Rašković.

**Cinquini, Silvio:** Sopra un teorema relativo alle estremanti di una classe di problemi variazionali. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser. 11, 137—147 (1957).

In due precedente note (vedi questo Zbl. 82, 101, 318) l'A. ha comunicato i risultati raggiunti in queste ricerche dedicate ai problemi di calcolo delle variazioni relativi a integrali curvilinei in forma parametrica dipendenti dagli elementi differenziali dei primi due ordini  $J_{C^{(2)}}^{(2)} = \int F(x, y, x', y', \theta') ds$ , dove  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$ ,  $x' = x'(s)$ ,  $y' = y'(s)$ ,  $\theta' = \theta'(s)$ ,  $s$  è la lunghezza dell'arco rettificato e  $\theta'(s)$  la curvatura della curva ordinaria  $C^{(2)}$ . Nella presenta nota l'A. si occupa della dimostrazione di tale teorema, per superare le difficoltà inerenti ai problemi variazionali, supponendo che la funzione  $F(x, y, x', y', \theta')$  è definita e continua insieme con le sue derivate parziali  $F_x, F_y, F_{x'}, F_{y'}, F_{\theta'}$ , in ogni punto  $(x, y)$  del campo  $A$ , per ogni

coppia di numeri  $x', y'$  non entrambi nulli e per ogni valore finito di  $\theta'$ , e positivamente omogenea di grado 1 rispetto alle variabili  $x', y'$  e tale che sia  $F(x, y, 0, \theta') = 0$ , e che si considerano le curve ordinarie  $C^{(2)}$ ,  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$ , con  $x(s)$ ,  $y(s)$  assolutamente continue con le loro derivate del primo ordine e tali che esista finito l'integrale (di Lebesgue)  $J_{C^{(2)}}^{(2)}$ ;  $\theta(s)$  è l'angolo di direzione. Supponiamo che in ogni  $A_\lambda$  appartenente ad  $A$ , si possano determinare sei numeri positivi  $N_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $R < 1$ ,  $\eta < 1$ ,  $H \geq 1$ , che in tutti i punti  $(x, y)$  di  $A$ , per tutte  $x', y'$  normalizzate, per ogni coppia  $\varphi_0, \varphi_1$  con  $\varphi_0^2 + \varphi_1^2 \leq R^2$  e per  $|\theta'| \geq H$ , risulti sei equazioni per punto  $(x + \varphi_0, y)$  o  $(x, y + \varphi_0)$  dal campo  $A$ . Se  $C_0^2 [x = x(s), y = y(s), 0 \leq s \leq L]$  è una curva ordinaria  $C^{(2)}$  minimante  $J_{C^{(2)}}^{(2)}$  in una classe  $K^{(2)}$  di curve  $C^{(2)}$  ogni arco  $x = x(s), y = y(s), s_1 \leq s \leq s_2$ , di  $C_0^{(2)}$  è un'estremaloide di ordine 2 relativa alla funzione  $F$ , esistono due equazioni

$$\int_{s_1}^s ds \int_{s_1}^s F_q ds - \int_{s_1}^s [F_{q'} - 2 q' \theta' F_{\theta'}] ds - \frac{d}{ds} \int_{s_1}^s \bar{q}' F_{\theta'} ds = C_i + C_{i+1} s,$$

$q = x, y$ ,  $q = \bar{y} \circ \bar{x}$ ,  $i = 1, 2$ . Due osservazioni e tre esempi mettono in luce l'efficacia di questo teorema e assicurano l'esistenza di almeno un'estremale di ordine 2, congiungente due punti qualunque prefissati del piano  $(x, y)$ , in ciascuno dei quale è assegnato l'angolo di direzione  $\theta(s)$ .  
D. Rašković.

**Barthel, Woldemar:** Über homogene Funktionen auf dem Graßmann-Kegel. Arch. der Math. 9, 262—274 (1958).

Sowohl in der Variationsrechnung als auch in der Geometrie eines mehrfachen Integrals

$$\int F\left(x^j(u^\mu), \frac{\partial x^j}{\partial u^\mu}\right) du^1 \dots du^p$$

wird die Existenz gewisser Funktionen gebraucht, die man als verallgemeinerte Ableitungen der homogenen Grundfunktion  $f(x^j, X^J) = F(x^j, X_\mu^j)$  nach den i. a. voneinander abhängigen Graßmann-Koordinaten  $X^J = p! X_{[1}^{j_1} \dots X_{p]}^{j_p}$  betrachten kann. Für die „erste Ableitung“ wurde das Problem von H. Kneser im Fall  $p = 2$  und daran anknüpfend von Velte bei beliebigem  $p$  gelöst. Die „zweite Ableitung“ führte Iwamoto ebenfalls für beliebiges  $p$  ein. In vorliegender Note behandelt Verf. allgemeine Methoden zur Bildung von Ableitungen nach Graßmann-Koordinaten, die er auch für Erhalten der dritten Ableitung für  $p = 2$  gebraucht hat.

W. Wrona.

**Laugwitz, Detlef:** Geometrische Behandlung eines inversen Problems der Variationsrechnung. Ann. Univ. Saraviensis 5, 235—244 (1957).

Verf. gibt notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, daß ein durch  $\ddot{x}^i + 2\Gamma^i(x, \dot{x}) = 0$  gegebenes Wegesystem ( $\Gamma^i$  homogen 2. Ordnung in  $\dot{x}$ ) aus den Extremalen einer Finsler-Metrik  $ds = F(x, dx)$  besteht:  $F(x, \eta)$  muß unter dem Parallelverschiebungsprozeß (\*)  $d\eta^i = -\frac{\partial}{\partial \eta^k} \Gamma^i(x, \eta) dx^k$  invariant sein. Für die analytische Behandlung erweist sich eine andere Formulierung als günstiger: Die Holonomiegruppe  $H(x)$  der Parallelverschiebung (\*) muß  $F(x, \eta)$  invariant lassen. Diese Bedingung erlaubt nun, alle Finsler-Metriken zu dem vorgegebenen Wegesystem zu konstruieren. Wenn speziell  $H(x)$  für ein  $x$  von freier Beweglichkeit, d. h. transitiv auf der Mannigfaltigkeit der Richtungen in  $x$  ist, so sind zwei Finsler-Metriken, deren Extremalen die betrachteten Wege sind, proportional. Schließlich wird noch der Spezialfall untersucht, in dem durch das gegebene Wegesystem ein linearer Zusammenhang definiert wird. Dabei zeigt sich u. a.: Wenn es eine definite Finsler-Metrik gibt, deren Extremalen durch  $\ddot{x}^i + \Gamma_{kj}^i \dot{x}^k \dot{x}^j = 0$  gegeben sind, so existiert auch eine definite Riemann-Metrik mit der gleichen Eigenschaft.

W. Barthel.



**Aczel, Otto:** Umkehrung des Problems der Brachistochrone. Lucrările ști. Inst. Ped. Timișoara, Mat.-Fiz. 1958, 207—209, deutsche und russ. Zusammenfassung 209—210 (1959) [Rumänisch].

Es wird eine Kurve gegeben und man sucht jenes Kräftefeld, für welches die Kurve eine Brachistochrone ist. Man findet ein System zweier partieller Differentialgleichungen, deren Lösung eben das Potential des Feldes darstellt. Zum Schluß wird ein Beispiel angeführt.

Aus der deutschen Zusammenfassung.

### Integralgleichungen. Integraltransformationen:

**Edwards, D. A.:** A class of singular integrals. Proc. London math. Soc., III. Ser. 9, 161—176 (1959).

Let  $x(t)$  be a function from a real interval  $I$  to a real or complex Banach space  $X$ ; for each compact interval  $[a, b] \subset I$  let  $E(a, b, x)$  denote the set of all the sums  $\sum_{v=1}^n [x(t_{2v}) - x(t_{2v-1})]$  where  $a \leq t_1 \leq \dots \leq t_{2n} = b$ , and let  $E(I, x) = \bigcup \{E(a, b, x) : (a, b) \subset I\}$ . The function  $x$  is called to be of class  $D(I)$  if the set  $E(I, x)$  is bounded; if this set is conditionally weakly compact, it is called of class  $S(I)$ . The principal theorem of the paper states that the function  $x$  is in  $D(I)$  if and only if  $x^*x(t)$  is of bounded variation for every  $x^*$  in the conjugate space  $X^*$ ;  $x$  is in  $S(I)$  if and only if the operation  $x^* \rightarrow x^*x(t)$  is weakly compact as acting from  $X^*$  to the space  $BV(I)$  of functions of bounded variation on  $I$ . By aid of this theorem there is obtained a theorem dealing with the behaviour of the singular integrals. Let  $\varphi_n(t, u)$  be Lebesgue integrable in  $u$  over  $I = [c, d]$  for any  $t$  and any  $n$ . For any  $x \in S(I)$  there exist the Bochner integrals

$$J_n(x, t) = \int_c^d \varphi_n(t, u) x(u) du.$$

$$\text{Let } \Phi_n(t, v) = \int_t^v \varphi_n(t, u) du \text{ for } v \geq t, = \int_v^t \varphi_n(t, u) du \text{ for } v < t.$$

Then the following properties are equivalent:

- (a)  $J_n(\xi, t) \rightarrow \frac{1}{2} [\xi(t+0) + \xi(t-0)]$  as  $n \rightarrow \infty$  for any  $\xi \in BV(I)$
- (b)  $J_n(x, t) \rightarrow \frac{1}{2} [\xi(t+0) + \xi(t-0)]$  strongly as  $n \rightarrow \infty$  for any  $x \in S(I)$ ,
- (c) for each fixed point  $t$  interior to  $(a, b)$  the sequence  $\Phi_n(t, v) \rightarrow \frac{1}{2}$  boundedly for  $t < v \leq d$  and  $c \leq v < t$  as  $n \rightarrow \infty$ . The convergence in  $I$  is uniform over every weakly compact subset of the space of functions of bounded variation. The paper ends with applications to functions of two variables. Let  $x(t)$  be a function from  $I$  to the space  $BV(I)$  and let  $x(t) = \xi(t, \cdot)$  be its representation as the function of two variables. Then  $x \in D(I)$  if and only if the following conditions are satisfied (i)  $\xi$  is of Fréchet's bounded variation on  $I \times I$ , (ii)  $\xi$  is of bounded variation in each variable separately. From this a theorem of Morse and Transue about continuity of functions satisfying (i) and (ii) is deduced. Let  $F(I)$  denote the class of functions satisfying (i) and (ii). Then setting

$$L_{mn} = \int_c^d \int_c^d \varphi_m(t, u) \varphi_n(s, v) \xi(u, v) du dv$$

we have

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} L_{mn} = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} L_{mn} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} L_{mn}$$

$$= \frac{1}{4} [\xi(t+0, s+0) + \xi(t+0, s-0) + \xi(t-0, s+0) + \xi(t-0, s-0)]$$

for every  $\xi \in F(I)$  if and only if the condition (c) is satisfied. *A. Alexiewicz.*

**Michlin (Mikhlin), S. G.:** Singular integrals in  $L_p$  spaces. Doklady Akad. Nauk SSSR 117, 28—31 (1957) [Russisch].

1. Faisant suite à ses travaux antérieurs [Uspechi mat. Nauk 3, Nr. 3 (25), 29—112 (1948); Vestnik Leningradsk. Univ. 11, Nr. 1 (Ser. Mat. Mech. Astron. 1)

3—24 (1956)], l'A. expose dans cette note le Théorème 1. Si le symbole  $\Phi(x, \theta)$  de l'opérateur singulier

$$(1) \quad Au = a(x)u(x) + \int_{E_m} \frac{f(x, \theta)}{r^m} u(y) dy$$

ainsi que ses dérivées  $\partial\Phi/\partial\theta_1, \partial^2\Phi/\partial\theta_1\partial\theta_2, \dots, \partial^{m-2}\Phi/\partial\theta_1 \dots \partial\theta_{m-2}$ , sont continus pour toute valeur fixe de  $x$ , et bornés indépendamment de  $x$ , tandis que la dérivée  $\partial^{m-1}\Phi/\partial\theta_1 \partial\theta_2 \dots \partial\theta_{m-2} \partial\theta_{m-1}$  existe en tant que dérivée généralisée et vérifie l'inégalité

$$\int_0^\pi \dots \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial^{m-1}\Phi}{\partial\theta_1 \dots \partial\theta_{m-2} \partial\theta_{m-1}} \right|^{p'} d\theta_1 \dots d\theta_{m-2} d\theta_{m-1} \leq c = \text{const.},$$

$1 < p' < \infty$ , dans ces conditions, l'opérateur  $A$  est fermé dans l'espace  $L_p(E_m)$ ,  $(1/p + 1/p' = 1)$  des fonctions  $p$ -intégrables dans l'espace euclidien à  $m$  dimensions  $E_m$ . Le théorème 1 reste encore valable lorsque  $E_m$  est une variété de Liapounoff fermée et à  $m$  dimensions. — 2. L'A. considère ensuite l'opérateur

$$(2) \quad A_1 u = a(x)u(x) + \int_{E_m} \frac{f(x, \theta)}{r^m} u(y) dy + Tu$$

où:  $T$  est un opérateur complètement continu dans  $L_p(E_m)$ ;  $A_1$  vérifie les conditions du théorème 1 et  $A_1 \neq 0$ . Moyennant en outre certaines hypothèses concernant le coefficient  $a(x)$  et la caractéristique  $f(x, \theta)$ , alors:  $\alpha$ )  $A_1$  est normalement valable dans  $L_p(E_m)$  (théorème 2) et  $\beta$ ) l'équation  $A_1 u = 0$  admet dans  $L_p(E_m)$  un nombre fini de solutions linéairement indépendantes. L'index de l'opérateur  $A_1$  (i. e. la différence entre les nombres de solutions linéairement indépendantes des équations  $A_1 u = 0$  et  $A_1^* u = 0$ ) est nul (théorème 3). Dans ces conditions l'alternative de Fredholm s'applique à l'équation (3):  $A_1 u = g(x)$ ,  $g(x) \in L_p(E_m)$ . *S. Vasilache.*

**Koppelman, W. and J. D. Pineus: Spectral representations for finite Hilbert transformations.** Math. Z. **71**, 399—407 (1959).

In Anknüpfung an die bekannte Hilbert-Transformation

$$Hx(\lambda) \equiv \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\mu)}{\mu - \lambda} d\mu, \quad x(\lambda) \in L^2(-\infty, +\infty),$$

untersuchen Verff. Transformationen der Form

$$T_{(a,b)} x(\lambda) \equiv \frac{1}{\pi i} \int_a^b \frac{x(\mu)}{\mu - \lambda} d\mu, \quad a < \lambda < b,$$

wo wenigstens eine der Integrationsgrenzen endlich ist. (Das Integral ist im Sinne des Cauchy-Hauptwerts zu verstehen.) Verff. zeigen, daß die Fourier-Plancherel-Theorie zu einer einfachen Spektraldarstellung sowohl für die endliche  $(-\infty < a, b < +\infty)$  als auch für die halibunendliche  $(a = -\infty < b < +\infty \text{ oder } -\infty < a < +\infty = b)$  Hilbert-Transformation führt. Daraus ergibt sich dann, daß  $T_{(a,b)}$  ein einfaches kontinuierliches Spektrum von  $-1$  bis  $+1$  besitzt und  $\|T_{(a,b)}\| = 1$  ist. — Um die im Zusammenhang mit der Fourier-Plancherel-Theorie benötigten Eigenfunktionen von  $T_{(a,b)}$  zu ermitteln, betrachten Verff. die singuläre Integralgleichung

$$(1) \quad \xi x(\lambda) - \frac{1}{\pi i} \int_a^b \frac{x(\mu)}{\mu - \lambda} d\lambda = 0$$

und beschränken sich im folgenden zunächst auf endliche Transformationen. Nach einer bekannten Methode von Carleman wird (1) mittels  $X(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{x(\mu)}{\mu - z} d\mu$  auf ein Randwertproblem der Funktionentheorie zurückgeführt. Verff. gewinnen nun mit Hilfe der Fourier-Plancherel-Theorie Umkehrformeln, welche eine isometri-



sche Korrespondenz zwischen  $L^2(a, b)$  und  $L^2(-1, +1)$  und gleichzeitig die gewünschte Spektraldarstellung von  $T_{(a,b)}$  liefern, und zwar folgendermaßen: Entspricht  $f(\lambda) \in L_2(a, b)$  der Funktion  $g(\xi) \in L^2(-1, +1)$ , so entspricht  $T_{(a,b)} f(\lambda)$  der Funktion  $\xi \cdot g(\xi)$ . Im Falle:  $a = -\infty < b < +\infty$  oder  $-\infty < a < +\infty = b$  wird gezeigt, daß eine halbunendliche Hilbert-Transformation isometrisch äquivalent einer endlichen Hilbert-Transformation ist. Die Arbeit beschließt ein Satz über die isometrische Äquivalenz des mit der endlichen Hilbert-Transformation  $T_{(a,b)}$  verbundenen Differentialoperators

$$D(a, b) \equiv i [(\lambda - a)(b - \lambda)]^{1/2} d[(\lambda - a)(b - \lambda)]^{1/2} / d\lambda$$

mit dem Multiplikationsoperator  $Q g(\xi) \equiv -\left(\frac{b-a}{2\pi} \log \frac{1+\xi}{1-\xi}\right) g(\xi)$ . H. Pachale.

**Benson, Donald C.:** Extensions of a theorem of Loewner on integral operators. Pacific J. Math. 9, 365—377 (1959).

Let  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  be continuous for  $-\infty < t < \infty$ . The curve  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  is said to be of weakly positive sense if for every  $P$  not in the closure of the curve there exists a  $K = K(P) \leq 0$  such that  $\theta_P(\delta) - \theta_P(\gamma) \geq K$  for all  $\gamma, \delta$  ( $\gamma \leq \delta$ ). Here  $\theta_P(t)$  denotes a continuous argument ( $-\infty < t < \infty$ ) of the vector from  $P$  to  $(x(t), y(t))$ . The following extension of a Theorem of Loewner (this Zbl. 32, 74) is proved. Let  $k(t)$  be integrable on the interval  $[0, \infty)$ . Consider

the curves  $(x(t), y(t))$  generated by applying the operator  $y(t) = -\int_0^\infty k(\tau) x(t-\tau) d\tau$

to all almost periodic functions  $x(t)$ . The functions  $y(t)$  are also almost periodic. A necessary and sufficient condition that the curves generated in this way are all of weakly positive sense is that  $k(t)$ , after a possible change on a set of measure zero, is analytic in  $[0, \infty)$ , and that  $k'(t)$  has a representation as a Laplace-Stieltjes

integral  $k'(t) = \int_0^\infty e^{-st} d\mu(s)$  with non-decreasing determining function  $\mu(s)$ .

Other extensions of Loewner's theorem are indicated. Their proofs are given elsewhere.

E. Følner.

•Bochner, Salomon: Lectures on Fourier integrals. With an author's supplement on monotonic functions, Stieltjes integrals, and harmonic analysis. Transl. from the original by Morris Tenenbaum and Harry Pollard. (Annals of Mathematics Studies. Nr. 42.) Princeton, N. J.: Princeton University Press 1959. 333 p. \$ 6,25.

Vgl. die Besprechung der Originale in diesem Zbl. 6, 110; 7, 108.

**Kahane, J. P. et R. Salem:** Sur la convolution d'une infinité de distributions de Bernoulli. Colloquium math. 6, dédié à C. Kuratowski, 193—202 (1958).

Verff. betrachten die Funktion  $\gamma(u) = \prod_{k=0}^\infty \cos \pi u r_k$ , wo  $\sum_{k=0}^\infty r_k$  eine konvergente Reihe mit positiven Gliedern ist. Ihre Summe sei  $a$ . Stellt man diese Funktion mit einem positiven Maß  $\mu$  durch

$$\gamma(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} d\mu(x)$$

dar, so ist  $\mu$  nach einem Satz von Jessen und Wintner (dies. Zbl. 14, 154) entweder absolut-stetig oder rein singulär. Verff. beschäftigen sich mit dem Problem zu entscheiden, für welche Folgen  $r_k$  dieses oder jenes zutrifft. Nimmt man  $a = 1$  und setzt man  $r_0 = 1 - \xi_0$ ,  $r_1 = \xi_0(1 - \xi_1)$ ,  $\dots$ ,  $r_k = \xi_0 \xi_1 \dots \xi_{k-1}(1 - \xi_k) \dots$ , so wird bewiesen: Falls für jedes  $k$   $\xi_k > \frac{1}{2}$  ist, so gilt für (in einem gewissen Sinne) „fast alle“ Folgen, daß  $\gamma(u) \in L^2$ , und dann ist also  $\mu$  absolut-stetig. Sie beweisen, daß die Bedingung a)  $\gamma(u) \in L^2$  äquivalent ist mit jeder der beiden Bedingungen:

b)  $\liminf_{p \rightarrow \infty} \frac{N_p}{4^p \varrho_p} < \infty$  und c)  $\limsup_{p \rightarrow \infty} \frac{N_p}{4^p \varrho_p} < \infty$ , wo  $\varrho_p = \left(\sum_{k=p}^\infty r_k^2\right)^{1/2}$  und  $N_p$  die

## Lösungszahl der Ungleichung

$$|(\pm r_0 \pm r_1 \cdots \pm r_{p-1}) - (\pm r_0 \pm r_1 \cdots \pm r_{p-1})| < \varrho_p$$

ist. Sie geben auch einen expliziten Ausdruck für  $\mu$ . Weiter beschäftigen sie sich mit dem speziellen Fall  $r_k = \xi^k$  ( $0 < \xi < 1$ ). Für die zugehörige Maßfunktion  $\mu = \mu_\xi$  beweisen sie, daß  $\mu(x) = \frac{1}{2} \{ \mu[(x + \pi)/\xi] + \mu[(x - \pi)/\xi] \}$ . Jede Funktion beschränkter Variation, welche dieser Funktionalgleichung genügt, ist eine lineare Funktion von  $\mu_\xi$ . Verff. betrachten schließlich das Produkt  $\gamma_\xi(u) \gamma_\xi(\lambda u)$ , wo  $\gamma_\xi(u)$  die zu  $r_k = \xi^k$  gehörige Funktion  $\gamma(u)$  und  $\lambda > 0$  ist. Schreibt man  $\gamma_\xi(u) \gamma_\xi(\lambda u) = \int e^{iux} dv(x)$ , so gilt: 1. Falls  $\xi > \frac{1}{4}$  ist, so ist  $v$  absolut-stetig und  $dv/dx \in L^2$  für fast alle  $\lambda$ ; 2. Falls  $\xi < \frac{1}{4}$  ist, so ist  $v$  singulär für jedes  $\lambda$  und der Träger des Maßes  $v$  hat das Maß 0; 3. Falls  $\xi < \frac{1}{8}$  und  $\lambda = 1$  ist, so gilt dasselbe; 4. Es sei  $S$  die Menge aller algebraischen Zahlen  $\theta$ , deren von  $\theta$  verschiedene Konjugierte einen Absolutwert  $< 1$  haben. Falls  $\theta = 1/\xi \in S$ , so ist  $v$  singulär, falls  $\lambda$  dem von  $\theta$  erzeugten Körper über dem Körper der rationalen Zahlen angehört mit möglicher Ausnahme von  $\theta = 2$  und  $\theta = 4$ .

H. D. Kloosterman.

**Tanno, Yûkichi:** On the convolution transform. Kôdai math. Sem. Reports 11, 40—50 (1959).

Es wird die Faltungstransformation  $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-t)\varphi(t)dt$  studiert, deren Kern die Gestalt hat:

$$G(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{F(s)} e^{ts} ds \quad \text{mit} \quad F(s) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1-s^2/a_k^2}{1-s^2/c_k^2},$$

wobei  $0 < a_1 \leq a_2 \leq \cdots$ ;  $c_1 \leq c_2 \leq \cdots$ ;  $a_k \leq c_k$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a_n} = \Omega > \Omega' = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{c_n}$ .

Das stellt eine Verallgemeinerung der bei Hirschman and Widder, "The convolution transform" (dies. Zbl. 65, 93), Chap. IX, zugrunde gelegten Kerne dar, bei denen alle  $c_k = \infty$  sind. — Die Umkehrung der Transformation durch einen Differentialoperator wird in üblicher Weise dadurch gewonnen, daß zunächst die Umkehrung für  $F(s) = \prod_{k=1}^n$  bewerkstelligt und dann der Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  gemacht wird.

G. Doetsch.

## Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

**Singer, I.:** Frage des Homöomorphismus unendlichdimensionaler separabler Banachscher Räume. Acad. Republ. popul. Romîne, Inst. Stud. romîno-sovietic, An. romîno-sovietice, Ser. Mat.-Fiz. 12, Nr. 4, 5—24 (1958) [Rumänisch].

C'est un exposé, avec définitions et indications sur les démonstrations, des résultats obtenus par divers auteurs et spécialement par M. I. Kadetz.

G. Marinescu.

**Kelley, J. L.:** Hypercomplete linear topological spaces. Michigan math. J. 5, 235—246 (1958).

Further development of the reviewer's investigation of the open mapping theorem and the notion of  $B$ -completeness (called full completeness here). The author states the well-known equivalence between  $B$ -completeness and the validity of the open mapping and closed graph theorems (see e. g. V. Pták, this Zbl. 82, 325). A new notion is introduced in the following manner. There is a natural uniformity in the family of all subsets of a linear topological space  $E$ : the sets  $A$  and  $B$  are said to be near each other, if  $B \subset A + U$ ,  $A \subset B + U$  for some neighbourhood of zero  $U$  in  $E$ . The space  $E$  is called hypercomplete if the family of all convex circled subsets of  $E$  is complete in this uniformity. A convex space  $E$  is hypercomplete if and only if each almost closed convex circled subset  $Q$  of  $E'$



is weakly closed.  $B$ -completeness being defined by requiring the same condition for linear subspaces  $Q$  of  $E'$ , it follows that each hypercomplete space is  $B$ -complete. The question whether  $B$ -completeness implies hypercompleteness remains open.

V. Pták.

**Kist, Joseph:** Locally  $o$ -convex spaces. Duke math. J. 25, 569—582 (1958).

Eine konvexe Teilmenge  $A$  eines reellen halbgeordneten Vektorraumes (h. o. V. R.) nennt Verf.  $o$ -konvex, wenn  $A$  mit je zwei Elementen  $x, y$  das Intervall  $[x, y] = \{z: x \leq z \leq y\}$  enthält. Ein h. o. topologischer V. R. heißt lokal  $o$ -konvex (l. o. k.), wenn sein Nullumgebungsfilter eine aus  $o$ -konvexen Mengen bestehende Basis besitzt. Ist  $E(\mathfrak{T})$  ein lokalkonvexer V. R., so gibt es unter den l. o. k. Topologien auf  $E$ , die größer als  $\mathfrak{T}$  sind, eine feinste  $[\mathfrak{T}]$ . Eine kurze Diskussion dieser Topologie und anderen vorbereitenden Materials, worunter sich auch ein neuer Beweis der Zerlegbarkeit jeder stetigen Linearform auf einem l. o. k. V. R. in stetig positive Komponenten befindet, bildet den Inhalt der ersten 4 Abschnitte. Das Hauptanliegen der Arbeit ist, wenn wir unter  $f$  einen Homomorphismus (= ordnungserhaltende lineare Abbildung) eines l. o. k. V. R.  $E(\mathfrak{T})$  in einen beliebigen l. o. k. V. R.  $F$  und unter  $P$  den positiven Kegel in  $E$  verstehen, eine Charakterisierung der Klassen Hausdorffscher l. o. k. V. R. mit je einer der Eigenschaften a) Jedes  $f$  ist stetig. b) Jedes auf den beschränkten Teilmengen von  $E$  beschränkte  $f$  ist stetig. c) Jedes auf den beschränkten Teilmengen von  $P$  beschränkte  $f$  ist stetig. Nach dem von den bornologischen Räumen (die für  $P = \{0\}$  in der Klasse b) enthalten sind) her geläufigen Muster werden diese Klassen durch analoge Sätze äquivalenter Bedingungen charakterisiert, z. B. (für b)):  $\alpha$ ) Jede  $o$ -konvexe, alle beschränkten Teilmengen von  $E(\mathfrak{T})$  absorbierende Menge ist Nullumgebung.  $\beta$ ) Kein strikt feinere l. o. k. Topologie als  $\mathfrak{T}$  hat die gleichen beschränkten Mengen.  $\gamma$ )  $\mathfrak{T} = [\tau(E, E')]$ , und jede positive, beschränkte Linearform ist stetig.  $\delta$ )  $E(\mathfrak{T})$  ist  $o$ -induktiver Limes der normierten l. o. k.  $E_B$  ( $B$  eine beliebige  $o$ -konvexe, beschränkte, symmetrische Teilmenge von  $E$ ). (Hierbei ist die Topologie des  $o$ -induktiven Limes die feinste l. o. k. Top. auf  $E$ , für welche die Homomorphismen  $E_B \rightarrow E$  stetig sind.) Schließlich wird gezeigt, daß im Bereich folgendvollständiger h. o. V. R. mit abgeschlossenem  $P$  die Klassen a) und c) zusammenfallen, und es werden Anwendungen auf Vektorverbände gemacht. (Bem. d. Ref.: Die Arbeit hat in den ersten 5 Abschnitten enge Berührung mit einer Arbeit des Ref. (dies. Zbl. 80, 315), in deren Terminologie ein l. o. k. V. R. nichts anderes ist als ein h. o. lokalkonvexer Raum mit normalem positivem Kegel.)

H. Schaefer.

**Semadeni, Z.:** Sur les fonctionnelles linéaires dans des espaces vectoriels semi-ordonnés avec application à représentation des fonctionnelles par des intégrales. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. math. astron. phys. 6, 457—462, russ. Zusammenfassung XXXVII (1958).

Let  $\langle X, || \rangle$  be a normed vector-lattice in which there is defined a notion of limit in Frechet's sense ( $x_n \xrightarrow{l} x_0$ ) which is distributive, lattice order preserving and satisfying the law of three sequences, and is not finer than the convergence generated by the norm. A sequence  $x_n$  is then called  $\gamma$ -convergent ( $x_n \xrightarrow{\gamma} x_0$ ) if  $\sup_n ||x_n|| < \infty$  together with  $x_n \xrightarrow{l} x_0$ . A functional  $\xi$  is called  $l$ -linear ( $\gamma$ -linear) if it is distributive and if  $x_n \xrightarrow{l} x_0$  ( $x_n \xrightarrow{\gamma} x_0$ ) implies  $\xi(x_n) \rightarrow \xi(x_0)$ . The author proves that the spaces  $\mathcal{E}_l$  of the  $l$ -linear functionals and  $\mathcal{E}_\gamma$  of the  $\gamma$ -linear functionals are both vector-sublattices of the space conjugate to  $\langle X, || \rangle$  (provided with the Riesz's ordering); moreover the space  $\mathcal{E}_\gamma$  is closed. Then there is given a characterization of  $\gamma$ -linear functionals in two concrete cases. Misprints: p. 45, line 13  $x_n \xrightarrow{l} x_0$  is to be replaced by  $x_n \xrightarrow{\gamma} x_0$ .

A. Alexiewicz.

**Banaschewski, Bernhard:** Zur Idealtheorie der ganzen Funktionen. Math. Nachr. 19, H. L. Schmid Gedächtnisband, 136—160 (1958).

Vorgegeben seien eine Menge  $E$ , ein System  $\mathfrak{S}$  von Teilmengen von  $E$ , das mit je zwei Mengen auch deren Vereinigung und mit jeder Menge auch alle ihre Teilmengen enthält, ferner eine (additiv geschriebene) abelsche Halbgruppe  $W$  mit Kürzungsregel und Nullelement, in der die Beziehung „es existiert ein Element  $c \in W$  mit  $a + c = b$ “ eine Totalordnung ist. (Wichtigster Spezialfall:  $W = N =$  Menge der nicht negativen ganzen Zahlen). Verf. untersucht die Idealtheorie der geordneten Halbgruppe  $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}(E, \mathfrak{S}, W)$  aller derjenigen Abbildungen  $f$  von  $E$  in  $W$ , deren „Träger“  $T(f) = \{x | f x \neq 0\}$  zu  $\mathfrak{S}$  gehört. Dabei heißt eine Menge  $\alpha \subset \mathfrak{d}$  ein Ideal, wenn sie mit je zwei Funktionen auch deren Minimum, ferner mit jeder Funktion auch jede größere Funktion aus  $\mathfrak{d}$  enthält. Bei vorgegebenem Ideal  $\alpha$  ist das System  $B(\alpha) = \{T(f) | f \in \alpha\}$  eine Basis eines  $\mathfrak{S}$ -Filters (d. h. eines Filters, der eine zu  $\mathfrak{S}$  gehörige Menge enthält)  $T(\alpha)$ , umgekehrt bei vorgegebenem  $\mathfrak{S}$ -Filter  $\mathfrak{F}$  die Menge  $\alpha(\mathfrak{F}) = \{f | f \in \mathfrak{d} \text{ und } T(f) \in \mathfrak{F}\}$  ein Ideal von  $\mathfrak{d}$ . Diese durchgehend ausgenutzte Beziehung zeigt zunächst, daß alle Primärideale (d. h. wenn  $f + g \in \alpha$  und  $f \notin \alpha$ , so  $mg \in \alpha$  bei passend gewählter natürlicher Zahl  $m$ , Spezialfall  $m = 1$ : Primideale) einfach (d. h. in genau einem maximalen Ideal enthalten) sind, und führt im Spezialfall  $W = N$  zu den Ergebnissen: Jedes beschränkte (d. h. eine beschränkte Funktion enthaltende) einfache Ideal ist Potenz eines maximalen Ideals, alle diese Potenzen sind primär, für jedes nichtmaximale Primideal  $\mathfrak{p}$  gilt  $\mathfrak{p}^2 = \mathfrak{p}$ . Zur Kennzeichnung der primen und primären Ideale wird bei vorgegebenem  $\mathfrak{S}$ -Ultrafilter  $\mathfrak{U}$  auf  $E$  eine totale Quasi-Ordnung  $\leq_{\mathfrak{U}}$  in  $\mathfrak{d}$  eingeführt durch „ $f \leq_{\mathfrak{U}} g$  genau dann, wenn  $f_U \leq g_U$  bei geeignetem  $U \in \mathfrak{U}$ “. Kontraktion nach dieser Quasi-Ordnung liefert eine totalgeordnete Halbgruppe  $\mathfrak{d}_{\mathfrak{U}}$ , wobei der kanonische Homomorphismus  $\alpha_{\mathfrak{U}} \cap$ -treu ist. Das Element  $b \in \mathfrak{d}_{\mathfrak{U}}$  heißt von höherer Größenordnung als das Element  $a \in \mathfrak{d}_{\mathfrak{U}}$ , in Zeichen:  $a \ll b$ , wenn für jede natürliche Zahl  $n$  stets  $na \leq b$  ist; die Elemente  $a, b$  heißen von gleicher Größenordnung, wenn weder  $a \ll b$  noch  $b \ll a$  gilt, sie heißen von gleicher Rangordnung, wenn  $a + x = b + y$  mit geeigneten  $x, y \ll a$  gilt. Schließlich heißen die Elemente  $f, g \in \mathfrak{d}$  von gleicher Größenordnung (Rangordnung) längs  $\mathfrak{U}$ , wenn ihre Bilder  $\alpha_{\mathfrak{U}} f$  und  $\alpha_{\mathfrak{U}} g$  von gleicher Größenordnung (Rangordnung) sind. Dann gilt: Die in dem maximalen Ideal  $\alpha(\mathfrak{U})$  enthaltenen Primideale (Primärideale) sind genau diejenigen Ideale, die mit jedem Element auch alle Elemente gleicher Größenordnung (Rangordnung) längs  $\mathfrak{U}$  enthalten; ferner: Die einfachen Ideale  $\mathfrak{e}$  mit  $T(\mathfrak{e}) = \mathfrak{U}$  entsprechen bei dem Homomorphismus  $\alpha_{\mathfrak{U}}$  eindeutig den Idealen von  $\mathfrak{d}_{\mathfrak{U}}$ . Im Falle  $W = N$  ergibt sich, daß die Primteiler genau der beschränkten Ideale sämtlich maximal sind. In dem hierdurch methodisch abgesteckten Rahmen ergeben sich Kriterien für die Existenz nichtmaximaler Primideale sowie Aussagen über Primideale erster (d. h. solche, die nicht Vereinigung echt enthaltener Primideale sind) und zweiter (d. h. nicht erster) Art. Ein weiterer Abschnitt beschäftigt sich mit Durchschnittsdarstellungen von Idealen. Hauptresultate: Jedes Ideal ist Durchschnitt seiner minimalen einfachen Teiler, die isolierten, minimalen, einfachen Teiler eines Ideals sind eindeutig bestimmt, im Falle  $W = N$  erfüllt die Menge aller Ideale  $\mathfrak{c} \supset \alpha$  genau dann die Maximalbedingung, wenn  $\alpha$  nur endlich viele verschiedene Primteiler besitzt. Schließlich wird bewiesen, daß die isolierten Komponenten eines Ideals bestimmt sind durch ihre zugehörigen Primideale. In einem abschließenden Abschnitt wird gezeigt, wie sich die dargestellte Theorie auf die Idealtheorie des Ringes  $\Gamma$  der ganzen Funktionen sowie gewisser durch Bedingungen an die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung gekennzeichneter Teilringe von  $\Gamma$  anwenden läßt.

G. Bruns.

Mrówka, S.: Functionals on uniformly closed rings of continuous functions. Fundamenta Math. 46, 81—87 (1958).

Es wird untersucht, wann alle Homomorphismen  $\varphi \neq 0$  einer Algebra reeller Funktionen  $f(x)$  von der Form  $\varphi(f) = f(x_0)$  sind. (Man vgl. hierzu auch Anderson and Blair, dies. Zbl. 83, 174). Sei  $X$  ein vollständig regulärer topologischer Raum,



$C(X)$  die Algebra aller stetigen reellwertigen Funktionen auf  $X$  ( $+$ ,  $\cdot$  punktweise),  $R$  eine Teilalgebra von  $C(X)$ , die die Konstanten enthält und abgeschlossen gegenüber gleichmäßiger Konvergenz auf  $X$  ist. Sei weiter  $T$  die Menge aller auf  $R_0$ :  $= \{f: f \in R, 0 \leq f(x) \leq 1 \text{ auf } X\}$  definierten Funktionen mit Werten aus dem Intervall  $[0, 1]$ , versehen mit der üblichen kompakten Tychonoff-Topologie, sowie  $F_R: X \rightarrow T$  definiert durch  $F_R(x) = (f(x))_{f \in R_0}$ . Bedeute (A) die Aussage: Alle Homomorphismen von  $R$  auf den Körper der reellen Zahlen haben die Form  $f(x_0)$  mit geeignetem  $x_0 \in X$ ; es wird gezeigt: 1. Enthält  $R$  nur beschränkte Funktionen, so gilt (A) genau dann, wenn  $F_R(X)$  kompakt ist. 2. Enthält  $R$  mit jeder Funktion  $f$ , die auf  $X$  nirgends verschwindet, auch  $1/f$ , so gilt (A) genau dann, wenn  $F_R(X)$   $Q$ -abgeschlossen in  $\bar{F}_R(X)$  ist. Dabei heißt eine Teilmenge  $M$  eines topologischen Raumes  $S$   $Q$ -abgeschlossen, falls es zu jedem  $p \in S - M$  eine  $G_\delta$ -Menge aus  $S - M$  gibt, die  $p$  enthält. (Zu diesem Begriff werden einige Aussagen bewiesen.) Als Folgerung erhält man: 3. Genau dann gilt (A) für jedes  $R$ , das mit  $f(x) \neq 0$  auch  $1/f$  enthält, wenn  $X$  ein Lindelöf-Raum ist (offene Überdeckungen enthalten abzählbare). 4. Ist  $R_1 \subset R_2$ , enthalten beide mit  $f(x) \neq 0$  auch  $1/f$ , trennt  $R_1$  Punkte von abgeschlossenen Mengen in  $X$ , und gilt (A) für  $R_1$ , so gilt (A) auch für  $R_2$ . (Vollständig reguläre  $X$  werden vom Verf. offenbar als  $T_0$ -Räume vorausgesetzt; auch in (IV) und (VI), S. 83/84, scheinen nur Hausdorff-Kompaktifizierungen betrachtet zu werden.)

H. Günzler.

Foguel, S. R.: Biorthogonal systems in Banach spaces. Pacific J. Math. 7, 1065—1072 (1957).

Let  $(x_n, f_n)$  be an biorthogonal system of elements of a Banach space  $X$ , such that  $\|x_n\| = 1$  and such that the sequence  $x_n$  is fundamental. The system  $(x_n, f_n)$  is called regular if the elements  $x_n$  compose a base for  $X$ ; otherwise it is called irregular. Under the notations

$$\varphi_n(x) = \sum_{\nu=1}^n f_\nu(x) x_\nu, \quad |||x||| = \sup_{n=1,2,\dots} \|\varphi_n(x)\|,$$

$$P = \{x: \lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n(x)\| = \infty\}, \quad Q = \{x: |||x||| = \infty\}$$

the following theorems are valid. If the system is irregular, then the set  $P$  is of the first category. The system is regular if and only if  $P = Q$  or, equivalently, if  $\sup_{n=1,2,\dots} \|\varphi_n(x)\| = \infty$  implies  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n(x)\| = \infty$ . Let  $\psi_n(x)$  be the element of the linear span of the elements  $x_1, \dots, x_n$  closest to the element  $x$ ; then the system is regular if and only if  $\sup_{n=1,2,\dots} |||\psi_n(x)||| < \infty$ . As applications some criteria of regularity in Hilbert space are given; let us mention one of them: the system is regular if and only if

$$\inf_{n,p} R \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=n+1}^p f_i(x) f_j(x) (x_i, x_j) \right\} > -\infty \text{ for every } x.$$

A. Alexiewicz.

Inaba, Mituo: A note on coordinated spaces. Kumamoto J. Sci., Ser. A 3, 189—194 (1958).

Le premier théorème de l'A. est une facile extension aux espaces de Fréchet d'un résultat connu de Banach sur les systèmes biorthogonaux. Les autres résultats de l'A. sont des cas particuliers de théorèmes du Recenseur (ce Zbl. 55, 337) non connus apparemment de l'A.

J. Dieudonné.

Mazur, S. and W. Orlicz: On some classes of linear spaces. Studia math. 17, 97—119 (1958).

Let  $N$  be a nonnegative function defined for all real  $t$ . Denote by  $X^N$  the set of all sequences  $x = \{t_n\}$  for which  $\varrho_N(x) = \sum N(t_n)$  is finite. If  $M$  is another such function, we write  $M \sim N$  if  $X^M = X^N$ . Suppose that the following condition is

fulfilled: (\*)  $N(t_n) \rightarrow 0$  if and only if  $t_n \rightarrow 0$ . Under this surprisingly general assumption necessary and sufficient conditions on  $N$  are found for  $X^N$  to be a linear space. In that case  $N$  may be replaced by an  $M \sim N$  which is continuous, even and increasing for  $t \geq 0$ . Further, it is possible to define an  $F$ -norm (in the sense of Mazur-Orlicz) in  $X^N$  such that convergence with respect to this norm is equivalent to the  $\varrho_N$ -convergence. The main result: Let  $N$  satisfy (\*). Then  $X$  is a Banach space if and only if  $N \sim M$  for some continuous convex even function  $M$  vanishing only at 0 and satisfying a condition  $N(2t) \leq KN(t)$  for some  $K$  in a neighbourhood of 0. In the second section analogous questions are discussed for spaces of functions  $x(t)$  on  $\langle 0, 1 \rangle$  with  $\varrho_N(x) = \int N(x(t)) dt$ . V. Pták.

Rolewicz, S.: Some remarks on the spaces  $N(L)$  and  $N(l)$ , *Studia math.* 18, 1—9 (1959).

Further results concerning the class of  $N$ -spaces of Mazur and Orlicz (see the previous review). Several necessary and sufficient conditions are given for the existence of a bounded neighbourhood of zero (a set  $A$  is bounded if  $t_n a_n \rightarrow 0$  for each sequence  $a_n \in A$  and each sequence  $t_n \rightarrow 0$ ). A set  $A$  is shown to be bounded if  $A$  is bounded in  $\varrho_N$  and if  $c(A) < \infty$ ; (for  $c(A)$ , see S. Rolewicz, this Zbl. 79, 126). A necessary and sufficient condition for the existence of nontrivial linear functionals is given. V. Pták.

Dinculeanu, N.: Espaces d'Orlicz de champs de vecteurs. III: Opérations linéaires. *Studia math.* 17, 285—293 (1958).

(Part II see this Zbl. 78, 102) — In a previous paper (this Zbl. 77, 102) the author has defined the Orlicz spaces  $L_A^\phi$  of fields of vectors. In the present paper the author establishes the general form of bounded linear operators  $f$  from  $L_A^\phi$  to a separable Banach space, in form  $f(x) = \int U_f(z) x(z) d\mu(z)$  where  $U_f$  belongs to a field of operators. A. Alexiewicz.

Foiaş, Ciprian: Sur la décomposition spectrale en opérateurs propres des opérateurs linéaires dans les espaces nucléaires. *C. r. Acad. Sci., Paris* 248, 1105—1108 (1959).

Es sei  $\mathfrak{E}$  ein nuklearer Vektorraum,  $\mathfrak{E}^*$  der mit der starken Topologie versehene Raum der stetigen Antilinearformen auf  $\mathfrak{E}$ . Es sei ferner  $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{E}^*$  und  $\langle x, x \rangle > 0$  für  $x \neq 0$  in  $\mathfrak{E}$  und  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  stetig auf  $\mathfrak{E}$  (Beispiele sind die Räume  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{S}$  von Schwartz). Für den zu  $\|x\|$  gehörigen Hilbertraum  $\mathfrak{H}$  gilt dann  $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{H} \subset \mathfrak{E}^*$ . Ein linearer stetiger Operator  $A$  auf  $\mathfrak{E}$  heißt reell, wenn  $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$  auf  $\mathfrak{E}$  gilt.  $A$  besitzt eine wieder mit  $A$  bezeichnete stetige Fortsetzung auf  $\mathfrak{E}^*$ . Ein Operator  $\chi \in \mathfrak{L}(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}^*)$  heißt Eigenoperator von  $A$ , wenn  $\langle \chi x, x \rangle > 0$  auf  $\mathfrak{E}$  gilt und wenn ein komplexes  $z$  existiert mit  $A\chi = \chi A = z\chi$ . Es sei  $A$  reell. Dann gibt es stets eine Schar  $\chi(t)$ ,  $t$  reell, von Eigenoperatoren von  $A$  mit  $A\chi(t) = \chi(t)A = t\chi(t)$  und  $\langle x, y \rangle = \int_{\mathbb{R}_1} \langle \chi(t)x, y \rangle d\mu(t)$  für ein geeignetes positives reguläres Maß  $\mu(t)$ . Diese Zerlegung von  $A$  ist in einem wohldefinierten Sinn eindeutig, wenn  $A$  eine maximale symmetrische Abschließung in  $\mathfrak{H}$  besitzt. In diesem Fall hat man

$$\langle x, y \rangle = \int \langle \chi_o(t)x, y \rangle d\mu_o(t) + \sum_n \langle \chi_a(t_n)x, y \rangle,$$

die  $\chi_a(t_n)$  sind orthogonale Projektionen in  $\mathfrak{H}$  und die  $t_n$  bilden das diskrete Spektrum von  $A$ , während der Träger des Maßes  $\mu_o$  das kontinuierliche Spektrum von  $A$  definiert. Sind  $A_1, \dots, A_n$  reelle Operatoren, die  $\pm i$  nicht als diskrete Eigenwerte in  $\mathfrak{E}^*$  besitzen (die  $A_i$  heißen dann Observable), so gibt es eine Zerlegung in Eigenoperatoren  $\chi(t_1, \dots, t_n)$ , so daß gilt  $A_j \chi(t_1, \dots, t_n) = \chi(t_1, \dots, t_n) A_j = t_j \chi(t_1, \dots, t_n)$ ,  $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ . Das System  $A_1, \dots, A_n$  heißt vollständig, wenn der einem  $(t_1, \dots, t_n)$  entsprechende Raum der simultanen Eigenvektoren eindimen-



sional ist. Mit Hilfe einer Darstellung von  $\mathfrak{E}$  als Funktionenraum im  $R^n$  kann man Funktionen der Operatoren  $A_1, \dots, A_n$  einführen und zeigen, daß jeder Operator in  $\mathfrak{E}$ , der mit den  $A_i$  eines vollständigen Systems vertauschbar ist, eine Funktion von  $A_1, \dots, A_n$  ist. Damit wird eine Rechtfertigung des Diracschen quantenmechanischen Formalismus gegeben. Ohne Beweise. *G. Köthe.*

**Kultze, Rolf:** Zur Theorie Fredholmscher Endomorphismen in nuklearen topologischen Vektorräumen. *J. reine angew. Math.* **200**, 112—124 (1958).

The author establishes analogues for Fredholm formulae for the equations

$$(I - \lambda K)x = y, \quad (I' - \lambda K')x' = y', \quad (x, y \in E, x', y' \in E')$$

for a class of convex linear topological spaces  $E$ ,  $K$  being an endomorphism of  $E$  of a special class, called the Fredholm endomorphism. Introducing the concept of symmetric endomorphism, the author shows that in this case there exists an at most countable set of eigenvalues, possessing the usual properties. The definitions and results are too complicated to be reproduced here. *A. Alexiewicz.*

**Lane, Ralph E.:** Linear operators on quasi-continuous functions. *Trans. Amer. math. Soc.* **89**, 378—394 (1959).

The author deals with linear transformations over the class  $\mathfrak{U}$  of quasicontinuous functions i. e. of complex functions of a real variable  $t$  for which  $f(t+)$  and  $f(t-)$  exist everywhere. There are considered distributive functions-to-functions operators  $T$  acting on  $\mathfrak{U}$ . Such an operator is called the  $Q$ -operator over the interval  $[a, b]$  if (i) if  $c$  is a number and if  $y, z \in \mathfrak{U}$  are related by  $z(t) = y(t+c)$  for every  $t$ , then  $(Tz)(s) = (Ty)(s+c)$  for every  $s$ , (ii) for every  $s$  there is a  $B_s > 0$  such that if  $y \in \mathfrak{U}$  and  $|y(s-t)| < M$  for every  $t \in [a, b]$ , then  $|(Ty)(s)| \leq MB_s$ . The infimum of these  $B_s$  is denoted by  $|T(s)|$  and is called the norm of  $T$ . For  $y \in \mathfrak{U}$  let  $y_R$  and  $y_L$  be defined as  $y_R(t) = y(t+)$ ,  $y_L(t) = y(t-)$ ; an operator  $T$  is called a  $Q_1$ -operator over  $[a, b]$  if it is a  $Q$ -operator over  $[a, b]$  and if

$$(Ty)(s+) - (Ty)(s-) = 2[(Ty_R)(s) - (Ty_L)(s)].$$

The norm  $|T(s)|$  does not depend upon  $s$ :  $|T(s)| = |T(0)|$ . It is shown that the class  $\mathfrak{U}$ , the class of functions of bounded variation, and the class of continuous functions are mapped by the  $Q$ -operators into themselves. The  $Q$ -operators possess a representation

$$(Ty)(s) = \int_a^{b+} g(s-t) dx_1(t) + \int_{a-}^b h(s-t) dx_2(t)$$

where  $g, h$  are functions such that  $g+h=y$ ,  $g=g_L$ ,  $h=h_R$  and  $x_1, x_2$  are of bounded variation. The  $Q_1$ -operators admit a representation

$$(Ty)(s) = \int_a^b y(s-t) dx(t).$$

Then there are characterized in terms of  $x(t)$  the  $Q_1$ -operators having some specific properties as to transform  $\mathfrak{U}$  into the space of continuous functions or into the functions of bounded variation. The paper ends with the consideration of some families of concrete  $Q_1$ -operators. *A. Alexiewicz.*

**Korenbljum, B. I.:** Harmonische Analyse schnellwachsender Funktionen. *Uspechi mat. Nauk* **12**, Nr. 1 (73), 201—203 (1957) [Russisch].

The author announces three theorems on the convolution ring

$$L(\alpha) = \left[ f: \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| e^{\alpha|x|} dx < \infty \right]$$

and its conjugate space

$$M(\alpha) = [g: \sup_{\text{ess}} |g(x)| e^{-\alpha|x|} < \infty], \quad \alpha > 0.$$

The first theorem gives a necessary and sufficient condition for the closed ideal

$I_f \subset L(\alpha)$  generated by a function  $f$  to coincide with the whole space  $L(\alpha)$ . The second theorem treats on the existence of functions of the form  $e^{-i\lambda x}$  ( $|\operatorname{Im} \lambda| < \alpha$ ),  $e^{-i\mu_1 x}/\Gamma(1+2\alpha x i \pi^{-1})$ ,  $e^{-i\mu_2 x}/\Gamma(1-2\alpha x i \pi^{-1})$  in the smallest weakly closed subspace  $I_g \subset M(\alpha)$  containing a function  $g$  and all its translations  $g(x+c)$ . The sets  $\{\lambda\}$ ,  $\{\mu_1\}$ ,  $\{\mu_2\}$  are called respectively the harmonic, right non-harmonic and left non-harmonic spectrum of  $g$ . The third theorem states that if  $\{\lambda\}$  is bounded and  $\{\mu_1\}$  and  $\{\mu_2\}$  are empty, then  $g$  coincides with an entire function of an exponential type.

*R. Sikorski.*

**Korenbljum (Korenblum), B. I.:** On a normed ring of functions with convolution. Doklady Akad. Nauk SSSR 115, 226—229 (1957) [Russisch].

The symbols  $L(\alpha)$ ,  $M(\alpha)$  have the same meaning as in the preceding review. The author announced some characterizations of ideals in the ring  $L_e$  obtained from  $L(\alpha)$  by adding an abstract unit,  $\alpha > 0$ . In particular, he characterizes all primary ideals (an ideal is said to be primary if it is contained only in one maximal ideal). As applications he gives a characterization of closed sets

$$\left[ g \in M(\alpha): \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) dx = 0 \text{ for all } f \in I \right]$$

where  $I$  is a primary ideal in  $L_e$ . He gives also an application to the theory of

integral equations  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) g(t) dt = 0$  in  $L(\alpha)$ .

*R. Sikorski.*

**Rudin, Walter:** Weak almost periodic functions and Fourier-Stieltjes transforms. Duke math. J. 26, 215—220 (1959).

A Fourier-Stieltjes transform on a locally compact abelian group  $G$  is a function  $f$  of the form

$$f(x) = \int_{\Gamma} (x, -\gamma) d\mu(\gamma) \quad (x \in G)$$

where  $\Gamma$  is the character group of  $G$ , the symbol  $(x, \gamma)$  is the value of the character  $\gamma$  at the point  $x$ , and  $\mu$  is a bounded regular complex-valued Borel measure on  $\Gamma$ . It is proved that if  $G$  contains a closed discrete subgroup  $H$  which is not of bounded order (that is,  $nx \neq 0$  has a solution  $x$  in  $H$  for every integer  $n \neq 0$ ), then there are weak almost periodic functions on  $G$  which are not uniform limits of Fourier-Stieltjes transforms.

*E. Følner.*

**Matthews, G.:** Generalized rings of infinite matrices. II. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 62, 45—51 (1959).

This paper is a sequel to a previous one on generalized rings of infinite matrices by the author (this Zbl. 83, 104); this should be referred to for notations and definitions. The following further results are established. Theorem 2. I. (i) If (a)  $\alpha \geq \Phi$ , and (b)  $\alpha^\dagger$  is regular under  $g\alpha^\dagger\alpha$ -cgce, then  $\mathcal{M}(\alpha)$  and  $\mathcal{M}(\alpha^{\dagger\dagger})$  are associative  $g$ -rings; (ii) if, further, (c)  $\alpha^{\dagger\dagger}$  is regular under  $g\alpha^{\dagger\dagger}$ -cgce, then  $\mathcal{M}(\alpha) \leq \mathcal{M}(\alpha^{\dagger\dagger})$ . Corollary. If, under conditions (a), (b) and (c) of the theorem,  $\mathcal{M}(\alpha)$  is a maximal  $g$ -ring, then  $\alpha$  is  $g$ -perfect. Theorem 2. II. (i) If a  $g$ -ring  $G$  is semi-maximal, then (a) the columns of  $G$  form a sequence space  $\alpha$ , (b) the rows of  $G$  form a sequence space  $\beta$ , (c)  $\Phi \leq \beta \leq \alpha^\dagger$  and  $\Phi \leq \alpha \leq \beta^\dagger$ , (d)  $G \leq \mathcal{M}(\alpha) \cap \mathcal{M}'(\beta)$ . (ii) If, further,  $G$  is associative, then  $G \leq \mathcal{M}_\beta(\alpha)$ . Theorem 3. I. Let  $v_n = \sum_{k=1}^{\infty} g_{n,k} c_k$ . Then necessary and sufficient conditions that  $\{v_n\}$  belongs to  $\sigma_\infty$  whenever  $\{c_k\}$  belongs to  $\lambda$  are

(i)  $\sum_{k=1}^{\infty} |g_{n,k} - g_{n,k+1}| \leq M$  independently of  $n$ , (ii)  $g_{n,k} \rightarrow 0$  as  $k \rightarrow \infty$  for every  $n$ .

Theorem 3. II.  $\mathcal{M}(\lambda)$  is the class of matrices  $B$  whose columns are in  $\lambda$  and rows in  $\lambda^\dagger (= \mu)$ , and such that  $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^n (b_{i,k} - b_{i,k+1}) \right| \leq M$  independently of  $n$ . In the previous paper mentioned above, the author proved: Theorem 4. I. If (i)  $\alpha \geq \Phi$



and (ii)  $\alpha^\dagger$  is regular under  $g\text{-}\alpha^\dagger\alpha\text{-cgce}$ , then  $\mathcal{M}(\alpha)$  is an associative  $g$ -ring. He now shows that  $\tau^\dagger$  is regular under  $g\text{-}\tau^\dagger\tau\text{-cgce}$ . Theorem 4. II.  $\mathcal{M}(\psi) = \mathcal{M}(\tau)$ , and is this a maximal associative  $g$ -ring.

R. G. Cooke.

**Jurkat, W. B.: On semi-groups<sup>1</sup> of positive matrices. I.** Scripta math. 24, 123–131 (1959).

A matrix-function  $P(t) = (p_{j,k}(t))$  defines a semi-group of positive matrices (i)  $0 \leq P(t) < +\infty$ , i. e.,  $0 \leq p_{j,k}(t) < +\infty$ ; (ii)  $P(s+t) = P(s)P(t)$ , i. e.,  $p_{j,k}(s+t) = \sum_m p_{j,m}(s)p_{m,k}(t)$ ; (iii)  $\lim_{t \rightarrow +0} P(t) = I = P(0)$ , i. e.,  $\lim_{t \rightarrow +0} p_{j,k}(t) = \delta_{j,k} = p_{j,k}(0)$ ;  $j, k = 0, 1, 2, \dots, s$  and  $t$  range over all real positive numbers, and  $\delta_{j,k}$  the Kronecker symbol. While (ii) and (iii) are standard in the general theory of semi-groups, (i) replaces the requirement that  $P(t)$  should be a bounded linear transformation of some Banach space. We return to the case of bounded operators (acting on the space  $\sigma_1$  of sequences with absolutely convergent sum) if we require (iv)  $\sum_k p_{j,k}(t) \leq 1$  for every  $j$ , or even (iv')  $\sum_k p_{j,k}(t) = 1$  for all  $j$ . With (iv') we have the case of a regular Markov process. Under (iv) or (iv') important analytical properties of  $P(t)$  have been obtained by several writers, stated in the text. It is the object of this paper to point out that most of their results are true if we drop (iv) or (iv'). The author therefore also calls his semi-groups "generalized Markov processes", and in the case of (iv), "ordinary Markov processes". The following results all apply to generalized Markov processes. Theorem 1. All  $p_{j,k}(t)$  are continuous for  $t \geq 0$ . Theorem 2. Suppose that the sequence  $w_j(t)$  satisfies (A)  $0 \leq w_j(t) < +\infty$ ,  $w_j(s+t) = \sum_k p_{j,k}(s)w_k(t)$  for  $j = 0, 1, 2, \dots$ ;  $s, t > 0$ . Then all  $w_j(t)$  are continuous for  $t > 0$ , the limits  $w_j(+0)$  exist and are finite; finally  $w_j(+0) = w_j(0)$  if (A) holds for  $t = 0$  also. Theorem 3. For all  $j, k$ , the derivatives  $q_{j,k} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{t} \{p_{j,k}(t) - \delta_{j,k}\}$  exist,  $-\infty < q_j \leq +\infty$ , where  $q_j = -q_{j,j}$ , and  $0 \leq q_{j,k} < +\infty$  if  $j \neq k$ . For the next two theorems, it is assumed that  $q_m < +\infty$  for fixed  $m$ . Theorem 4. For all  $k$  (and fixed  $m$ ),  $e^{q_m t} p_{m,k}(t)$  and  $p_{k,m}(t) e^{q_m t}$  are non-decreasing for  $t \geq 0$ ;  $p'_{m,k}(t)$ ,  $p'_{k,m}(t)$  exist and are continuous for  $t \geq 0$ ;  $p'_{m,k}(t+s) = \sum_j p'_{m,j}(t)p_{j,k}(s)$  for  $s \geq 0$ ,  $t > 0$ ; and  $p'_{k,m}(s+t) = \sum_j p_{k,j}(s)p'_{j,m}(t)$  for  $s \geq 0$ ,  $t > 0$ , where the series converge absolutely. Theorem 5. Suppose that the sequence  $w_k(t)$  satisfies  $0 \leq w_k(t) < +\infty$ ,  $w_k(t+s) = \sum_j w_j(t)p_{j,k}(s) \geq p_{m,m}(s)w_k(t)$  for all  $k$  and  $s, t > 0$ . Then, for all  $k$ ,  $e^{q_m t} w_k(t)$  is non-decreasing for  $t > 0$ ;  $w'_k(t)$  exists and is continuous for  $t > 0$ ; and  $w'_k(t+s) = \sum_j w'_j(t)p_{j,k}(s)$  for  $s, t > 0$ , where the series converges absolutely. If the hypothesis also holds for  $t = 0$ , so do the first two of the conclusions. In the final Theorem 6, it is assumed that  $q_m < +\infty$ ,  $q_n < +\infty$ , for fixed  $m, n$ . Theorem 6. Under these assumptions,  $e^{(q_m + q_n)t/2} p_{m,n}(t)$  is convex for  $t \geq 0$ ;  $p'_{m,n}(t)$  is absolutely continuous for  $t \geq 0$ ; and  $p'_{m,n}(t+s) = \sum_k p'_{m,k}(t)p_{k,n}(s)$  for almost all  $t, s > 0$  in the two-dimensional sense, the series being absolutely convergent.

R. G. Cooke.

**Kendall, David G.: Sur quelques critères classiques de compacité dans certains espaces fonctionnels, et la théorie des semi-groupes de transformations.** J. Math. pur. appl., IX. Sér. 38 (offert en hommage à M. Fréchet), 235–244 (1959).

Soient  $X$  un espace de Banach,  $(T_n)$  une suite d'endomorphismes continus de  $X$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n x = x$  pour tout  $x \in X$ ; la suite  $(T_n)$  étant équicontinue converge uniformément sur tout compact; inversement, si on suppose les  $T_n$  (ou seulement les  $T_n^p$ , pour un  $p$  fixé) compacts, et si la suite  $(T_n)$  converge uniformément dans un ensemble borné  $A$ , il est clair que  $A$  étant approché uniformément par les  $T_n(A)$  est compact, ce qui fournit un „critère de compacité“ dans  $X$ . L'A. remplace dans

critère les  $T_n$  par un semi-groupe  $(T_t)_{t \geq 0}$  d'endomorphismes continus, et donne des conditions moyennant lesquelles le semi-groupe fournit encore un „critère de compacité“: il faut et il suffit pour cela que la résolvante  $J_\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t dt$  du semi-groupe soit compacte pour  $\lambda > 0$ . L'application du théorème d'Ascoli lui redonne alors comme cas particulier le critère de compacité de M. Riesz dans  $L^1(U)$  ( $U$  étant le cercle unité). L'A. met aussi la condition qu'il a obtenue en rapport avec la notion de „dual“ d'un semi-groupe introduite par Phillips (ce Zbl. 64, 112).

*J. Dieudonné.*

**Balakrishnan, A. V.: Representation of abstract Riesz potentials of the elliptic type.** Bull. Amer. math. Soc. 64, 288—289 (1958).

Es sei  $T(\xi)$ ,  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ ,  $-\infty < \xi_\nu < \infty$  eine  $n$ -gliedrige starkstetige Gruppe von Endomorphismen eines Banachraumes  $X$ . Es sei  $T(\xi) = \prod_{\nu=1}^n T_\nu(\xi_\nu)$ , und es sei  $A_\nu$  die infinitesimale Erzeugende der Gruppe  $T_\nu(\xi_\nu)$ . Es sei  $C \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{i,j} a^{ij} A_i A_j$ , wobei  $(a^{ij})_1^n$  reell und positiv definit ist. Wenn  $S(t)$ ,  $t > 0$  die 1-gliedrige Halbgruppe mit der Erzeugenden  $C$  ist ( $\sup \|S(t)\| < \infty$ ), dann gilt für  $\operatorname{Re} \alpha > 0$ :

$$(1) \quad (-C)^\alpha x = (\Gamma(-\alpha))^{-1} \int_0^\infty [S(t)x - x] t^{-\alpha-1} dt, \quad \text{für } x \in D(C).$$

Für  $C = \sum A_\nu^2$  hat man

$$(2) \quad S(t) = 2(\pi t^{1/2})^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} T(\xi) x \exp\left(-\frac{\sum \xi_\nu^2}{4t}\right) d\xi; \quad x \in X.$$

Durch Einsetzung von (2) in (1) bekommt man das abstrakte M. Rieszsche Potential  $(-C)^\alpha x$ . *K. Maurin.*

**Balakrishnan, A. V.: Abstract Cauchy problems of the elliptic type.** Bull. Amer. math. Soc. 64, 290—291 (1958).

**Definition:** Als abstraktes Cauchy-Problem vom elliptischen Typus (a. C. P.  $n$ ) wird vom Verf. die folgende Aufgabe genannt: Es sei  $A$  die infinitesimale Erzeugende einer starkstetigen 1-Halbgruppe  $T(\xi)$ ,  $\xi > 0$ ; es wird eine solche Vektorfunktion  $u(t) \in X$  gesucht, daß 1.  $u^{(k)}(\cdot)$  absolut stetig,  $k = 0, \dots, n-1$ ; 2.  $u^{(n)}(\cdot) = (-1)^{n+1} A u(\cdot)$ ; 3.  $\|u^{(k)}(t) - u_k\| \xrightarrow{t \rightarrow +0} 0$ ,  $k = 0, \dots, n-1$ . Es werden folgende zwei Sätze ausgesprochen: 1. Falls (1)  $\int_1^\infty \|T(\xi) \xi^{-\sigma-1} d\xi < \infty$ , für jedes  $\sigma > 0$ , dann besitzt das a. C. P.  $n$  höchstens eine Lösung. 2. Es sei  $n = 2$ ; falls (1) gilt und die Lösung  $u(\cdot)$  des a. C. P. 2 der Ungleichung  $\limsup_{t \rightarrow 0} t^{-1} \operatorname{Log} \|u(t)\| \leq 0$  genügt, dann gilt auch

$$\dot{u}(t) = \frac{t}{2\pi^{1/2}} \int_0^\infty T(\xi) u_0 \xi^{-3/2} \exp\left(-\frac{t^2}{4\xi}\right) d\xi.$$

*K. Maurin.*

**Phillips, R. S.: On a theorem due to Sz.-Nagy.** Pacific J. Math. 9, 169—173 (1959).

The reviewer proved the following theorems: (1) For any contraction operator  $T$  on the Hilbert space  $H$  there exists a unitary operator  $U$  on some larger Hilbert space  $K$  such that  $T^n y = P U^n y$  ( $y \in H$ ;  $n = 0, 1, 2, \dots$ ), where  $P$  is the projection with range  $H$ .  $K$  may be chosen so that it is spanned by the elements  $U^n y$  ( $y \in H$ ;  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ); in this case the structure  $\{K, U, H\}$  is determined up to isomorphism. — (2) For any strongly continuous one parameter semigroup

$\{T_t; t \geq 0\}$  of contraction operators on  $H$  there exists a one parameter group  $\{U_t; -\infty < t < \infty\}$  of unitary operators on some larger Hilbert space  $K$ , such that  $T_t y = P U_t y$  ( $y \in H; t \geq 0$ ), where  $P$  is the projection with range  $H$ .  $K$  may be chosen so that it is spanned by the elements  $U_t y$  ( $y \in H; -\infty < t < \infty$ ); in this case  $\{U_t\}$  is strongly continuous and the structure  $\{K, U_t, H\}$  is determined up to isomorphism. — In the present paper (2) is derived from (1) on the basis of the remark that if  $L$  is the infinitesimal generator of  $\{T_t\}$ , then  $T = (1 + L)(1 - L)^{-1}$  is a contraction operator. [A similar deduction of (2) from (1) was given also in the paper of B. Sz.-Nagy and C. Foiaş: this Zbl. 85, 99, as a consequence of a general functional calculus expounded in that article.] B. Sz.-Nagy.

**Slugin, S. N.:** On the theory of Newton's method and Chaplygin's method. Doklady Akad. Nauk SSSR 120, 472—474 (1958) [Russisch].

Es handelt sich um das Newtonsche Verfahren zur Lösung nichtlinearer Gleichungen in Banachschen oder in halbgeordneten Räumen. Die zu lösende Gleichung sei  $P(x) = 0$ ; der betrachtete Algorithmus  $x_{n+1} = x_n - \Gamma_n^{-1} P(x_n)$ ,  $\Gamma_n = P'(x_n)$ , wo  $P'(x)$  den Fréchet'schen Differentialquotienten von  $P(x)$  bedeutet. Beim sogenannten „modifizierten Newtonschen Verfahren“ ist  $\Gamma_n = P'(x_0)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Um die Konvergenz gegen eine Lösung der betrachteten Gleichung zu sichern, muß ziemlich viel vom Operator gefordert werden. Die Grundidee des Verf. ist die folgende: Ersetzt man  $\Gamma_n$  durch einen anderen Operator  $L$  (es existiere  $L^{-1}$ ), welcher in einem gewissen Sinne den Operatoren  $\Gamma_n$  nahe steht. Dadurch kann erreicht werden, daß der Algorithmus unter weniger Bedingungen gegen eine Lösung unserer Gleichung konvergiert. Bei geeigneter Wahl von  $L$  kann man sogar für numerische Zwecke geeignete Verfahren konstruieren. — Der betrachtete Raum  $X$  sei vom Typus  $B_K$  (Bezeichnungen und Terminologie siehe: L. V. Kantorovič, B. Z. Vulich, A. G. Pinsker: Funktionalanalysis in halbgeordneten Räumen, dies. Zbl. 37, 72). Es sei  $V^0 = I$  (der Identitätsoperator),  $V^n(z) = V[V^{n-1}(z)]$ ;  $\Delta u = U(x + \Delta x) - U(x)$ . Folgender Satz wird ausgesprochen: Es sei  $G \subset X$  und  $U = I - LP$ . Falls 1.  $|\Delta U| \leq V(|\Delta x|)$ , 2.  $V$  monoton wachsend ist, 3.  $G$  eine Kugel  $(x_0, R)$  enthält, so daß

$$|x - x_0| \leq R = \sum_{k=0}^{\infty} V^k(|LP(x_0)|)$$

4. der Operator  $LP$   $(bk)$ -stetig ist und 5. die zu lösende Gleichung eine einzige Nulllösung besitzt, ist das Verfahren  $x_{n+1} = x_n - LP(x_n)$  konvergent in der Kugel  $(x_0, R)$  und es gilt  $x_n \rightarrow x^*$  [ $x^*$  ist eine Wurzel von  $P(x) = 0$ ], weiterhin ist

$|x_n - x^*| \leq \sum_{k=n}^{\infty} V^k(z)$ . — Ferner wird ein Satz ausgesprochen, welcher eine

Bedingung über die Unizität der Lösung liefert. Es wird auch ein Algorithmus von Čaplygin'scher Art mitgeteilt, und die Bedingungen, unter welchen das Verfahren gegen eine Lösung konvergiert, werden festgestellt. — Die formulierten Sätze werden ohne Beweis mitgeteilt.

S. Fenyő.

**Perov, A. I.:** On uniqueness theorems for ordinary differential equations. Doklady Akad. Nauk SSSR 120, 704—707 (1958) [Russisch].

There are given conditions for the uniqueness of the solution of the equation  $dx/dt = f(t, x)$ ,  $x(0) = x_0$  where  $f(t, x)$  is a function taking on values from a real Banach space  $X$ , defined for  $0 < t \leq \alpha$  and  $\|x - x_0\| \leq \beta$ . Let  $\lambda$  be a functional defined in the ball  $\|x\| \leq 1$  and satisfying  $\lambda(x + h) - \lambda(x) \leq D(x, h) + \alpha(x, h)$  where  $t D(x, h) \leq D(x, th)$  for  $t \geq 0$  and  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(x, h)}{\|h\|} = 0$  for every fixed  $\alpha$ .

The following conditions are introduced

(A)  $D(x - y, f(t, x) - f(t, y)) \leq k \lambda(x - y)/t + t^k a(t) L(\lambda(x - y)/t^k)$

for  $0 < t \leq \alpha$ ,  $\|x - x_0\| \leq \beta$ ,  $x \neq y$ ,  $\lambda(x - y) \leq \gamma t^k$ ,  $\|y - y_0\| \leq \beta$ ; here  $k > 0$ ,  $a$  is a



function satisfying  $\lim_{t \rightarrow 0+} \int_t^\alpha a(t) dt < \infty$ , and  $L$  is supposed to satisfy  $\int_0^\gamma \frac{dv}{L(v)} = \infty$ .

$$(B) \quad D(x-y, f(t, x) - f(t, y)) \leq N(t, \lambda(x-y))$$

for  $0 < t \leq \alpha$ ,  $\|x - x_0\| \leq \beta$ ,  $x \neq y$ ,  $\|y - y_0\| \leq \beta$ , where  $N$  is continuous and  $N(t, 0) = 0$ .

$$(C) \quad D(x-y, f(t, x) - f(t, y)) \leq b(t) M(\lambda(x-y))$$

for  $0 < t \leq \alpha$ ,  $\|x - x_0\| \leq \beta$ ,  $\|y - y_0\| \leq \beta$ ,  $x \neq y$ ,  $\lambda(x-y) \leq \delta$ . Here  $b$  and  $M$  are supposed to be non-negative and continuous,  $M(0) = 0$ ,  $\int_0^\delta \frac{du}{M(u)} = \infty$ , and

$\int_0^t b(\tau) d\tau \leq \int_0^{\varepsilon t^k} \frac{du}{M(u)}$  for small  $\varepsilon > 0$ . Theorem 1. Let (A) be satisfied and let

the function  $x(t)$  satisfy the equation also for  $t = 0$ ; then, if  $0 \leq k \leq 1$ , the solution is unique. If  $k > 1$  and (B) is satisfied, then the solution is unique, too. Theorem 2. Let (A) be satisfied. If  $0 < k \leq 1$  and (B) is satisfied or if  $k > 1$  and (C) is satisfied, then the solution satisfying the equation for  $0 < t \leq \alpha$  is unique. No proofs.

A. Alexiewicz.

**Langenbach, A.:** On the application of the variation principle to some non-linear differential equations. Doklady Akad. Nauk SSSR 121, 214—217 (1958) [Russisch].

Verf. gibt sehr einschränkende hinreichende Bedingungen für die Lösbarkeit nichtlinearer Gleichungen im Hilbertschen Raume mit Hilfe von Minimalfolgen.

K. Maurin.

**Freudenthal, Hans:** Operatoren — Von Heaviside bis zu Mikusiński. Simon Stevin 33, 3—19 (1959) [Holländisch].

**Erdős, Jenő:** A remark on the paper "On some functional equations" by S. Kurepa. Periodicum math.-phys. astron., II. Ser. 14, 3—5 (1959).

Verf. betrachtet die von S. Kurepa (dies. Zbl. 71, 338) unter Derivierbarkeitsvoraussetzung gelöste Funktionalgleichung

$$(1) \quad f(x+y, z) + f(x, y) = f(y, z) + f(x, y+z)$$

und beweist unter Verwendung der Schreierschen Gruppenerweiterungstheorie, insbes. eines Satzes von R. Baer (vgl. z. B. A. G. Kurosch, Gruppentheorie, dies. Zbl. 53, 10; in der Arbeit selbst werden keine Literaturhinweise gegeben), daß jede symmetrische Lösung von (1) von der Gestalt

$$(2) \quad f(x, y) = g(x+y) - g(x) - g(y)$$

ist. (Umgekehrt erfüllt natürlich jede Funktion der Gestalt (2) diese Funktionalgleichung (1) und ist symmetrisch.) Verf. weist dann darauf hin, daß durch gruppentheoretische Betrachtungen bewiesen werden kann, daß jede stetige Lösung von (2) symmetrisch [also von der Gestalt (2)] ist, er gibt aber in extenso einen vom Ref. gefundenen analytischen Beweis dieser Behauptung durch Zurückführung auf die Cauchysche Funktionalgleichung wieder, was zugleich zeigt, daß die Stetigkeitsbedingung gemildert werden kann. Endlich konstruiert Verf. mittels der Hamel-schen Basis [Math. Ann. 60, 459—462 (1905)] eine (nichtstetige) Lösung von (1), die nicht von der Gestalt (2) ist.

J. Aczél.

**Ghermănescu, M.:** Équations fonctionnelles linéaires à argument fonctionnel  $n$ -périodique. Acad. Republ. popul. Romîne, Bul. ști. mat. fiz. 9, 43—78, russ. und französ. Zusammenfassung 74—78 (1957) [Rumänisch].

Frühere Arbeiten (s. insbesondere dies. Zbl. 45, 64) fortsetzend, untersucht Verf. Funktionalgleichungen der Form

$$a_0 f(M) + a_1 f^1(M) + \dots + a_{n-1} f^{n-1}(M) = 0$$

$$\text{bzw.} \quad a_0 f(M) + a_1 f^1(M) + \dots + a_{n-1} f^{n-1}(M) = g(M),$$

wo  $M$  ein veränderlicher Punkt eines mehrdimensionalen Raumes  $E$ ,  $f^k(M) =$

$= f[\theta_k(M)]$ , ist und  $\theta_k(M)$  als  $k$ -te Iterierte der Abbildung  $\theta$  in  $E$ , d. h. durch  $\theta_0(M) = M$  und (1)  $\theta_{k+1}(M) = \theta[\theta_k(M)]$  definiert wird, während die  $a_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ) Konstanten sind. Es wird hier vorausgesetzt, daß  $\theta(M)$  „ $n$ -periodisch“, d. h. zyklisch der Ordnung  $n$  ist: (2)  $\theta_n(M) = M$ . (Ref. meint, daß  $f^n(M) = f(M)$ ,  $g^n(M) = g(M)$ , als Voraussetzung genügen würde.) In den Untersuchungen des Verf. spielen besonders die zyklische Determinante

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix}$$

des charakteristischen Polynoms

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1},$$

dessen größter gemeinsamer Teiler mit dem Polynom  $1 - x^n$  und deren Wurzeln eine wichtige Rolle. Verf. beschäftigt sich in der Arbeit sehr viel mit der Unterscheidung von „funktional stetigen“ Lösungen, die (3)  $f[\theta_{k+1}(M)] = f\{\theta[\theta_k(M)]\}$  erfüllen und von den übrigen, die er „funktional unstetig“ nennt. Ref. muß gestehen, daß er nicht weiß, was unter den letzteren zu verstehen ist, da seiner Ansicht nach die Gleichung (3) aus der Definition (1) folgt und für jede Funktion erfüllt ist und daß er die diesbezüglichen Betrachtungen des Verf. schon von (1.3)  $\log[-(-x)] \neq \log x$  (S. 44, Z. 6 v. u.) ab nicht versteht. Dagegen sei hier ein typischer Satz vorgeführt, dessen Richtigkeit Ref. nachprüfen konnte (IX.): Die allgemeinste Lösung der Funktionalgleichung

$$f(M) + f^1(M) + \cdots + f^{n-1}(M) = 0$$

ist bei Bestehen von (2)  $f(M) = u(M) - u^1(M)$ , wo  $u(M)$  eine beliebige Funktion ist (vgl. für Spezialfälle die Arbeiten des Verf. [s. dies. Zbl. 24, 389 und Positive 1, 121—125 (1940); auch Satz VIII. der vorliegenden Arbeit ist Spezialfall dieses Satzes — und äquivalent mit ihm]. Es lohnt sich vielleicht zu bemerken, daß Verf. mit  $L(z)$  (S. 67—69) die Funktion  $\log z$  bezeichnet. — Mehrere Druckfehler stören das Lesen.

J. Aczél.

### Praktische Analysis:

• Fil'čakov, P. F.: Mathematisches Rechenpraktikum. [Matematičeskij praktikum vyčislenija.] Kiev: Staatsverlag für Lehrbücher und pädagogische Literatur „Radjańska Škola“ 1958. 273 S. R. 5,45. [Ukrainisch.]

Ansorge, R.: Über ein Iterationsverfahren von G. Schulz zur Ermittlung dem Reziproken einer Matrix. Z. angew. Math. Mech. 39, 164—165 (1959).

Das Schulzsche Verfahren [Z. angew. Math. Mech. 13, 57—59 (1933)] gibt zur Approximation der Reziproken einer Matrix  $A$  die Vorschrift  $R_v = R_{v-1} (2E - AR_{v-1})$  ( $v = 1, 2, \dots$ ). Setzt man  $F_v = A^{-1} - R_v$ , so ist  $AF_v = (AF_0)^{2^v}$  und daher konvergiert das Verfahren, wenn die Eigenwerte von  $AF_0 = E - AR_0$  im Einheitskreis liegen. Es wird eine der bei Iterationsverfahren üblichen Fehlerabschätzungen zur Verwendung des Verfahrens bei der Auflösung des linearen Gleichungssystems  $Ax = v$  angegeben.

H. Schwerdtfeger.

Hestenes, Magnus R.: Inversion of matrices by biorthogonalization and related results. J. Soc. industr. appl. Math. 6, 51—90 (1958).

In this paper is described a technique for matrix inversion by biorthogonalization. The process goes as follows. Let the matrix  $A$  be  $n \times n$  and nonsingular with column vectors  $u_1, u_2, \dots, u_n$  and let  $v_1^{(0)}, v_2^{(0)}, \dots, v_n^{(0)}$  be a set of row vectors. The matrix  $B^{(0)}$  of which  $v_1^{(0)}, \dots, v_n^{(0)}$  are the row vectors is the inverse of  $A$  if and only if the two sets of vectors, i.e. the  $u$ 's and the  $v$ 's form a biorthogonal

set. The process is then to replace a given set of vectors  $v_i^{(0)}$  by a set  $v_i^{(n)}$  such that the inner products  $\langle v_i^{(n)}, u_j \rangle$  satisfy the equations.  $\langle v_i^{(n)}, u_j \rangle = \delta_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ . This is accomplished by a  $n$  stage procedure. First the  $v_i^{(0)}$  are replaced by a set  $v_i^{(1)}$  such that  $\langle u_1, v_i^{(1)} \rangle = \delta_{1i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . This is done by setting  $v_1^{(1)} = v_1^{(0)} / \langle v_1^{(0)}, u_1 \rangle$  and  $v_i^{(1)} = v_i^{(0)} - v_1^{(1)} \langle v_i^{(0)}, u_1 \rangle$ ,  $i \neq 1$ . At the second stage the  $v_i^{(1)}$  are replaced by a set  $v_i^{(2)}$  such that  $\langle u_2, v_i^{(2)} \rangle = \delta_{2i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . In fact  $v_2^{(2)} = v_2^{(1)} / \langle v_2^{(1)}, u_2 \rangle$  and  $v_i^{(2)} = v_i^{(1)} - v_2^{(2)} \langle v_i^{(1)}, u_2 \rangle$ ,  $i \neq 2$ . This process is continued in an analogous way through  $n$  stage. After the  $n^{\text{th}}$  state has been completed the matrix of which the  $v_i^{(n)}$  are the rows is the inverse to  $A$  within the errors of round-off. Of course the above procedure will fail if any of the inner products  $\langle v_j^{(k)}, u_j \rangle$  vanish. It is proved that this cannot happen if and only if the upper left-hand principal minors of  $B^{(0)} A$  are non-singular. If  $A^T$  represents the transpose of the nonsingular matrix  $A$ , then  $A^T A$  is definite and hence the rows of the matrix  $A^T$  provide a reliable set for the  $v_i^{(0)}$ . If the matrix  $B^{(n)}$  resulting from the above described biorthogonalization procedure fails to provide a sufficiently accurate inverse the process can be repeated using the rows of  $B^{(n)}$  for the  $v_i^{(0)}$ . We thus have a self correcting iterative process which in theory gives the correct result in one step. It is proved in this paper the procedure can be related to the Gauss elimination method. Heuristic error estimates are given, and the application of the technique to finding principal values and eigenvalues and the associated vectors is discussed. Also, decomposition of matrices into linear combinations of isometries is discussed.

R. F. Reeves.

**Householder, Alston S.:** A class of methods for inverting matrices. *J. Soc. industr. appl. Math.* 6, 189—195 (1958).

In this paper there is discussed a family of matrix inversion methods which includes among other, Gaussian elimination, Jordan elimination and a biorthogonalization technique proposed by Hestenes. The fundamental theorem used is the following. Theorem: Let  $P$  be a nonsingular matrix of order  $n$ , and let  $Q$  be a matrix of rank not more than  $n - r$ . Then if  $P - Q$  has rank not less than  $r + 1$ , there exist column vectors  $u$  and  $v$  and a scalar  $\sigma$  such that  $I - \sigma uv^T$  is nonsingular and  $(I - \sigma uv^T)(P - Q) = P - R$ , where  $R$  has rank not more than  $n - r - 1$ . In its most general form the process consists of writing  $A$ , the matrix to be inverted, in the form  $A = A_1 = P_1 - Q_1$  where  $P_1$  is the first of a sequence of suitably chosen nonsingular matrices of known inverse. After a proper selection of  $\sigma_1, u_1, v_1^T$ , one writes

$$A_2 = (I - \sigma_1 u_1 v_1^T)(P_1 - Q_1) = P_1 - R_1$$

where the rank of  $R_1$  is less than that of  $Q_1$ . By next writing  $A_2 = P_2 - Q_2$  and performing the transformation

$$A_3 = (I - \sigma_2 u_2 v_2^T)(P_2 - Q_2) = P_2 - R_2,$$

etc., there is obtained in  $n$  or fewer steps an  $R_k$  which is zero. The inverse of  $A$  is then equal to  $P_k^{-1} A_{k+1}$ . The proof of the above theorem is constructive, and as the proof shows there is considerable freedom in the choice of  $u$  and  $v$ . A discussion of how this freedom might be used to maintain symmetry is included. Also techniques for avoiding ill-conditioning are discussed.

R. F. Reeves.

**Fisher, Michael E. and A. T. Fuller:** On the stabilization of matrices and the convergence of linear iterative processes. *Proc. Cambridge philos. Soc.* 54, 417—425 (1958).

The characteristic equation of a matrix  $A$  is called stable if the real parts of all its roots are negative. The equation is said to be aperiodic if its roots are all simple



and real. In this paper a set of conditions is established under which, corresponding to a matrix  $P$ , there will exist a diagonal matrix  $D$  such that the characteristic equation of  $DP$  is stable and aperiodic. The existence of such a matrix  $D$  is then used to establish that the total step linear iterative process  $Y_{i+1} = f + KY_i$ , can under quite general conditions be transformed with a diagonal matrix to yield a convergent total-step process. Indeed consider the general (not necessarily) linear iterative process  $y_{i+1,j} = F_j(Y_i)$ ,  $Y_i = \{y_{i,j}\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , associated with the system of equations  $F_i(Y) - y_i = 0$ ,  $Y = \{y_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . The transformation consists of premultiplication by  $D$  and an addition and subtraction of  $y_i$ . The resulting form is  $y_{i+1,j} = (1 - d_j) y_{i,j} + d_j F_j(Y_i)$ . The main theorem proved is the following. Theorem 1: If  $P$  is a real  $n \times n$  matrix fulfilling the condition: (A)  $P$  has at least one sequence of non-singular principal minors  $M_k$  of every order  $k = 1, \dots, n$ , such that  $M_{k-1}$  is one of the first  $k$  principal minors of  $M_k$ ; then there exists a real diagonal matrix  $D$  such that the characteristic equation of  $DP$  is stable. The matrix  $D$  may further be chosen such that, if  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , represents the characteristic roots of  $DP$ , any one of the following conditions holds. (a)  $\lambda_i > G > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ ; (b)  $\lambda_i < -G < 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ ; (c)  $G > \lambda_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ ; (d)  $-G < \lambda_i < 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Here  $G$  is an arbitrary positive number. On the basis of this theorem a number of theorems concerning iterative processes are proved. One of these theorems is as follows. Theorem 2: The total-step process  $Y_{i+1} = f + KY_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) for solving the system  $PY = f$  ( $P = I - K$ ) can be transformed by a suitable diagonal matrix  $D$  to yield a convergent total-step process provided  $P$  fulfills the condition (A) of Theorem 1. *R. F. Reeves.*

**Lanczos, C.:** Iterative solution of large-scale linear systems. *J. Soc. industr. appl. Math.* 6, 91—109 (1958).

In this paper there is described a technique for solving large scale linear systems of moderate skewness. The paper begins by indicating the need for such a method by pointing out the difficulties inherent in attempting to solve ill-conditioned systems. The technique discussed is developed for positive definite matrices and then extended to general matrices by doubling the order. For positive definite matrices the scheme is roughly as follows. Let the system of equations to be solved be  $Ax = b$  where  $A$  is positive definite and  $b$  is a known column vector. The system is first converted to one having its eigenvalues in the interval  $(0, 1)$  by division by the largest eigenvalue. In essence, the power method is suggested for the determination of this eigenvalue. Let the new system be  $A_0 y = b_0$ . It is proposed to operate on the vector  $b_0$  by a polynomial  $P_m(A_0)$  and obtain the solution in the form  $P_m(A_0) b_0$ . Suppose for the moment that the system  $A_0 y = b_0$  is represented in the reference frame of the principal axes of  $A_0$ . In this reference system the polynomial  $P_m(A_0)$  may be replaced by the scalar polynomial  $P_m(x)$  and indeed the transformation  $P_m(A_0) b_0$  becomes:

$$\beta_{m1} = P_m(\lambda_1) \beta_{01}, \quad \beta_{m2} = P_m(\lambda_2) \beta_{02}, \dots, \beta_{mn} = P_m(\lambda_n) \beta_{0n}$$

where  $\beta_{01}, \beta_{02}, \dots, \beta_{0n}$  are the coordinates of  $b_0$  in the new reference system and  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  are the eigenvalues of  $A_0$ . Note however that if  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  are the coordinates of  $y$  in this coordinate system then  $\eta_1 = \lambda_1^{-1} \beta_{01}, \dots, \eta_n = \lambda_n^{-1} \beta_{0n}$ . This suggests that  $P_m(x)$  should approximate  $1/x$  as closely as possible. The actual transformation  $P_m(A_0) b_0$  is performed recursively by use of a sequence of polynomials  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$  which satisfy the recursive relation  $p_k = 2(1 - 2x)p_{k-1} - p_{k-2} + 4(m+1)^2$ . Here

$$p_k(x) = (k+2)^2 P_k(x), \quad P_k(x) = 1 - q_k(x)/x, \\ q_k(x) = Q_m(x)/(k+1)^2, \quad \text{and} \quad Q_k(x) = 1 - T_{k+1}^*(x)/2x,$$

where  $T_n^*(x)$  are the Chebyshev polynomials normalized on  $(0, 1)$ . A final division by  $(m+1)^2$  is required since in reality it is the sequence  $P_1, P_2, \dots, P_m$  that

approximates  $1/x$ . The convergence of the method depends on the condition number of the matrix  $A$ . For positive definite matrices it is suggested that the method might reasonably be used for condition numbers as large as 10,000:1, while for the general case it seems that 100:1 might be a maximum.

*R. F. Reeves.*

**Wegstein, J. H.:** Accelerating convergence of iterative processes. Commun. Assoc. comput. Machin. **1**, Nr. 6, 9—13 (1958).

Aus der bekannten Iterationsvorschrift  $x_{k+1} = f(x_k)$  für die Lösung der Gleichung  $x = f(x)$  leitet Verf. durch geometrische Betrachtungen eine neue Rechenvorschrift her, die aber mit der „Sekantenmethode“ zur Bestimmung der Nullstellen von  $F(x) \equiv f(x) - x$  äquivalent ist, bei der die Näherung  $x_{k+1}$  durch Schnitt der Sekante  $(x_k, F(x_k))$ ,  $(x_{k-1}, F(x_{k-1}))$  mit der  $x$ -Achse erhalten wird. Die Methode ist im wesentlichen bei Zurmühl „Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker“ (dies. Zbl. **77**, 111) Formeln 32a, 38, S. 23, 26, beschrieben.

*H. Rutishauser.*

**Noble, B.:** The numerical solution of an infinite set of linear simultaneous equations. Quart. appl. Math. **17**, 98—102 (1959).

Au lieu d'obtenir directement par la méthode de triangularisation la solution du système de  $n$  premières équations aux  $n$  premières inconnues et de la considérer comme première approximation de la solution, l'A. obtient la solution du système de  $n$  équations par approximations successives.

*A. de Castro.*

**White, Paul A.:** The computation of eigenvalues and eigenvectors of a matrix. J. Soc. industr. appl. Math. **6**, 393—437 (1958).

This is an expository paper discussing a large number of methods for determining the eigenvalues and eigenvectors of a matrix. For each method discussed, there is included a description of the technique along with a theoretical justification, and a brief evaluation of the usefulness and effectiveness of the technique. Some indication of existing programs is also given in most cases. Below is a list of the types of matrices considered along with a partial list of the methods described.

1. Real symmetric matrices. A) Jacobi's method. B) The Serial Jacobi method. C) The Threshold Jacobi method. D) Given's method.
2. Hermitian matrices.
3. Real non-symmetric. A) The power method. B) The power method with Aitken's  $\delta^2$  acceleration. C) Wilkinson's method. D) Various deflation methods.
4. General complex matrices. A) Greenstadt's method. B) Lanczos' method. C) Forsythe's modified Lanczos method. D) Various direct methods.

The last section of the paper contains a useful summary.

*R. F. Reeves.*

**Guderley, K. G.:** On nonlinear eigenvalue problems for matrices. J. Soc. industr. appl. Math. **6**, 335—353 (1958).

In (1)  $Mx = 0$  mit  $M = I - \lambda F_1 - \lambda^2 F_2 - \dots - \lambda^b F_b$  seien  $I$  die  $N$ -reihige Einheitsmatrix,  $F_v$  gegebene  $N$ -reihige Matrizen und  $\lambda$  gesuchter Eigenwert mit  $x$  als Eigenvektor. Die Aufgabe kann leicht auf eine Eigenwertaufgabe (2)  $(E - \lambda B)Z = 0$  zurückgeführt werden, wobei  $E$  die  $N \cdot b$ -reihige Einheitsmatrix und  $B$  eine aus den  $F_v$  unmittelbar angebbare  $N \cdot b$ -reihige Matrix ist; Verf. stellt sich die Aufgabe, Sätze über (1) unmittelbar, ohne Zurückführung auf (2), herzuleiten. Bei beliebig vorgegebenen Eigenwerten und Eigenvektoren gibt es ein Problem (1), dessen Lösung sie darstellen. Es wird ein Iterationsverfahren beschrieben, wobei man bei jedem Iterationsschritt mit  $b$  Vektoren zu arbeiten hat. Zunächst betrachtet Verf. den Fall, daß alle  $N \cdot b$  Eigenwerte voneinander verschieden sind. Hier wird eine verallgemeinerte Orthogonalitäts-Relation für die Eigenvektoren und die Lösung der inhomogenen Aufgabe  $Mx = p$ , ausgedrückt durch Eigenwerte und Eigenvektoren, aufgestellt. Dann wird auf den Fall eines zweifachen Eigenwertes durch einen Grenzprozeß („confluence“ von Eigenwerten) eingegangen, und zwar wird der Fall herausgegriffen, daß die Eigenwerte  $\lambda_m, \lambda_{m+1}$  gemäß  $\lambda_{m+1} = \lambda_d + \varepsilon t, \lambda_m = \lambda_d - \varepsilon t$  für  $t \rightarrow 0$  zusammenfallen, während alle übrigen Eigenwerte fest bleiben; die zugehörigen Eigenvektoren  $x_m, x_{m+1}$  werden

als quadratische Polynome in  $t$  angesetzt. Für diesen Fall werden Iteration, Orthogonalität und inhomogenes Problem behandelt. Der allgemeine Fall beliebiger zwei- oder mehrfacher Eigenwerte wird nicht untersucht. *L. Collatz.*

**Dahlquist, Germund:** Stability and error bounds in the numerical integration of ordinary differential equations. Tekn. Högskol. Handl. Nr. 130, 85 p. (1959).

Verf. dehnt seine Untersuchungen [(\*) — vgl. dies. Zbl. 71, 118] weiter aus auf Differenzengleichungen der Form

$$(1) \quad \sum_0^k (\alpha_j y_{n+j} - h^r \beta_j f_{n+j} + h^{r+1} \gamma_j f'_{n+j}) = 0$$

mit reellen  $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$  und  $r \geq 1$  zwecks Anwendung zur numerischen Integration von Differentialgleichungen  $r$ -ter Ordnung (2)  $y^{(r)} = f(x, y)$ . Neu gegenüber (\*) sind die Fälle a)  $r > 1, \gamma_j = 0$  und b)  $r = 1, \gamma_j \neq 0$ . Ähnlich wie in (\*) wird ein Operator

$$(3) \quad L[y(x)] = \sum_0^k [\alpha_j y(x + jh) - h^r \beta_j y^{(r)}(x + jh) + h^{r+1} \gamma_j y^{(r+1)}(x + jh)]$$

betrachtet und eine Abschätzung von der Form (4)  $L'_i[y(x)] \sim -ch^{p+r} y^{(p+r)}(x)$  für  $h \rightarrow 0$  mit  $p \geq 1$  vorausgesetzt. Ferner wird vorausgesetzt, daß die Polynome

$$\varrho(z) = \sum_0^k \alpha_j z^j \quad \text{und} \quad \sigma(z) = \sum_0^k \beta_j z^j \quad \text{teilerfremd sind. — Der Operator } L \text{ heißt}$$

dann „stabil“, wenn die Nullstellen des Polynoms  $\varrho(z)$  keine größeren Beträge als 1 haben und jede Nullstelle mit Betrag 1 keine größere Vielfachheit als  $r$  hat. — Die Bedingungen für die Nullstellen von  $\varrho(z)$  sind unter Zugrundelegung der übrigen Bedingungen notwendig und hinreichend dafür, daß die Lösung der Differentialgleichung (1) in einem vom Verf. näher erläuterten Sinne für  $h \rightarrow 0$  „stabil“ gegen die Lösung der Differentialgleichung (2) konvergiert. Es werden Lipschitzbedingungen für  $f(x, y)$  und  $f'(x, y)$  benutzt.  $y$  und  $f$  können im allgemeinen Vektoren sein. Verf. untersucht dann eingehend die Existenz stabiler Operatoren  $L$  mit Rücksicht auf  $p, k$  und  $r$ . Es ergibt sich unter anderem, daß man mit  $p > 2 \left( \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r+1}{2} \right\rfloor \right)$  keine stabilen Operatoren bilden kann. Solche  $L$  sind vielmehr „stark instabil“.

— Die mit Hilfe des Grenzüberganges  $h \rightarrow 0$  gewonnene Klassifizierung der Operatoren  $L$  wird dann noch verfeinert durch die Betrachtung von sogenannten „schwach instabilen“ Operatoren  $L$ , deren Instabilität von der Größe des Parameters  $h$  abhängt. — Schließlich werden drei verschiedene Fehlerabschätzungsformeln hergeleitet und auf Beispiele angewendet. — Am Schluß behandelt Verf. die Differentialgleichung  $y'' = f(x, y, y')$  mit Hilfe eines Systems von zwei Differentialgleichungen (1).

*H. Eltermann.*

**Bajesay, P. und V. Lovass-Nagy:** Ein Iterationsverfahren zur näherungsweise Lösung von Matrizendifferentialgleichungen. Z. angew. Math. Mech. 39, 8—13 (1959).

Procédés itératifs pour résoudre approximativement les équations différentielles suivantes:  $dy/dt = Ky$ ,  $dy/dt = Ky + g(t)$ , ( $K$  matrice de coefficients constants), sans qu'il soit nécessaire de connaître la représentation diagonale de  $K$ .

*A. de Castro.*

**Keller, Herbert B.:** On some iterative methods for solving elliptic difference equations. Quart. appl. Math. 16, 209—226 (1958).

Das Differenzen-Verfahren für Randwertaufgaben elliptischer Differentialgleichungen (in 2 Dimensionen) führt auf ein lineares Gleichungssystem der Form  $M\Phi \equiv (I - L - R - B - T)\Phi = S$ . Dabei steht  $\Phi$  für die unbekannten Werte  $\Phi_{i,j}$  im Gitterpunkt  $i, j$ ; alle anderen Größen bedeuten gegebene Matrizen,  $I =$  Einheitsmatrix;  $L$  umfaßt die Koeffizienten für die jeweils „links“ stehende Unbekannte  $\Phi_{i-1,j}$ , entsprechend  $R$  für  $\Phi_{i+1,j}$ ,  $B$  für  $\Phi_{i,j-1}$ ,  $T$  für  $\Phi_{i,j+1}$ . Nun wird all-



gemein die Iteration betrachtet  $N(\gamma) \Phi^{(v)} = P(\gamma) \Phi^{(v-1)} + S$  mit  $N(\gamma) = \gamma_0 I - \gamma_1 L - \gamma_2 R - \gamma_3 B - \gamma_4 T$ ,  $P(\gamma) = N(\gamma) - M$ . Für die Güte der Konvergenz sind die Eigenwerte  $\lambda$  von  $|\lambda N(\gamma) - P(\gamma)| = 0$  ausschlaggebend, und Verf. fragt nach den „best“-möglichen Iterationsverfahren. Es gilt zunächst für Skalare  $x, y \neq 0$  die Beziehung  $|I - L - R - B - T| \equiv |I - xL - x^{-1}R - yB - y^{-1}T|$ , welche verschiedene von früher her bekannte Fälle als Spezialfälle enthält. Es werden Klassen von Iterationsschemata aufgestellt, derart, daß die Eigenwerte eines Schemas der Klasse gegebene Funktionen der Eigenwerte eines speziellen „Referenz-Schemas“ der Klasse und somit in gewissem Sinne überblickbar sind. Besonders betrachtet werden die Fälle, wo  $L + R$  mit  $B + T$  vertauschbar ist, und die Laplace-Gleichung als Spezialfall. Es werden zahlreiche Iterationsverfahren (v. Richardson, Liebmann, Overrelaxation, Iteration im Gitter von Zeile zu Zeile und von Spalte zu Spalte, zusammengefaßt als „Line“-Iteration) untersucht und in übersichtlichen Tabellen zusammengestellt, wobei sich insbesondere der Vorteil der Line-Iteration zeigt. *L. Collatz.*

**Aufschläger, Rudolf:** Konvergenzuntersuchungen zur Massauschen Gitterkonstruktion bei Anfangswertproblemen partieller Differentialgleichungen. S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1956, 87—112 (1957).

Verf. behandelt — insbesondere für die Gasdynamik wichtige — Anfangswertprobleme für hyperbolische quasilineare Systeme dreier partieller Differentialgleichungen erster Ordnung für drei gesuchte Funktionen  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$ ,  $w(x, y)$ . Auf einer nichtcharakteristischen Anfangskurve  $y = y_0(x)$  seien  $u$ ,  $v$  und  $w$  als Funktionen von  $x$  vorgegeben. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung werden vorausgesetzt. Verf. zeigt: Ersetzt man die charakteristischen Gleichungen nach Massau durch Differenzgleichungen und greift man diese iterativ an, dann konvergiert die Folge der Näherungen unter geeigneten Voraussetzungen gegen die Lösung der Differenzgleichungen. Im Falle zweier Charakteristikenscharen konvergieren bei zusätzlichen Voraussetzungen überdies die Massauschen Näherungen bei passender Gitterverfeinerung gegen die strenge Lösung des Ausgangsproblems. Zum Nachweis verwendet Verf. Ergebnisse aus Arbeiten von K. Friedrichs-H. Lewy [Math. Ann. 99, 200—221 (1928)] und R. Courant-E. Isaacson-M. Rees (dies. Zbl. 47, 117). *G. Bertram.*

**Bertram, G.:** Verschärfung einer Fehlerabschätzung zum Ritz-Galerkinschen Verfahren von Kryloff für Randwertaufgaben. Numerische Math. 1, 135—141 (1959); Berichtigung. Ibid. 2, 54 (1960).

Kryloff a donné des bornes de l'erreur de la solution obtenue par la méthode de Ritz du problème aux limites:  $y'' - q(x)y = r(x)$ ,  $y(0) = y(1) = 0$ ; ( $0 \leq q(x) \leq Q$ ). En employant le même système orthonormal de Kryloff,  $\{\sqrt{2} \sin \nu \pi x\}$ , l'A. réussit à améliorer la borne, en obtenant:

$$\left| y - \sqrt{2} \sum_{\nu=1}^n \sin \nu \pi x \right| \leq E(n, Q; x) \sqrt{\int_0^1 r^2 dx}; \quad E(n, Q; x) = O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

*A. de Castro.*

**Ehrlich, Louis W.:** Monte Carlo solutions of boundary value problems involving the difference analogue of  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{K}{y} \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ . J. Assoc. comput. Machin. 6, 204—218 (1959).

Die Randwertaufgabe für die Differentialgleichung  $\Delta u + ky^{-1}u_y = 0$  in dem Quadrat  $0 \leq x \leq l$ ;  $A \leq y \leq A + l$  wird durch Rückführung auf die entsprechende Differenzgleichung (Quadratgitter mit 5, 10 oder 20 Maschen) und Anwendung der üblichen Irrweg-Methoden für  $K = 0$ ,  $A = 0$  und  $K = -1$ ,  $A = 0$  sowie  $K = 3$ ,  $A = 2$  gelöst (Randwerte in den Gitterpunkten gleich 0 oder 1). Genauigkeit und Dauer des Irrweg-Prozesses werden untersucht. *D. Morgenstern.*

**Kublanovskaja, V. N.:** Die Anwendung der analytischen Fortsetzung durch Substitution der Variablen in der numerischen Analysis. Trudy mat. Inst. Steklov. 53, 145—185 (1959) [Russisch].

Verf. beweist zuerst die Abschätzung des Restgliedes  $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k \lambda^k$  einer Potenzreihe, konvergent für  $|\lambda| < \varrho$  mit  $R_n = O(\delta^{n+1} n^{r-1})$ , wo  $\delta = \lambda/\varrho$ ,  $r$  die größte Ordnung eines Poles auf  $|\lambda| = \varrho$  ist. Dann folgen analoge Abschätzungen für  $E_n = |1 - c_n/c_{n+1} \lambda_1|$ , wo  $\lambda_1$  ein Pol auf  $|\lambda| = \varrho$  der von der Potenzreihe dargestellten Funktion ist. Falls der Kreis  $|\lambda| = \varrho$  nicht die natürliche Grenze der Funktion ist, kann man die analytische Fortsetzung erreichen durch Variablensubstitution, welche außerdem verwendet werden kann, um in der Nähe des Konvergenzkreises schlecht konvergierende Entwicklungen in rasch konvergierende zu transformieren. Verf. stellt explizit dar die Transformation des Einheitskreises 1. in eine längs einem Geraden aufgeschnittene Ebene; 2. in eine längs zwei Geraden aufgeschnittene Ebene; 3. in einen Streifen; 4. in einen Streifen mit Schnitt; 5. in die Ebene mit ausgeschnittenem Streifen; 6. in eine Halbebene, wie auch 7. die Transformation eines Winkelgebietes in eine Ebene mit einem Schnitt und 8. die Transformation der längs der imaginären Achse aufgeschnittenen oberen Halbebene in die obere Halbebene. Durch derartige Transformationen geht eine Potenzreihe über in eine andere, deren Koeffizienten Polynome der Koeffizienten der ersten Potenzreihe sind. Ausgedehnte Tabellen zur Berechnung dieser neuen Koeffizienten hat Verf. berechnet und beigelegt. Die gegebene Methode ist selbstverständlich anwendbar auf jedes Problem, das theoretisch durch Reihenentwicklung gelöst wird. Verf. gibt numerische Beispiele zur linearen Algebra, zum Dirichletschen Problem, zu den Differential- und Integralgleichungen.

*E. M. Bruins.*

**Hämmerlin, Günther:** Zur numerischen Integration periodischer Funktionen. Z. angew. Math. Mech. 39, 80—82 (1959).

Verf. erweitert Ergebnisse von Lohman, Birkhoff, Young und Zarantoloff und erhält das Resultat: Integriert man eine periodische Funktion  $f(x) = f(x + p)$  über eine volle Periodenlänge  $p$  mit der Rechteckregel unter Verwendung der Funktionswerte an  $n$  äquidistanten Stützstellen, so kann man den dabei entstehenden Fehler mit derjenigen Fehlerabschätzung abschätzen, die bei Verwendung einer Hermiteischen Quadraturformel mit  $n+1$  Stützstellen und Gewichten der Funktionswerte, die symmetrisch zur Intervallmitte sind, gilt.

*E. M. Bruins.*

**Akkerman, R. B.:** Quadraturformeln vom Typus der Markovschen Formeln. Trudy mat. Inst. Steklov. 53, 5—15 (1959) [Russisch].

Die Konstanten  $A_i$  und die Stützpunkte  $x_i$  in Markoffschen Quadraturformeln

$$\int_{-1}^{+1} p(x) f(x) dx \simeq A_0 f(-1) + A_{n+1} f(+1) + \sum_{i=1}^n A_i f(x_i)$$

werden für die Gewichtsfunktion  $p(x) \equiv 1, x, x^2$ , auf 8 Stellen genau gegeben. Für gerade Funktionen die analogen Konstanten im Falle  $A_{-i} = A_i$  in Formeln, die exakt sind für Polynome bis zum Grade  $4n+2$ ,  $n = 0, 1, \dots, 6$ , und für ungerade Funktionen bis zum Grade  $4n+3$ ,  $n = 1, 2, 3, 4$ . Weiter werden die Quadraturformeln unter Benutzung nur eines der Endpunkte des Intervalls gegeben für die Gewichtsfunktion  $p(x) \equiv 1, \sqrt{x}, x^2$ . Anwendungen auf zweifache und dreifache Integrale, integriert über Einheitskreis und Einheitskugel, werden zugefügt.

*E. M. Bruins.*

**Ermakov, S. M.:** Über ein Verfahren der Konstruktion von Kubaturformeln. Trudy mat. Inst. Steklov. 53, 37—42 (1959) [Russisch].

Verf. geht aus von der Bemerkung, daß die Konstruktion einer Formel

$$\int_0^1 x g(x) dx = \sum_{\mu=1}^k \alpha_{\mu} g(x_{\mu}),$$

richtig für alle Polynome des Grades  $\leq 2k-1$ , unmittelbar den Übergang gestattet zu einer Markoff-Formel

$$\int_0^1 (f(x) - f(0)) dx \sim \sum_{\mu=1}^k \frac{\alpha_\mu}{x_\mu} \{f(x_\mu) - f(0)\}.$$

Für mehrfache Integrale entwickelt er das analoge Verfahren: aus

$$\iint_D xy g(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^N \alpha_i g(x_i, y_i),$$

richtig für alle Polynome des Grades  $\leq k$ , folgt

$$\iint_D \{f(x, y) - f(0, y) - f(x, 0) + f(0, 0)\} dx dy \sim \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i}{x_i y_i} \{f(x_i, y_i) - f(x_i, 0) - f(0, y_i) + f(0, 0)\},$$

richtig für den Grad  $\leq k+2$ . Mit dem Gewicht  $x^2 y^2$  kommt man zu Formeln, richtig für den Grad  $\leq 2k+5$ . Als Beispiel wird eine Formel für das Quadrat  $-1 < x < +1$ ,  $-1 < y < +1$ , richtig für den Grad  $\leq 9$ , entwickelt.

*E. M. Bruins.*

**Schoenberg, I. J.: Spline functions, convex curves and mechanical quadrature.** Bull. Amer. math. Soc. **64**, 352—357 (1958).

Verf. referiert über die Verwendung der Funktion  $(x - \xi)_+^n$ , welche für  $x - \xi \geq 0$  den Wert  $(x - \xi)^n$  hat und für  $x - \xi < 0$  identisch Null ist. Er konstruiert die Funktion

$$S_{n-1,k}(x) = P_{n-1}(x) + \sum_{v=1}^k C_v (x - \xi_v)_+^{n-1},$$

wo  $P_{n-1}(x)$  ein Polynom höchstens  $(n-1)$ -ten Grades ist. Die Vielfachheit der Nullstellen wird definiert. Als Anwendung erwähnt Verf. eine Verschärfung eines Theorems von Carathéodory über konvexe Kurven: falls  $\Gamma$  eine kompakte Menge ist und  $K$  die konvexe Hülle, dann ist jeder Punkt von  $K$  Schwerpunkt von  $k+1$  mit positiven Massen belegten Punkten,  $q_0, q_1, \dots, q_k$  aus  $\Gamma$ . Die Verwendung dieser Funktionen für die Quadratur und die Identität der Resultate mit Formeln von Radau wird angegeben.

*E. M. Bruins.*

**Hyvärinen, L.: Fourier analysis, a new numerical method.** Acta polytechn. Scand. Nr. 248, Mat. comput. Machin. Ser. Nr. 2, 19 p. (1958).

Eine Methode zur Bestimmung der Fourierkoeffizienten einer empirischen Funktion. Die Fourierkoeffizienten werden als Summen von Ordinaten erhalten, die mit den Faktoren  $\pm 1$  multipliziert werden und nach einem bestimmten Schema auszuwählen sind. Die Anzahl der benötigten Ordinaten wächst mit der Ordnung  $n$ , die Genauigkeit der Fourierkoeffizienten mit  $\sqrt{n}$ .

*K. Stumpff.*

**Will, Herbert S.: Tables for automatic computation.** Commun. Assoc. comput. Machin. **1**, Nr. 1, 8—11 (1958).

Der Interpolationsfehler einer durch eine Tabelle gegebenen Funktion kann unter Umständen erheblich verringert werden, wenn man die Funktionswerte  $f_0, f_1, \dots, f_N$  an den Stützstellen  $x_0, x_1, \dots, x_N$  leicht abändert und mit den abgeänderten „Funktionswerten“  $g_0, g_1, \dots, g_N$  in die Interpolationsformel eingeht. Die  $g$  werden so bestimmt, daß ein gewisses Fehlermaß der durch Interpolation mit den  $g$  erhaltenen Funktion  $f^*$  möglichst klein wird. — Verf. behandelt den Fall der linearen Interpolation (in jedem der Teilintervalle  $x_k, x_{k-1}$ ) zusammen mit den

Gaußschen Fehlermaßen  $\int_{x_0}^{x_N} \left(\frac{\delta f}{f}\right)^2 dx$  bzw.  $\int_{x_0}^{x_N} (\delta f)^2 dx$ .

*H. Rutishauser.*



Wilson jr., Raymond H.: Nomographic solutions for position relations between close earth satellite and its observer. Amer. math. Monthly 66, 393—401 (1959).

Chovanskij, G. S.: Methodik der Konstruktion von Nomogrammen mit Dreiecks- (Hexagon-) Transparent. Vyčislit. Mat. 2, 160—177 (1957) [Russisch].

Verf. entwickelt eine neue Methode zur Konstruktion von Hexagonaltafeln (1885 von Lallemand vorgeschlagen und später von d'Ocagne, Lacmann und Moldauer weiter entwickelt). Hexagonaltafeln sind Nomogramme, die einen Summentyp darstellen mit einer speziellen Ablesevorrichtung, die meist die Form eines Dreiecks hat. Bisher haben sie in der nomographischen Praxis keine größere Bedeutung erlangt. Verf. sieht ihre Bedeutung darin, daß zu ihrer Konstruktion — besonders bei der Darstellung von Gleichungen mit mehr als drei Veränderlichen — drei willkürliche Funktionen und Parameter für eine günstige Gestaltung der Skalen und der Ablesevorrichtung verfügbar sind. Das angegebene Konstruktionsverfahren wird an einer Gleichung mit sechs Variablen demonstriert, für die schon eine von Gersevanov konstruierte gekoppelte Fluchtlinientafel mit Hilfsnetzen vorliegt. Jedoch zeigt ein Vergleich beider Nomogramme auf ihre Zweckmäßigkeit und Übersichtlichkeit hin, daß die Hexagonaltafel einerseits das Ergebnis mit nur einer Einstellung liefert, andererseits aber die Fluchtlinientafel übersichtlicher ist und trotz zweimaliger Einstellung der Ablesegeraden schneller und sicherer zum Ergebnis führt.

K. Bögel — A. Stammlinger.

• Smirnov, A. D.: Moderne mathematische Maschinen. [Sovremennye matematičeskie mašiny.] Moskau: Staatsverlag für Physikalisch-mathematische Literatur 1959. 112 S., Rub. 1,70 [Russisch].

In der Broschüre werden die Wirkungsprinzipien und die physikalischen Grundlagen der Einrichtung mathematischer Modelle und elektronischer Rechenmaschinen mit diskreter Wirkung populär erläutert.

Rosmann, M.: Sur les machines à calculer. Gaz. Mat. Fiz., București, Ser. A 11 (64), 257—266, russ. und französ. Zusammenfassung 266 (1959) [Rumänisch].

Moldovan, Elena: Les machines à calculer et le développement des mathématiques. Gaz. Mat. Fiz., București, Ser. A 11 (64), 193—201, russ. und französ. Zusammenfassung 201 (1959) [Rumänisch].

Sager, Günther: Gezeitenrechenmaschinen als Beispiel für die Mechanisierung langwieriger Rechenvorgänge in der Physik. Wiss. Z. Univ. Rostock, math.-naturw. R. 8, 281—290 (1959).

Verf. schildert die historische Entwicklung im Bau der Gezeitenmaschinen und beleuchtet insbesondere aktuelle Gesichtspunkte für den Bau neuer Maschinen.

K. Eggers.

Grönlund, M. and C. O. Lund: An electronic computer for statistical analysis of radio propagation data. Acta polytechn. Nr. 222, appl. Math. comput. Machin. Ser. 1, 3, 26 p. (1958).

Der beschriebene Apparat verwandelt die zeitliche Funktion der Feldstärke von drahtlos übermittelten Signalen in eine zeitliche Folge von diskreten Werten, die digital dargestellt sind, und registriert sie auf einem Lochstreifen. Diese Folgen werden statistisch ausgewertet, teilweise unter Verwendung eines Apparates, der Metallkugeln in mehrere, den verschiedenen Amplitudenwerten entsprechende Behälter abfüllt.

Ambr. Speiser.

Meňšikov, G. G.: Ein Tischgerät zur harmonischen Synthese. Leningradsk. gosudarst. Univ., učenyje Zapiski Nr. 271, mat. Fak., Ser. mat. Nauk Nr. 33, 48—53 (1958) [Russisch].

Verf. beschreibt eine einfache Schaltung zur ein- und mehrdimensionalen Fourier-Synthese. Die einzelnen Fourierglieder werden mit Hilfe von Spannungs-

teilern als Gleichspannungen gebildet. Die Summation der Teil-Spannungen erfolgt mittels Kondensatoren, die zunächst den Teil-Spannungen proportional aufgeladen und anschließend in Reihe geschaltet werden. Als Bauelemente werden nur Widerstände, Kondensatoren, Wechsel- und Schrittschalter sowie ein Meßinstrument benötigt (bei der mehrdimensionalen Fourier-Synthese auch Schrittschaltwerke). Als Fehler wird bei der eindimensionalen Synthese für 5 Koeffizienten unter Verwendung einfacher Bauelemente 1% angegeben. *H. Adler.*

**Adler, Helmut:** Ein Gerät zur Auflösung von Polynomgleichungen. *Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden* 5, 1—4 (1956).

**Adler, Helmut:** Ein elektrisches Gerät zur Auflösung von Polynomgleichungen. *Nachr. -techn.* 7, 335—342 (1957).

Mit Transformatoren wurde ein Gerät gebaut, das das Auffinden der Nullstellen von Polynomen  $n$ -ten Grades  $P_n(z)$  mit reellen Koeffizienten gestattet. Die Variable  $z$  wird in der Form  $z = r e^{i\varphi}$  dargestellt.  $P_n(z)$  wird für 20 Werte von  $r$  und 13 Werte von  $\varphi$ . total also für 260 Punkte berechnet. Eine Transformation  $z^* = 1/z$  ergibt weitere 260 Punkte. Das Aufsuchen von Nullstellen geschieht dadurch, daß geprüft wird, welcher dieser Punkte den kleinsten Wert für  $P_n$  ergibt. Durch Eingabeln oder durch numerische Weiterbehandlung kann die Genauigkeit verbessert werden. *Ambr. Speiser.*

**Valat, Jean:** Influence de l'amortissement sur un simulateur électromécanique d'une équation de Hill. *C. r. Acad. Sci., Paris* 244, 3017—3020 (1957).

Beim Betrieb einer elektromechanischen Nachbildung der Gleichung der Bahnen in einem Cosmotron (dies. Zbl. 77, 328) ergab sich eine Hillsche Differentialgleichung mit einem geschwindigkeitsproportionalen Dämpfungsglied. Das Stabilitätsdiagramm dieser Gleichung wird angegeben, welches es gestattet, den Einfluß dieser Art Dämpfung zu überprüfen. *Ambr. Speiser.*

**Cetlin, M. L.:** Über imprimitive Schemata. *Probl. Kybernetik* 1, 23—45 (1958) [Russisch].

Ein allgemeines (elektrisches) Schema im Sinne des Verf. besteht aus  $n$  Zuleitungen  $x^1, \dots, x^n$  und  $p$  Ableitungen  $f^1, \dots, f^p$ . Jede Leitung  $x^i, f^j$  hat in einem gewissen Moment  $t$  einen und nur einen der beiden mit 0 und 1 bezeichneten Zustände  $x_t^i, f_t^j$ , und der Zustand des Systems in diesem Moment ist vollständig durch  $X_t = (x_t^1, \dots, x_t^n), F_t = (f_t^1, \dots, f_t^p)$  beschrieben. Das Schema heißt primitiv, wenn  $F_t$  eine wohldefinierte Funktion von  $X_t$  ist,  $F_t = F(X_t)$ , dagegen imprimitiv, wenn es auch mit Zeitverlust (Verspätung = eine Zeiteinheit) rückgekoppelte Paare  $\varphi^1, \dots, \varphi^s$  von Zu- und Ableitungen gibt, d. h.  $\varphi_t^k = f_t^{p+k} = x_{t+1}^{n+k}$ , so daß gilt:  $F_{t+1} = F(X_{t+1}, \Phi_t)$ ,  $\Phi_{t+1} = \Phi(X_{t+1}, \Phi_t)$  mit  $\Phi_t = (\varphi_t^1, \dots, \varphi_t^s)$ . Verf. entwickelte für die Analyse und Synthese solcher elektrischer (elektronischer) Schaltungssysteme einen binären Matrizenkalkül, dessen ziemlich umfangreiche Formeln im Vergleich zu früheren vektoralgebraischen Methoden insgesamt bedeutend kompakter und auch für verhältnismäßig größere Systeme effektiv anwendbar sind. Diese Resultate wurden in zwei früheren Noten veröffentlicht [Doklady Akad. Nauk SSSR. 117, 979—982; 118, 488—491 (1958)]. Die vorliegende ausführliche Darstellung der Resultate und Methoden ist reichlich mit elektrischen Diagrammen und Beschreibungen technischer Details ausgestattet. *D. Tamari.*

**Ioanin, Gh.:** Sur un type de problèmes concernant les schémas à sélecteurs. *An. Univ. C. I. Parhon Bucureşti, Ser. Acta logica* 1, 187—193, russ. und engl. Zusammenfassung 193 (1958).

L'A. fait, à l'aide de l'algèbre de Boole, la synthèse d'un mécanisme ayant un sélecteur  $S$ , un bouton  $A$  et des relais, tels que, chaque fois que le bouton est pressé, le sélecteur avance d'un pas. Lorsqu'on cesse d'appuyer sur le bouton, le sélecteur



ne change pas de position; lorsque la roue du sélecteur a fait un tour complet, le mécanisme rentre dans la position de repos. L'A. donne un exemple calculé.

*M. Nedelcu.*

**Elgot, Calvin C. and Jesse B. Wright: Quantifier elimination in a problem of logical design.** Michigan math. J. 6, 65—69 (1959).

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Anwendung des Formelapparats der theoretischen Logik auf die Darstellung des Verhaltens von Rechenmaschinen schaltkreisen. Ein solches Verhalten ist gekennzeichnet durch einen gewissen Zusammenhang, der zwischen irgendeiner Folge von Eingabesignalen und den sich darauf ergebenden Ausgabesignalen besteht. Zur Beschreibung von Schaltkreisen, die von der Zeit unabhängig sind, wird schon lange der Aussagenkalkül benutzt. Verfügen wir nun, den Prädikatenkalkül heranzuziehen zur Beschreibung von zeitlich abhängigen Schaltkreisen, d. h. von Schaltkreisen, bei denen die Ausgabesignale von der gesamten Vorgeschichte der Eingabesignale abhängen. Es werden dazu Formeln mit quantifizierten Zeitvariablen benutzt. Es wird gezeigt, daß der gewählte Formalismus zwar sehr umfassend ist, aber dennoch nicht alle möglichen Schaltkreise zu beschreiben vermag. Der Beweis eines grundlegenden Theorems beruht im wesentlichen auf einer Elimination des Existenzquantors.

*Th. Geis.*

**Ljapunov, A. A.: Über die logischen Schemata von Programmen.** Probl. Kibernetik 1, 46—74 (1958) [Russisch].

Die Arbeit besteht aus zwei Kapiteln. Das erste beschreibt das logische Funktionieren einer programmgesteuerten Ziffernrechenmaschine in ihren verschiedenen Teilen, ihren „Kode“, Programmen und Subroutinen, so wie sie in der Sowjetunion in den Jahren 1952—53 tatsächlich ausgearbeitet waren. Das zweite, umfangreichere Kapitel ist der Methodik des Programmierens gewidmet. Allgemeine Grundzüge der Problemanalyse, Programmherstellung und Programmkontrollen werden systematisch entwickelt und an zahlreichen Beispielen erläutert. Als besonders, weniger bekannte Züge seien in diesem Zusammenhang erwähnt die Darstellung der Transformationen von Programmen in äquivalente, d. h. dasselbe Problem lösende Programme nach Ju. I. Janov (siehe folgende Besprechung) und die Methode der „logischen Skala“ von M. R. Šura-Bura (Doklady Akad. Nauk SSSR) für Bedingungen, die ihren Wert im Verlauf des Programmverlaufs verändern. Der Begriff des (logischen) Programmschemas wurde vom Verf. etwa 1953 in die sowjetische Literatur eingeführt und entspricht im wesentlichen dem sogenannten „flow diagram“. Diagramme des allgemeinen Programmverlaufs werden stets als Formeln auf einer Linie von links nach rechts gedruckt, d. h. als Folgen von Operatoren  $A, B, \dots$ , logischen Bedingungen  $p, q, \dots$

(öfters in der Form von Ungleichungen) und indizierten Pfeilen  $\overset{1}{\uparrow}, \overset{1}{\downarrow}, \overset{2}{\uparrow}, \dots; \overset{i}{\uparrow}$  kann nur nach einer Bedingung  $p, q, \dots$  auftreten und führt im Falle, daß  $p$  nicht erfüllt ist, zu dem mit gleichem Index bezeichneten  $\overset{i}{\downarrow}$ , das irgend wo anders in der Formel vorkommt, von wo dann wieder weiter nach rechts gelesen wird;  $\overset{i}{\uparrow}$  wird nicht beachtet, wenn  $p$  erfüllt ist.

*D. Tamari.*

**Janov, Ju. I.: Über die logischen Schemata von Algorithmen.** Probl. Kibernetik 1, 75—127 (1958) [Russisch].

Die logischen Schemata sind äußerlich (d. h. typographisch) dasselbe wie die Ljapunovsche Schreibweise der Programmschemata (siehe Ende der vorhergehenden Besprechung) und werden aus letzteren durch Abstraktion gewonnen: die Operatoren (Op.)  $A, B, \dots$  werden zu bloßen Symbolen  $A_1, \dots, A_n$ , die Bedingungen  $p, q, \dots$  zu  $\alpha, \beta, \dots$  (genauer  $p \overset{i}{\uparrow}, \dots, \alpha \overset{i}{\uparrow}, \dots$ ) zu (zunächst) unabhängig frei veränderlichen logischen (log.) Variablen  $p_1 \overset{i}{\downarrow}, \dots, p_k \overset{i}{\downarrow}$  (0 ist „falsch“, 1 ist „wahr“), bzw. log.



Funktionen (Fkt.) dieser Variablen  $\alpha \lfloor_i$ , und  $\lfloor_i \cdot \rfloor_i$  haben dieselbe Bedeutung wie

Ljapunovs  $\uparrow, \downarrow$ . In der Einleitung wird gezeigt, wie jeder normale Algorithmus im Sinne von Markov (dies. Zbl. 58, 5), angewendet auf ein Wort im entsprechenden Alphabet, in die Form eines solchen Programmschemas gebracht werden kann. Es wird bemerkt, daß dies auf verschiedene Weise möglich ist. Damit ist das Hauptproblem dieser Theorie, nämlich das Äquivalenzproblem gestellt. Für konkrete Programmschemata ändern sich im allgemeinen die log. Werte der Bedingungen ständig als Funktion der im Verlauf des Prozesses ausgeführten Handlungen. Als abstraktes, jedoch unvollkommenes Gegenbild führt Verf. die „Veränderlichkeitsverteilung“ (V. V.) ein, d. h. eine Korrespondenz  $A_i \rightarrow \mathfrak{P}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), wo die  $\mathfrak{P}_i$  Teilmengen von  $\mathfrak{P} = \{p_1, \dots, p_k\}$  sind: das der Handlung  $A_i$  unmittelbar vorhergehende und das ihr unmittelbar nachfolgende log. Argument (A.) unterscheiden sich höchstens in den Werten der in  $\mathfrak{P}_i$  vorkommenden Variablen. Eine allgemeinere und vollkommener, jedoch kompliziertere V. V. wird definiert, aber in dieser Arbeit nicht weiter betrachtet. Bei „leerer“ V. V. (alle  $\mathfrak{P}_i = \emptyset$ ) verläuft der Prozeß unter konstanten Bedingungen, d. h. es gibt nur  $2^k$  solcher Prozesse; bei „universeller“ V. V. (alle  $\mathfrak{P}_i = \mathfrak{P}$ ) mögen sich die  $p_1, \dots, p_k$  frei verändern. Die V. V. hebt unter allen a priori möglichen Argumentfolgen (A. F.) eine gewisse Teilmenge als die der zulässigen (zul.) A. F.  $A_{s_1}, A_{s_2}, \dots$  hervor. Alle dabei sukzessiv entwickelbaren Operatorfolgen  $A_{s_1}, A_{s_2}, \dots$  bilden zul. Bedeutungen (Bedeut.) des Schemas; diese mögen nun leer oder endlich sein (d. h. abbrechen) oder unendlich sein, was auch den Fall der leeren Periode einschließt: der Prozeß bricht zwar nicht ab, es kommt jedoch zu keiner weiteren Handlung, d. h. Op.  $A_i$ , in dem Sinn, daß solche Symbole stets übersprungen werden. Diese in bündigem Stil geschriebene originelle Theorie hat, abgesehen von allgemein logischen Zügen, in Form und Inhalt nur wenig mit anderen, bekannten Theorien gemein. Über 40 Begriffe werden durch besondere Definitionen eingeführt (in Wirklichkeit sind es mehr), manche durch komplizierte Rekursionen. Dementsprechend kommen viele Induktionsbreiten vor. § 1 (78—89) führt drei Äquivalenzbegriffe (Äq.) für Schemata  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  ein: 1. gewöhnliche (eigentliche) Äq.  $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$  für vorgegebene (geg.) V. V. bedeutet, daß für alle für  $\mathfrak{A}$  oder  $\mathfrak{B}$  zul. A. F. die entsprechenden Bedeut. von  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  (genau) übereinstimmen; 2. partielle (part.) Äq.  $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ , wenn  $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$  oder die zul. Bedeut. eines der beiden Schemata unendlich ist; 3. schwache Äq.  $\mathfrak{A} \approx \mathfrak{B}$  [Verf. benutzt kein Symbol], wenn für beliebige konstante A. F., d. h. für leere V. V., beide Bedeut. mit gleichem Op. beginnen, oder beide Bedeut. leer sind, oder beide leere Perioden haben. Zu jedem elementaren Ausdruck (e. A.)  $\mathfrak{E}$ , d. h. Op.  $A_i$ , log. Beding.  $\alpha \lfloor_i$ , rechte Halbklaammern  $\rfloor_i$ , wird zunächst eine log.

Fkt.  $\mathfrak{E}_{(0)}^{\otimes}(\Delta)$  definiert, die sog. erste Arbeitsbedingung von  $\mathfrak{E}$ :  $\mathfrak{E}_{(\mathfrak{A})}^{\otimes}(\Delta) = 1$  oder  $= 0$ , je nachdem ob  $\mathfrak{E}$  im Verlauf von  $\mathfrak{A}(\Delta)$ , d. h.  $\mathfrak{A}$  mit konstanter A. F.  $\Delta$ , tatsächlich auftritt (= gelesen wird) oder nicht. Mittels neuer log. Hilfsvariablen  $q_i$  ( $i = 1, \dots, n$ , für jedes  $A_i$ ) werden durch schrittweise abwechselnde Rekursion nach  $\nu$  neue log. Fkt.  $\alpha_i^{\nu+1} = \text{Max } A_i^{\otimes}(\mathfrak{A}(\nu))$  (Max über alle  $q_1, \dots, q_n$  und die  $\mathfrak{P}_i$  der geg. V. V. der  $p_1, \dots, p_k$ ) und Hilfsschemata

$$\mathfrak{A}^{(\nu+1)} \equiv q_1 \vee \overline{\alpha_1^{\nu}} \lfloor_{j_1} \dots q_n \vee \overline{\alpha_n^{\nu}} \lfloor_{j_n} (p_1, \dots, p_k, A_1 \rfloor_{j_1}, \dots, A_n \rfloor_{j_n})$$

aufgebaut ( $i = 1, \dots, n$ ;  $\overline{\alpha_i}$  Negation von  $\alpha_i$ ;  $j_1, \dots, j_n$  neue nicht in  $\mathfrak{A}$  vorkommende Indices;  $\mathfrak{A}^{(0)} = \mathfrak{A}$ ;  $\alpha_i^1 = \text{Max } A_i^{\otimes}(p_1, \dots, p_k)$ ). Da die log. Fkt. in einer aus  $0 < 1$  wie üblich induzierten part. Ordnung einen endlichen Verband bilden, muß jedes zu größeren Fkt. aufsteigende Rekursionsverfahren nach endlich vielen, etwa  $\mu$

Schritten stationär werden. Man gelangt so für die geg. V. V. zu der stationäre Einbettung  $\mathfrak{A}^{(\mu)}$  von  $\mathfrak{A}$  und den gesternten Fkt.  $\mathfrak{E}_{(\mathfrak{A})}^* = \text{Max}_{q_1, \dots, q_n} \mathfrak{E}_{\mathfrak{A}^{(\mu)}}^*$ . Für

leere V. V. gilt  $\mathfrak{E}_{(\mathfrak{A})}^* = \mathfrak{E}_{(\mathfrak{A})}^{\otimes}$ . Verf. kann nun mehrere Sätze formulieren und beweisen, z. B. Satz 1:  $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \Leftrightarrow \mathfrak{A}^{(\mu)} \approx \mathfrak{B}^{(\mu')}$  für geg. V. V., der das Äq.-Problem der Schemata — eine Art Wortproblem — auf die effektiv (endlich algorithmisch) feststellbare schwache Äq. der stationären Einbettungen zurückführt. Eine andere ebenfalls rekursive Einbettungskonstruktion  $\tilde{\mathfrak{A}}$  liefert einen ähnlichen Satz für partielle Äq.:  $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \Leftrightarrow \tilde{\mathfrak{A}} \approx \tilde{\mathfrak{B}}$ . Ist insbes. eine Äq. für die universelle V. V. bewiesen, so folgt sie für beliebige V. V. § 2 (89—112) betrachtet die erlaubten Transformationen (Transf.), die Schemata in äq. Schemata verwandeln, und führt zunächst eine binäre Relation  $\mathfrak{E} < \varphi$ , die sogenannte Unterordnung oder Subordination (Sub.) von El.  $\mathfrak{E}$  in einem Schema  $\mathfrak{A}$  mit geg. V. V. zu log. Fkt.  $\varphi$  ein:

$$(\mathfrak{E} < \varphi) \Leftrightarrow (\mathfrak{E}^* \Rightarrow \varphi) \Leftrightarrow \mathfrak{E}^*(p_1, \dots, p_k) \leq \varphi(p_1, \dots, p_k)$$

( $\Rightarrow$  log. Implikation,  $\leq$  die gewöhnliche, durch  $0 < 1$  induzierte Ordnung, z. B.: die Konstante 1 ist die größte Fkt. und es gilt stets  $\mathfrak{E} < 1$ ). Die Sternfkt. und damit die Sub.-beziehung können in vielen genügend einfachen Fällen ohne explizite Konstruktion der stationären Einbettung festgestellt werden; z. B. sind die ersten Arbeitsbeding. log. Beding. vom log. Skelett, d. h. dem durch Streichung aller Operatoren gewonnenen Ausdruck, direkt ablesbar. Die Äq.-Transf. werden allgemeiner für Ausdrücke (gotische Buchstaben), d. h. gewisse mögliche Stücke von Schemata, definiert. Das Ziel ist, alle wahren Relationen  $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$  ( $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  abzuleiten. Das wird durch Aufstellung eines ziemlich umfangreichen Axiomensystems bestehend aus 7 Gruppen von insgesamt 16 definierenden Relationen (wie in assoziativen Systemen oder „Post-Sprachen“), zwei Schlußregeln, einer Indexwechselregel und schließlich einer Sub.-regel:  $\alpha \downarrow_i < \beta \Rightarrow \alpha \downarrow_i = (\alpha \cdot \beta) \downarrow_i$

( $\alpha \cdot \beta$  gewöhnliches Produkt) und Beweis der Vollständigkeit des Systems erreicht. Für beliebige V. V. ist dies im allgemeinen nicht effektiv (endlich, algorithmisch), kann jedoch in spezielleren Fällen garantiert werden. So wird durch Rekursion zunächst eine bedingte Sub.  $n$ -ter Stufe und mit deren Hilfe eine effektive Sub. „ $<^\circ$ “ definiert und dann für beliebige Schemata die Äquivalenz dieses Begriffes „ $<^\circ$ “ mit dem der gewöhnlichen Sub. „ $<$ “ für leere V. V. bewiesen (Satz 4). § 3 betrachtet Matrizen log. Fkt.  $\alpha_{ij}(p_1, \dots, p_k)$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, n$ ), die in gewissem Sinn als Übergangsmatrizen angesehen werden können:  $\alpha_{ij}(\mathcal{A}_s) = 1$  bedeutet, daß nach der Handlung  $\mathcal{A}_i$  für das Argument  $\mathcal{A}_s$  die Handlung  $\mathcal{A}_j$  auftritt und keine andere:  $\alpha_{im}(\mathcal{A}_s) = 0$  für  $m \neq j$ .  $\mathcal{A}_0$  ist „ad hoc“ für den Anfang des Prozesses eingeführt. Auch für diese Matrizenschemata werden nach einem analogen Aufbau von Begriffen Fragen der Äq. und erlaubter Transf. behandelt und gelöst. Ihre Theorie wird dann in verschiedenen Richtungen weiter ausgebaut, worauf wir hier nicht eingehen.

D. Tamari.

Pawlak, Z. and A. Wakulicz: Use of expansions with a negative basis in the arithmometer of a digital computer. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III. 5, 233—238 (1957).

Zahlssysteme mit negativer Basis, vornehmlich binärähnlicher Art mit der Basis  $-2$ , werden zur Verwendung in Rechenautomaten vorgeschlagen. Eine Durchführung der vier Grundrechnungsarten in diesem Zahlssystem wird angegeben. Sie ist nicht wesentlich komplizierter als im gewöhnlichen Binärsystem. Als Vorteil der negativen Basis wird die unmittelbare Darstellbarkeit negativer Zahlen angesehen.

F. L. Bauer.

Balasiński, W. and S. Mrówka: On algorithms of arithmetical operations. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 5, 803—804 (1957).

Diskussion der Arithmetik in Zahlssystemen mit negativer Basis (siehe vorstehendes Referat), insbesondere der Division. *F. L. Bauer.*

**Burge, W. H.:** Sorting, trees, and measures of order. Inform. and Control 1, 181—197 (1958).

Verf. analysiert die besten Verfahren zur Ausführung von Sortierungen in einer digitalen Rechenanlage. Die verwendete Strategie wird durch einen Baum veranschaulicht; die Wahl der besten Strategie hängt vom Grad der Ordnung, die in den gegebenen Daten bereits vorhanden ist, ab, wofür Verf. Kriterien gibt. Ferner wird der Anschluß an den Begriff der Entropie hergestellt. *Ambr. Speiser.*

**Rappoport, M. G.:** Die Berechnung endlicher Differenzen mit Lochkartenmaschinen. Vyčislit. Mat. 5, 120—145 (1957) [Russisch].

Berechnung des Differenzenschemas  $\Delta^{\nu} f_r = f_{r+\nu} - \sum \Delta^{\mu-1} f_{r+\nu-\mu}$  einer auf Lochkarten gespeicherten Tabelle  $f_r$ . I. Die Tabelliermaschine T-5 hat 8 nicht-saldierfähige Zähler und 9 Programmgänge (zwischen zwei Kartengängen). Sie läßt  $\nu = 7$  zu, und bis  $\nu = 3$  können mehrere Tabellen zugleich bearbeitet werden. Für alle diese Fälle gibt Verf. optimale Programme (Schaltungen) an, die eine nur durch Erfahrung zu erwerbende, detaillierte Kenntnis der technischen Eigenschaften der T-5 verraten. II. Bei  $\nu \leq 4$  und nur einer Tabelle rechnet das Gerät ÉV 80-3 (s. das folgende Referat) schneller und mit Rechenkontrolle; das Ergebnis erscheint allerdings nur in Lochkartenform. *G. Beyer.*

**Drozdov, B. M. und M. G. Rappoport:** Kodierung der Operationen des elektronischen Rechenlochers ÉV 80-3. Vyčislit. Mat. 2, 146—153 (1957) [Russisch].

Für die Programmierung dieses Gerätes wird eine geeignete Symbolik angegeben. Das Gerät enthält einen 16-stelligen Akkumulator, 10 Speicher von insgesamt 48 Stellen und läßt 32 Programmschritte im Kartengang (110 ms) zu. *G. Beyer.*

**Powers, John E.:** Elimination of special functions from differential equations. Commun. Assoc. comput. Machin. 2, Nr. 3, 3—4 (1959).

A set of ordinary differential equations which is to be solved by numerical methods on a computer may involve mathematical functions whose values must either be computed by appropriate subroutines or be tabulated in the memory. If these functions themselves satisfy sufficiently simple differential equations (e. g. exponential or trigonometric functions), the original set of equations may be expanded to an augmented set of equivalent equations which no longer involves the special functions. The author argues that under many circumstances the new set of equations can be solved by the computer (using standard techniques such as Runge-Kutta) with a substantial saving of time or storage. An example is given which was programmed for the IBM 650 in which the elimination of three such special functions resulted in a time-saving of about 30 %. *P. Braunsfeld.*

**Newman, Morris and John Todd:** The evaluation of matrix inversion programs. J. Soc. industr. appl. Math. 6, 466—476 (1958).

Die numerische Inversion einer nichtsingulären quadratischen Matrix  $A$  der Ordnung  $n$  mit einem direkten Eliminationsalgorithmus habe an Stelle von  $A^{-1}$  die Matrix  $X$  ergeben. Als Fehlermatrizen  $R = (r_{ij})$  können z. B.  $XA - I$ ,  $AX - I$ ,  $X - A$  ( $\chi$  = Näherung für  $X^{-1}$ ),  $X - A^{-1}$  (falls  $A^{-1}$  bekannt ist) dienen und als Fehlermaße

$$a = \frac{1}{n^2} \sum |r_{ij}|, f = \frac{1}{n} (\sum r_{ij}^2)^{1/2}, m = \max |r_{ij}|.$$

Ist  $\lambda(A)$  bzw.  $\mu(A)$  die absolut größte bzw. kleinste charakteristische Wurzel von  $A$ , dann heißt  $P(A) = |\lambda/\mu|$  die Kondition von  $A$ . Die theoretischen Fehlerabschätzungen liefern gewöhnlich Schranken für  $\lambda(R)$ . Mit  $\varepsilon$  als der kleinsten von einer digitalen Rechenanlage erfaßbaren Zahl erhalten v. Neumann und Goldstine für symmetrische, positiv definite Matrizen  $A$  z. B.  $|\lambda(AX - I)| \leq 14,24 \cdot P(A) \cdot$



$\cdot n^2 \cdot \varepsilon$ . Einleitend werden bekannte Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Größen und Fehlerabschätzungen besprochen. Dann stellen Verff. 13 Typen von Matrizen mit bekannten Inversen zusammen, deren Konditionen exakt oder hinreichend genau bekannt sind, und diskutieren Erfahrungen bei der Ermittlung der Inversen nach verschiedenen Verfahren mit Fest- und Gleitkommaprogrammen auf verschiedenen Rechenanlagen. Insbesondere werden numerische Ergebnisse des "National Bureau of Standards" (SEAC; IBM 704) verglichen mit denen der "New York University" (Univac) und des "Oak Ridge National Laboratory". Die Invertierung einer  $28 \times 28$ -Matrix auf SEAC erfordert 10 Minuten Rechenzeit. Die Ergebnisse sind — nicht nur bedingt durch die größere Wortlänge, sondern auch durch die verwendeten Verfahren — genauer als die der IBM 704. Sie sind in Übereinstimmung mit den Abschätzungen von v. Neumann und Goldstine. Ein Univac-Beispiel für  $n = 28$  ergibt für  $AX - I$  ein  $m = 4 \cdot 10^{-6}$ , für  $XA - I$  dagegen  $m = 2660 \cdot 10^{-6}$ . G. Bertram.

Erlandsson, Gunnar: Computer program for centrifugal distortion in asymmetric top rotational spectra. Ark. Fys. 16, 181—184 (1959).

Ljapunov, A. A.: Über einige allgemeine Fragen der Kybernetik. Probl. Kybernetik 1, 5—22 (1958) [Russisch].

Dies ist eine allgemeine deskriptive Einführung in das Gebiet der sogenannten Kybernetik, die weitauseinanderliegende Wissenszweige und Fertigkeiten unter dem Gesichtspunkt der Analogie oder einer einheitlichen Methodik vereinigt. Die Kybernetik wird im wesentlichen als die Wissenschaft von den sich selbst dirigierenden Systemen definiert. In der Theorie sind solche Systeme nichts anderes als mathematische Algorithmen oder logische Schemata. In der Praxis werden sie in der Technik materiell verwirklicht, oder dienen als Modell zur Beschreibung, Nachahmung oder Erklärung biologischer oder ähnlicher Prozesse. Eine grundlegende Rolle wird dem Informationsaustausch zwischen dirigierenden und dirigierten Organen des Systems zugeschrieben. In einer historischen Übersicht wird N. Wiener als Gründer der Kybernetik genannt; Beiträge von Shannon, Ashby und anderen werden gewürdigt. Es gelingt Verf. in diesem begrenzten Umfang, eine klare, allgemein verständliche Darstellung aller Hauptprobleme der Kybernetik zu geben. Einige einfache (Ref.: manchmal zu einfache!) Beispiele veranschaulichen den Text.

D. Tamari.

LaSalle, J. P.: Time optimal control systems. Proc. nat. Acad. Sci. USA 45, 573—577 (1959).

The author provides a summary of some recent Russian and American results on the time-optimal problem for control systems operating with steering function (actuators) whose absolute values are bounded. Time-optimal refers to moving the controlled quantity to the desired value in minimum time. Special attention is paid to the time-optimum problem for "bang-bang" systems in which the absolute value of the steering function is always equal to a constant. Some basic theorems on linear autonomous and non-autonomous time-optimal systems are stated. It is shown that in non-autonomous systems any result that can be obtained by a (measurable) steering function whose absolute value is  $\leq C$  can also be obtained by a "bang-bang" steering function whose absolute value is always equal to  $C$ . For special non-autonomous systems the existence of an optimal "bang-bang" steering function is proved. Further more, the relations between optimal steering functions with absolute value  $\leq C$  and optimal "bang-bang" steering functions are explained. Analogous results are given for autonomous systems. S. H. Lehnigk.

Kuzovkov, N. T.: Eine Methode der Untersuchung von automatischen Regelungssystemen, die lineare Glieder mit veränderlichen Parametern enthalten. Vestnik Moskovsk. Univ., Ser. Mat. Mech. Astron. Fiz. Chim. 13, Nr. 6, 19—30 (1959) [Russisch].

Mit den Methoden der Theorie der Schrittregelungen (Impulsregelungen) wird das Verhalten von Regelkreisen untersucht, die in einen Teil mit konstanten Koeffizienten und ein zeitabhängiges Glied zerlegt werden können. Die Ausgangsgröße des „konstanten Teils“ wird als Summe von Einzelimpulsen aufgefaßt und die Reaktion des „veränderlichen Gliedes“ auf diese Impulse bestimmt. Dabei werden die Koeffizienten für die Dauer der Impulse als konstant betrachtet. Durch Superposition aller Teilreaktionen läßt sich dann eine Übertragungsfunktion des veränderlichen Gliedes für jeweils feste Zeitpunkte definieren, die als Übertragungsfunktion eines äquivalenten konstanten Gliedes aufgefaßt werden kann. Mit ihr lassen sich Dämpfungen, Störverhalten, Fehleranhäufung und andere Eigenschaften des Ausgangssystems näherungsweise bestimmen. Das Verfahren soll einfacher sein als eine von Zadeh angegebene Approximation der Übertragungsfunktion durch eine unendliche Reihe.

*K. Magnus.*

• **Lurje, A. I.:** Einige nichtlineare Probleme aus der Theorie der selbsttätigen Regelung. In deutscher Sprache herausgegeben von Heinrich Kindler und Rolf Reissig. Berlin: Akademie-Verlag 1957. XI, 167 S. DM 15.—.

Dieses Buch enthält in überarbeiteter und erweiterter Fassung Arbeiten des Verf. aus den Jahren 1945—1950 über nichtlineare Probleme der Theorie der automatischen Regelung. Das Buch ist gedacht für den in der Regelungstechnik tätigen und mathematisch begabten Ingenieur, der hier in verständlicher und den Anwendungen naher Form Verfahren zur Untersuchung nichtlinearer Regelungsprobleme, insbesondere die berühmte direkte Methode von A. M. Ljapunov, dargestellt findet. Das Buch gliedert sich in die folgenden vier Kapitel. Kap. I: „Die kanonische Form der Gleichungen in der Theorie der selbsttätigen Regelung“. Hier werden Methoden zur Reduktion der Bewegungsgleichungen von Regelungssystemen auf eine einfache, kanonisch genannte Form erläutert und Stabilitätskriterien hergeleitet, welche die Koeffizienten des Systems enthalten und sich unmittelbar auf Spezialfälle anwenden lassen. Das hierzu benötigte System der Transformationsformeln, welche die ursprünglichen in die kanonischen Veränderlichen überführen (es handelt sich um lineare Transformationen) wird explizit angegeben. Kap. II: „Die Stabilität der Regelungssysteme mit einem Stellglied“. Das Studium dieses Kapitels setzt voraus, daß der Leser mit den Grundlagen der Ljapunovschen Theorie der Stabilität von Bewegungen vertraut ist. Das Hauptproblem dieses Kapitels ist die Konstruktion der Ljapunovschen Funktion. Es werden Stabilitätskriterien gewonnen, die den Kriterien von Routh-Hurwitz analog sind; sie lassen sich auch auf Systeme höherer Ordnung anwenden. Kap. III: „Über Selbstschwingungen in Regelungssystemen“. Hier werden unter der Annahme, daß die Charakteristik des nichtlinearen Gliedes durch eine geeignet gewählte lineare Funktion mit Zusatzgliedern angenähert werden kann, die periodischen Lösungen eines Systems von Differentialgleichungen nach der Methode von Poincaré und der Methode der harmonischen Balance ermittelt. Ein analytisches Kriterium für die Stabilität der so gefundenen periodischen Lösungen wird in geschlossener Form aufgestellt; ferner werden Regeln für die Berechnung der Frequenzen und Amplituden dieser Lösungen angegeben. Schließlich wird die Frage nach den Selbstschwingungen, die unter dem Einfluß einer Coulombschen Reibung im Meßgerät des Reglers auftreten können, beantwortet. Kap. IV.: „Das Verhalten eines Regelungssystems an der Grenze des Stabilitätsgebietes“. In diesem letzten Kapitel wird das Problem von N. N. Bautin über die Unterteilung der Stabilitätsgrenzen in „gefährliche“ und „ungefährliche“ Abschnitte behandelt (vgl. auch K. Magnus, dies. Zbl. 66, 71; 78, 307, 308). Es wird ein einfaches Verfahren zur Berechnung der Ljapunovschen Größen angegeben; die Kriterien zur Unterscheidung der Grenzabschnitte werden in geschlossener und übersichtlicher Form dargestellt. — Das Buch enthält eine begrenzte Zahl von wohldurchdachten Beispielen, die die An-



wendung der allgemeinen Ergebnisse erläutern. Am Schluß jedes einzelnen Kapitels werden zahlreiche Literaturhinweise (ausschließlich sowjetische Autoren) gegeben. Eine Ergänzung des Verf. zur deutschen Ausgabe des 1951 erschienenen russischen Originals zählt die wichtigsten in der Zwischenzeit herausgekommenen russischen Arbeiten auf. Trotzdem will das Buch nach den Worten des Verf. durchaus nicht den Anspruch erheben, eine vollständige Zusammenstellung aller Untersuchungen über nichtlineare Probleme der Schwingungstheorie zu geben. Das Buch kann Ingenieuren und angewandten Mathematikern empfohlen werden. Die Übersetzung und Ausstattung der deutschen Ausgabe muß vorzüglich genannt werden.

*S. Schottlaender.*

● **Reynolds, George E.:** *Table of  $(\sin x)/x$ .* Bedford, Mass.: Antenna Laboratory, Electronics Research Directorate, Air Force Cambridge Research Center 1957. III, 5, 200 p.

Die besonders in der Antennentheorie sehr häufig auftretende, in  $x$  gerade Funktion  $\sin x/x$  liegt hier bis zu einer auf 8 Dezimalstellen gehenden Genauigkeit vertafelt vor;  $x = 0$  (0,001) 50,000; 8 D. Die Tafel hat in ihrer Aufmachung viel Ähnlichkeit mit einer Logarithmen-Tafel. Angaben über die Berechnungsmethode und über die Größe der Fehlerfortpflanzung, die genau untersucht worden ist, sind im Vorwort zu finden.

*H. Buchholz.*

## Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

### Wahrscheinlichkeitsrechnung:

● **Lindgren, B. W. and G. W. McElrath:** *Introduction to probability and statistics.* New York: The Macmillan Company 1959. XIII, 277 p. \$ 6.25.

Das Buch gibt eine elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik, immerhin einige Kenntnisse der Integralrechnung voraussetzend. Die zwölf Kapitel des Buches behandeln: Einfache Modelle der Wahrscheinlichkeitsrechnung; Zufallsvariable und Verteilungsfunktionen; diskrete Verteilungen; stetige Verteilungen; Summen von Zufallsvariablen; Stichproben; Darstellung und Erfassung statistischer Merkmale; Prüfen statistischer Hypothesen; Prüfen und Schätzen von Mittelwerten; Schätzen und Prüfen von Streuungen; Vergleichen zweier statistischer Gesamtheiten; einige weitere Probleme. In diesem letzten Kapitel werden Sequenz-Testung, Regressions-Bestimmung, Varianz-Analyse und Entscheidungs-Theorie kurz gestreift. Für das weitere Studium wird auf geeignete Literatur verwiesen. Die Darlegungen sind durchweg klar, und jeder Abschnitt enthält instruktive Beispiele und zahlreiche Übungsaufgaben, welche vielfach dem Kreis der technischen Wissenschaften entnommen sind. Einige wichtige Test-Tabellen sind am Schluß des Buches beigelegt. Als Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik ein durchaus geeignetes Lehrmittel, weniger vielleicht für Studierende der Mathematik als für Techniker und Ingenieure.

*H. Jecklin.*

● **Jaglom, A. M.:** *Einführung in die Theorie der stationären Zufallsfunktionen.* Deutsche Übersetzung unter wissenschaftl. Redaktion von **Herbert Goering.** (Schriftenreihe des Forschungsinstituts für Mathematik. Heft 6.) Berlin: Akademie-Verlag 1959. VIII, 177 S.

Vgl. die Besprechung des russ. Originals in diesem Zbl. 49, 366.

● **Bertrandias, Jean-Paul:** *Formation d'une classe de fonctions pseudo-aléatoires.* C. r. Acad. Sci., Paris 248, 513—515 (1959).

Konstruktion einer umfassenden Klasse von pseudo-zufälligen Funktionen (s. Bass und Verf., dies. Zbl. 78, 320; Bass und Krée, dies. Zbl. 83, 139 sowie Bass, dies. Zbl. 83, 140).

*W. Richter.*



Stam, A. J.: Some inequalities satisfied by the quantities of information of Fisher and Shannon. *Inform. and Control* 2, 101—112 (1959).

McMillan, B. and J. Riordan: A moving single server problem. *Ann. math. Statistics* 28, 471—478 (1957).

The authors consider a single server queueing process with Poissonian input of density  $\alpha$  and with general service time. Under the condition that at the instant  $t = 0$  the occupation time of the server is  $T$ , let  $\zeta_T$  denote the number of customers arriving at the counter until the instant when the server becomes idle for the first time. The authors determine the distribution, the expectation and the variance of  $\zeta_T$  in two particular cases, when the service time is constant or distributed exponentially. The referee would like to note that conjecture (4) can be proved as follows. We have  $\zeta_T = \xi_1 + \dots + \xi_{\nu(T)}$  where  $\{\xi_n\}$  is a sequence of identically distributed independent random variables having the same distribution as that of the number of customers served in a busy period and  $\nu(T)$  is independent of  $\{\xi_n\}$  and has the Poisson distribution with parameter  $\alpha T$ . Therefore if  $E\{x^{\xi_T}\} = P(x, T)$  and  $E\{x^{\xi_n}\} = F(x)$  then we have  $P(x, T) = \exp\{-\alpha T [1 - F(x)]\}$  which proves (4) using (2). L. Takács.

Haight, Frank A.: Queueing with balking. *Biometrika* 44, 360—369 (1957).

The author considers a single server queueing process with Poissonian input and exponentially distributed service time. It is supposed that a customer, arriving at an instant when the queue size is  $x$ , joins the queue with probability  $f(x)$  or goes away with probability  $1 - f(x)$ . In case of a stationary process, provided that it exists, let  $p(x)$  denote the probability that the queue size is  $x$ . The relationship between  $p(x)$  and  $f(x)$  is discussed in several particular cases. Finally a generalization is given for a transporting problem. L. Takács.

Beneš, V. E.: On queues with Poisson arrivals. *Ann. math. Statistics* 28, 670—677 (1957).

The author considers a single server queueing process with Poissonian input of intensity  $\lambda$  and with general service time. Let  $W(t)$  denote the virtual waiting time at the instant  $t$ , i. e. the time which a customer would wait if he joined the queue at the instant  $t$ . Further denote by  $z$  the instant when the server becomes idle for the first time and define  $Z(t) = W(t)$  if  $t \leq z$  and  $Z(t) = 0$  if  $t > z$ . The author determines the Laplace-Stieltjes transforms  $\varphi(s, t) = E\{e^{-sW(t)}\}$  and  $\psi(s, t) = E\{e^{-sZ(t)}\}$  and the probability  $P\{z < \infty\}$ . Then he defines the stationary process and determines its covariance function and spectral distribution function. L. Takács.

Reich, Edgar: Waiting times when queues are in tandem. *Ann. math. Statistics* 28, 768—773 (1957).

The author gives necessary and sufficient conditions for the reversibility of stationary Markov processes. A stationary stochastic process  $\{N(t)\}$  is said to be reversible if  $\{N(t)\}$  and  $\{N(-t)\}$  have the same multivariate distribution. Having proved that the stationary birth and death process is reversible, the author shows that if we consider a stationary queueing process with  $s$  counters, Poissonian input and exponential service time, then the sequence of departure times forms a Poisson process and at any time the queue size is independent of all past departure times. Furthermore the authors consider two tandem queues with single servers, exponential service times and queue discipline: first come first served; it is supposed that the customers arrive at the first queue according to a Poisson process and after departing from the first queue enter the second queue. Then it is proved that in the stationary case the times spent by a customer in the two queues respectively are independent random variables. L. Takács.

Kesten, H. and J. Th. Runnenburg: Priority in waiting line problems. I, II. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 60, 312—324, 325—336 (1957).

A single server queueing process is investigated. It is supposed that customers of different priorities  $1, 2, \dots, r$  arrive at a counter according to a Poisson process with density  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  respectively. Servicing takes place in the order of priority and for each priority in the order of arrival. The service times are independent random variables with distribution function  $F_k(t)$  for a  $k$ -customer ( $k = 1, 2, \dots, r$ ).

Write  $\mu_k^{(l)} = \int_0^\infty t^l dF_k(t)$ . Denote by  $p_{k,n}(a_1, \dots, a_r)$  the probability that the  $n$ -th departing customer is a  $k$ -customer, and leaves a queue consisting of  $a_1$  1-customers,  $\dots, a_r$   $r$ -customers at the counter. Denote by  $H_{k,n}(t)$  the distribution function of the waiting time of the  $n$ -th departing customer, given that the  $n$ -th departing customer is a  $k$ -customer. It is proved that if  $\sum_{i=1}^r \lambda_i \mu_i^{(1)} < 1$  then  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{k,n}(a_1, \dots, a_r) = p_k(a_1, \dots, a_r)$  and  $\lim_{n \rightarrow \infty} H_{k,n}(t) = H_k(t)$  exist, they are true distributions and are independent of the initial state. The authors give recurrence relations for the generating functions

$$f_{k,n}(x_1, \dots, x_r) = \sum p_{k,n}(a_1, \dots, a_r) x_1^{a_1} \dots x_r^{a_r}$$

and for the Laplace-Stieltjes transforms  $\psi_{k,n}(s) = \int_0^\infty e^{-st} dH_{k,n}(t)$ , and apply the theory of Markov chains. The case  $\sum_{i=1}^r \lambda_i \mu_i^{(1)} \geq 1$  is also treated. — In the second part the authors deal with the determination of  $f_k(x_1, \dots, x_r) = \sum p_k(a_1, \dots, a_r) x_1^{a_1} \dots x_r^{a_r}$  and  $\psi_k(s) = \int_0^\infty e^{-st} dH_k(t)$  in case  $\sum_{i=1}^r \lambda_i \mu_i^{(1)} < 1$ .

They determine explicitly  $\int_0^\infty t dH_k(t)$  and  $\int_0^\infty t^2 dH_k(t)$ . Further, the case  $\sum_{i=1}^r \lambda_i \mu_i^{(1)} \geq 1$  is also investigated.

L. Takács.

Chernoff, H. and J. F. Daly: The distribution of shadows. J. Math. Mech. 6, 567—584 (1957).

The authors deal with the determination of the probability distribution of lengths of intervals of shade cast on a line by disks randomly distributed in a plane with a point of source of light. It is supposed that the radii of the disks are identically distributed independent random variables and the centers of the disks form a Poisson process of density  $\lambda$ . The authors give several applications to counter processes and to traffic processes.

L. Takács.

Smith, Walter L.: On renewal theory, counter problems, and quasi-Poisson processes. Proc. Cambridge philos. Soc. 53, 175—193 (1957); Addendum *ibid.* 54, 305 (1958).

A sequence of identically distributed independent positive random variables  $\{t_n\}$  is said to form a renewal process. Let  $T_0 = 0$  and  $T_n = t_1 + \dots + t_n$  ( $n \geq 1$ ) and define  $N_t$  to be the greatest integer  $k$  such that  $T_k \leq t$ . In particular if  $P\{t_n \leq x\} = 1 - e^{-\lambda x}$  ( $x \geq 0$ ) then  $\{t_n\}$  is a Poisson process and we have  $E\{N_t\} = \lambda t$  for all  $t \geq 0$ . It is said that  $\{t_n\}$  is a quasi-Poisson process with index  $\tau$  if  $E\{N_t\}$  is linear in  $t$  for  $t \geq \tau$ . The author determines the asymptotic behaviour of  $E\{N_t\}$  and  $D^2\{N_t\}$ , as  $t \rightarrow \infty$ , for special renewal processes, namely for quasi-Poisson processes and for secondary renewal processes generated by an underlying renewal process. The theorems are applied in the theory of counters.

L. Takács.

**Bellman, Richard:** Dynamic programming and stochastic control processes. *Inform. and Control* **1**, 228—239 (1958).

Der Vektor  $x(t)$  beschreibe den Zustand eines Systems  $S$  zur Zeit  $t$ ; er genüge dem Anfangswertproblem  $\dot{x} = g(x, r(t), f(t))$ ,  $x(0) = c$ . Darin ist  $c$  der gegebene Anfangsvektor,  $r(t)$  ein zufälliger Zwangsvektor mit gegebener Verteilung und  $f(t)$  ein gesuchter Zwangsvektor, der so zu bestimmen ist, daß ein Funktional der Form

$$I(x) = \int_0^T h(x - y, t) dG(t)$$

bei gegebenen  $T, h, G$  und  $y(t)$  minimisiert wird, oder so, daß die Wahrscheinlichkeit minimisiert wird, mit der  $\max_{0 \leq t \leq T} h(x - y, t)$  eine gegebene Schranke über-

schreitet.  $f(t) \equiv f[x(t), t]$  beschreibt die Wirkung einer Rückkopplung zur Kompensierung der Wirkung von  $r(t)$ .  $y(t)$  charakterisiert das ideale Verhalten von  $S$ , dem  $x(t)$  im Sinne der Minimalforderungen möglichst nahe kommen soll. Verf. diskutiert eine Reihe von Sonderfällen und Varianten dieses Problemtyps und zeigt, wie sie — bzw. durch Finitisierung entstandene Näherungsprobleme — mit den Methoden der dynamischen Programmierung in Angriff genommen werden können.

*G. Bertram.*

**Bertotti, Bruno:** Trasformazioni di coordinate e movimento browniano. *Boll. Un. mat. Ital.*, III. Ser. **13**, 217—223 (1958).

The problem considered by the author refers to the behavior of the variables and parameters which appear in a Markoff process on a differentiable manifold when the reference system is changed. The density of the probability,  $p$ , satisfies the integral equation of Kolmogoroff. There is not required that the variable manifold is connected with a metric. It is sufficient if it is defined as a set of points being in a bi-unique correspondence with the system of coordinates  $x^i$ . The author studies the influence of the transformation of coordinates  $x^i = f^i(x'^i)$  upon the functions in question, the functions  $f^i$  being analytic. The density  $p^1$  in another space is equal to the product of  $p$  and the Jacobian of the transformation. The study of the Kolmogoroff equation involves an integral whose integrand is expanded into a series. Similarly, the integrals, referring to higher order moments are represented in form of series. These considerations allow the author to construct the invariants of the transformation. The technique is applied to the simplest possible case which is the Brownian motion, i. e., the moments of the second order are involved. It is shown that under the hypothesis of regularity, one easily derives from the equation of Kolmogoroff the well-known Fokker-Planck equation. The particular terms in this equation denote the field of forces and magnitude of the diffusion, respectively. Some transformations of the obtained results and the discussion on the possibility of the application of the technique to the moments of the higher order ( $m > 2$ ) close the paper.

*M. Z. v. Krzywoblocki.*

**Čerkasov, I. D.:** Division's method in the theory of Markov processes. *Bul. Inst. Politehn. Iași*, n. Ser. **4** (8), Nr. 1/2, 23—32, engl. Zusammenfassung 32 (1958) [Russisch].

Es wird eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung eines Systems parabolischer Differentialgleichungen angegeben, durch das ein Markoffscher Prozeß im  $R_n$  mit stetigen Trajektorien bestimmt wird.

*W. Richter.*

**Mullins, W. W.:** Analysis of the linear cooperative problem as a Markoff process. *Phys. Review*, II. Ser. **114**, 389—393 (1959).

Gegeben sei eine linear angeordnete Menge (deren Anzahl sehr groß sei) gleichartiger Elemente, die sich in jeweils  $n$  Zuständen befinden können. Unter der physikalischen Annahme, daß Wechselwirkungsenergie nur zwischen benachbarten



Teilchen existiert, wird die Verteilung der Teilchen auf die verschiedenen Zustände durch Übergangswahrscheinlichkeiten eines entsprechenden Markoffschen Prozesses beschrieben. Mit einem naheliegenden Ausdruck für die innere Energie und dem Chinčinschen Informations-Entropie-Ausdruck wird dann deren Differenz, die freie Energie, als Funktion der Übergangswahrscheinlichkeiten minimisiert. Die Extremwerte stellen sich als Eigenwerte einer Matrix dar, während sich die Übergangswahrscheinlichkeiten aus den Eigenvektoren ergeben. Besonders diskutiert Verf. die Möglichkeit, daß die Übergangswahrscheinlichkeiten von einem Boltzmannschen Typ sind, und kritisiert dabei gewisse Rechnungen von Kramers und Wannier (dies. Zbl. 27, 285).

*D. Morgenstern.*

**Siraždinov, S. Ch.: Über einen lokalen Satz.** Doklady Akad. Nauk Uzb. SSR 1959, Nr. 2, 5—6 (1959) [Russisch].

In Analogie zu einem Integralgrenzwertsatz von C.-G. Esseen (dies. Zbl. 81, 352) wird folgender lokaler Satz bewiesen: Sei  $\xi_1, \xi_2, \dots$  eine Folge identisch verteilter unabhängiger Zufallsgrößen mit der gemeinsamen Dichte  $p(x)$ . Es mögen Dispersion  $D\xi_1$  und drittes Moment  $E\xi_1^3 = \alpha_3$  existieren. O. B. d. A. sei  $E\xi_1 = 0, D\xi_1 = 1$ . Es bezeichne  $p_n(x)$  die Verteilungsdichte der Größe  $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \xi_i$ .  $\varphi(x)$  sei die Dichte der normierten Normalverteilung  $N(0,1)$ . Außerdem gebe es ein  $n_0$  derart, daß  $p_{n_0}^\alpha(x)$  ( $1 < \alpha \leq 2$ ) integrierbar ist. Dann gilt bei beliebigem  $q \geq 1$  für  $n \rightarrow \infty$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |p_n(x) - \varphi(x)|^q dx = \lambda_q \frac{|\alpha_3|^q}{n^{q/2}} + o(n^{-q/2}),$$

wobei

$$\lambda_q = \frac{1}{6^q (\sqrt{2\pi})^q} \int_{-\infty}^{+\infty} |3x - x^3|^q e^{-q x^2/2} dx. \quad W. Richter.$$

**Siraždinov, S. Ch.: Über eine additive Aufgabe mit wachsender Anzahl der Summanden.** Doklady Akad. Nauk Uzb. SSR 1959, Nr. 1, 5—7 (1959) [Russisch].

Zur Präzisierung eines lokalen Grenzwertsatzes von A. Postnikov [Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 20, 751—764 (1956)] für eine zahlentheoretische Funktion — die Anzahl  $r_{n,p}(k)$  der Darstellungen einer vorgegebenen ganzen positiven Zahl  $k$  in der Form  $k = \sum_{i=1}^n x_i^p$  ( $0 \leq x_i \leq p$ ) — wird ein lokaler Grenzwertsatz des Ref. für Wahrscheinlichkeiten großer Abweichungen benutzt (dies. Zbl. 80, 343).

*W. Richter.*

**Borovkov, A. A.: Some problems concerning large deviations of the maximum of sums of independent equally distributed random variables.** Doklady Akad. Nauk SSSR 121, 13—15 (1958) [Russisch].

Es seien  $\xi_1, \xi_2, \dots$  unabhängige, identisch verteilte beschränkte Zufallsgrößen, die nur ganzzahlige Werte annehmen können. Es bezeichne:  $s_0 = 0, s_n = \sum_{k=1}^n \xi_k, \bar{s}_n = \max_{0 \leq r \leq n} s_r$ . Es werden ohne Beweis einige Sätze über das Grenzverhalten der Wahrscheinlichkeiten  $P(\bar{s}_n < x)$  und  $P(\bar{s}_{n-1} < x, \bar{s}_n \geq x)$  für jedes denkbare Verhalten von  $x = x(n) > 0$ , wenn  $n$  gegen Unendlich strebt, angegeben. Das Problem großer Abweichungen bedeutet hier, daß  $\sqrt{n}/x(n) = O(1)$ . Speziell für den Fall  $x \sim \alpha n$  ( $0 < \alpha < \max \xi_1$ ) findet man den entsprechenden Satz in dem Bericht in Teor. Verojatn. Primen. 4, 478—479 (1959), ausführlicher in der Arbeit des Verf. *ibid.* 5, 137—171 (1960).

*W. Richter.*

**Gumbel, E. J.: The  $m^{\text{th}}$  range.** J. Math. pur. appl., IX. Sér. 38 (offert en hommage à M. Fréchet), 253—265 (1959).

In a previous paper (this Zbl. 32, 36) the author derived the asymptotic distribution of the range for symmetrical parent distributions of the exponential types, and tables of it have been published by the National Bureau of Standards. In this paper it is shown that the asymptotic density function and the asymptotic c. d. f. of the  $m$ -th range (difference between the  $m$ -th ranked value from the top, and the  $m$ -th from the bottom) can be expressed in terms of that of the (1st) range, and of exponentials. If  $m$  is half the sample size, then the normal distribution arises. (The omission of a factor in formula (43) of the paper mentioned above is corrected in this paper.)

*S. Vajda.*

**Franckx, Edouard:** Le problème des deux fréquences et sa généralisation. Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath. 59, 129—137, deutsche, ital. und engl. Zusammenfassung 137—138 (1959).

Si dimostra che la differenza fra le frequenze  $\alpha/m$  e  $\beta/n$  osservate su due serie dipendenti di prove, di cui la seconda sia formata dalla prima serie con l'aggiunta di altre  $n - m$  prove, segue la legge della convergenza centrale, con la sola condizione sufficiente  $\lim_{\substack{n > m \\ n-m \rightarrow \infty}} \frac{n}{m} = k$ . Cioè vale la relazione:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\substack{n > m \\ n-m \rightarrow \infty}} \text{prob} \left\{ a < \left( \frac{\beta}{n} - \frac{\alpha}{m} \right) / \sqrt{p_A(1-p_A) \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right)} < b \right\} = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt; \\ \lim_{\substack{n > m \\ n-m \rightarrow \infty}} \frac{n}{m} = k \end{array} \right.$$

dove  $p_A$  è la probabilità che in una prova si verifichi l'evento favorevole. Analogamente si dimostra che la differenza fra le medie

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \text{ e } \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m x_j,$$

calcolate sugli eventi delle prove delle due serie di cui sopra, nell'ipotesi che la variabile  $X$  su cui si fanno le prove sia una variabile scarto ( $M(X) = 0$ ) uniformemente limitata ( $|X| \leq L$ ), segue la legge della convergenza centrale con la sola condizione sufficiente

$$\lim_{\substack{n > m \\ n-m \rightarrow \infty}} \frac{n}{m} = k. \text{ Risulta cioè}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\substack{n > m \\ n-m \rightarrow \infty}} \text{prob} \left\{ a \leq \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m x_j \right) / \sigma_x \sqrt{\frac{1}{m} - \frac{1}{n}} \leq b \right\} = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt; \\ \lim_{\substack{n > m \\ n-m \rightarrow \infty}} \frac{n}{m} = k \end{array} \right.$$

*T. Salvemini.*

**Chernoff, H. and H. Teicher:** A central limit theorem for sums of interchangeable random variables. Ann. math. Statistics 29, 118—130 (1958).

„A collection of random variables is defined to be interchangeable if every finite subcollection has a joint distribution which is a symmetric function of its arguments” (from the authors' summary). The authors consider double sequences of random variables  $X_{nk}$  ( $k = 1, \dots, k_n$ ;  $n = 1, 2, \dots$ ) in which each row (for each  $n$ ) is an interchangeable collection. The sums of the rows are assumed to be non-random constants and the variances of the random variables are assumed to be finite. The one theorem gives conditions sufficient for partial sums of the rows to have a normal limit distribution. There are four corollaries which are applied to quantiles and ranks, in the last section. The paper contains a good discussion of the results, mentioning corresponding theorems for independent random variables and showing the relations between the conditions by examples.

*L. Cote.*

**Obretenov, Apostol:** Eine Bemerkung über das starke Gesetz der großen Zahlen. *Math. Nachr.* **17**, 151—155 (1959).

Verf. gibt kurze Beweise für die folgenden drei Sätze: 1. Für ein  $q$  mit  $0 \leq q < 1$  sei  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-q} E|X_n|^{1+q} < \infty$ , dann gilt das starke Gesetz der großen Zahlen.

2. Für ein  $q$  mit  $0 < q < 1$  sei  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-q} E|X_n|^q < \infty$ ; dann folgt

$$P\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(X_k - \int_{-k}^{+k} x dF_k\right) \rightarrow 0\right) = 1.$$

3. Für ein  $s$  mit  $0 \leq s < 1$  sei  $\sum_{k=1}^n \text{Var}(X_k) = O(n^{1+s})$ ; dann gilt das starke Gesetz der großen Zahlen. Satz 1 findet sich auch bei Loève, *Probability theory* (dies. Zbl. **66**, 109), Satz 2 und 3 sind neu. *W. Vogel.*

**Geffroy, Jean:** Étude de la stabilité presque certaine des valeurs extrêmes d'un échantillon et de la convergence presque certaine de son milieu. *C. r. Acad. Sci., Paris* **246**, 1154—1156 (1958).

L'objet de cette note est de montrer qu'il existe une famille de lois de probabilité pour laquelle les plus grandes valeurs d'un échantillon sont stables presque certainement. La loi de Laplace-Gauss est de ce type. (Résumé d'A.). *W. Richter.*

**Beyer, Otfried:** Über zwei Anwendungen des Satzes von Ljapunoff der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Wiss. Z. Hochschule Schwermaschinenbau Magdeburg* **2**, 7—9 (1958).

The importance of the central limit theorem in quality control and in machine running time problems is discussed. The discussion is fragmentary and inaccurate and, consequently, leaves many points unclear. *J. J. Bezem.*

**Olkin, Ingram and John W. Pratt:** A multivariate Tchebycheff inequality. *Ann. math. Statistics* **29**, 226—234 (1958).

Eine mehrdimensionale Tschebyscheffsche Ungleichung wird hergeleitet mit Hilfe der (nichtsingulären) Kovarianzmatrix des betrachteten Zufallsvektors. Die angegebene Schranke hängt ab von der Lösung einer gewissen Matrizengleichung. Es wird gezeigt, daß die Ungleichung nicht verschärft werden kann.

*H.-J. Roßberg.*

**Whittle, P.:** A multivariate generalization of Tchebichev's inequality. *Quart. J. Math., Oxford II. Ser.* **9**, 232—240 (1958).

Dieselbe Problemstellung wie bei Olkin-Pratt (s. vorstehendes Referat). Die bestmögliche Schranke wird hier aus einer anderen Matrizengleichung bestimmt.

*H.-J. Roßberg.*

**Kabe, D. G.:** Some applications of Meijer-G functions to distribution problems in statistics. *Biometrika* **45**, 578—580 (1958).

Verf. gibt zwei Beispiele, in denen sich die Verteilungsdichten gewisser Statistiken durch Meijer-G-Funktionen ausdrücken und auf Grund der analytischen Formeln dieser Funktionen explizit darstellen lassen. Seine Resultate wurden auf anderem Wege von U. S. Nair (dies. Zbl. **20**, 148) bzw. M. A. Girshick (dies. Zbl. **23**, 245) gefunden.

*H.-J. Roßberg.*

**Vorob'ev (Vorobiev), N. N.:** Reduced strategies for games in the generalized form. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **115**, 855—857 (1957) [Russisch].

Kuhn (dies. Zbl. **50**, 143) hat bewiesen, daß in Spielen mit vollständigem Gedächtnis (perfect recall) statt der gewöhnlichen gemischten Strategien Verhaltensstrategien (behaviour strategies) benutzt werden können. Verf. betrachtet den allgemeineren Fall, daß zwar kein vollständiges Gedächtnis mehr vorzuliegen braucht, daß aber immer für zwei Informationsbezirke  $U, V$  des gleichen Spielers,



zu denen eine Partie existiert, die erst  $U$  und dann  $V$  trifft, der Informationsbezirk  $V$  „ganz hinter“  $U$  liegt. Für diesen Fall wird (ohne Beweis) ein Satz angekündigt, der die Äquivalenz der gemischten Strategien mit gewissen „reduzierten Strategien“ behauptet. Das Verständnis der Einzelheiten der Note wird durch das Fehlen des Beweises und anscheinend einige Druckfehler im Text erschwert. *E. Burger.*

**Hanner, Olof:** Mean play of sums of positional games. *Pacific J. Math.* 9, 81—99 (1959).

Milnor (this Zbl. 50, 144) defined sums of positional games and studied their optimal strategies. In this paper, the author considers strategies which are not, in general, optimal, but are such that the difference between the pay-off for these, and for optimal ones, is bounded for all  $n$ , when the sum is taken over  $n$  copies of the same game. *S. Vajda.*

**Heuer, Gerald A.:** Estimation in a certain probability problem. *Amer. math. Monthly* 66, 704—706 (1959).

### **Statistik:**

**Darwin, J. H.:** On correction to the chi-squared distribution. *J. roy. statist. Soc., Ser. B* 20, 387—392 (1958).

Quando si forma un campione di  $K$  classi, mediante estrazione a sorte, da una popolazione multinormale è noto che per provare la bontà dell'adattamento del campione alla funzione teorica si usa calcolare il  $\chi^2$  del Pearson. Se la dimensione  $N$  del campione è finita, la distribuzione di  $\chi^2$  dovrebbe essere discreta. L'A. discute le correzioni da apportare alla nota distribuzione del  $\chi^2$  valida per grandi campioni. Egli si serve del metodo della funzione caratteristica e perviene ad un'espressione piuttosto complicata della correzione. Se le classi del campione sono soltanto due, detta espressione si semplifica notevolmente. L'A. calcola infine i valori numerici della correzione nel caso di campioni con  $N = 10$  e  $p_1 = 2/7$ . *T. Salvemini.*

**Banerjee, D. P.:** On the exact distribution of a test in multivariate analysis. *J. roy. statist. Soc., Ser. B* 20, 108—110 (1958).

Unter Benutzung der Mellin-Transformation wird die exakte Verteilung der von Kendall eingeführten  $L$ -Statistik (siehe M. G. Kendall and Alan Stuart, *The advanced theory of statistics*, V. I, London 1958) abgeleitet. *W. Richter.*

**Gnedenko, B. V.:** On the Wilcoxon test of comparing of two samples. *Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. math. astron. phys.* 6, 611—613, engl. Zusammenfassung 614 (1958) [Russisch].

Verf. führt folgende Definition ein: Ein statistischer Test heiße konsistent, wenn er zwei verschiedene Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit einer Wahrscheinlichkeit unterscheidet, die mit wachsender Anzahl der Beobachtungen gegen Eins strebt. Man müßte eigentlich erwarten, daß jeder „vernünftig“ eingerichtete Test diese Eigenschaft besitzt. Für den Test von Kolmogorov-Smirnov ist dies auch der Fall. Durch ein Beispiel wird gezeigt, daß der Wilcoxonsche Test [*Biometrics Bull.* 1, 80—83 (1945)] im obigen Sinne nicht konsistent ist. *W. Richter.*

**Kemp, K. W.:** Formulae for calculating the operating characteristic and the average sample number of some sequential tests. *J. roy. statist. Soc., Ser. B* 20, 379—386 (1958).

Für die angenäherte Berechnung der Operations-Charakteristik und des durchschnittlichen Stichprobenumfangs bei Waldschen Folgetest-Plänen gab Page (dies. Zbl. 58, 354) eine von der ursprünglichen Waldschen Idee abweichende Methode. Diese Methode wird hier variiert. Die Rechnung ist für den Fall der Normal-Verteilung durchgeführt, und die Ergebnisse werden mit den älteren Werten aus der Literatur verglichen. *W. Vogel.*

**Bejar, Juan:** Versuchsplanung. *Trabajos Estadíst.* 8, 91—108 (1957) [Spanisch].

Expository paper about the Design of Experiments, with the following headings: completely random designs, random blocks, Latin Squares, factorial experiments, experiments with two factors and combined observations. *S. Vajda.*

**Stange, K.: Probenahme vom Band.** *Metrika* 1, 177—222 (1958).

Verf. beschäftigt sich mit solchen kontinuierlichen Erzeugungsvorgängen, wo die Erzeugnisse mit Band weggeführt werden, und wo zwischen den Meßwerten nahe liegender Proben eine positive Korrelation besteht. — Es werden die Streuung der Mittelwerte  $\bar{a}$  der ganzen Menge  $G$  (aufgeteilt in  $N$  Teile), sowie die Streuung der Mittelwerte  $\bar{x}$  von  $n$  Teilen (wobei  $n \ll N$ ) untersucht, und zwar letztere für gewöhnliche Zufallsproben, für geschichtete Zufallsproben sowie für systematische Proben. Die Wirksamkeit dieser drei Typen wird verglichen. Es werden einige Fragen der Korrelationsfunktion behandelt, sowie Beispiele gegeben. *E. Vas.*

**Guénot, Robert:** Sur une nouvelle définition des interactions dans l'expérimentation à plusieurs facteurs. *C. r. Acad. Sci., Paris* 244, 2686—2688 (1957).

A distinction is made between mean interaction, identical with the notion playing a role in the usual analysis of variance, and interaction in a strict sense, defined by a vector taking into account all different levels of the factors not involved in the interaction. The following theorem is proved: an interaction in the strict sense is zero, if and only if the corresponding mean interaction as well as all mean interactions of higher order involving the same factors are zero. *J. J. Bezem.*

**Lev, Joseph and Elaine F. Kinder:** New analysis of variance formulas for treating data from mutually paired subjects. *Psychometrika* 22, 1—15 (1957).

An analysis of variance is given for a special type of  $p^2$  factorial experiments with replications. The experimental design is characterized by the fact that in each  $p \times p$ -table representing a single replication all diagonal observations are lacking. A situation of this kind arises for instance, when some relation between a number  $p$  of individuals is studied and they are arranged in pairs in all possible ways. Two models are considered. In the first, all main effects and interactions are treated as constants, while in the second model they are considered as random variables, with the exception of the replication effect. All formulas necessary to carry out the analysis and, using the second model, to compute reliability measures, are given in full, while their derivation is outlined in an appendix. *J. J. Bezem.*

**Sukhatme, Balkrishna V.: Testing the hypothesis that two populations differ only in location.** *Ann. math. Statistics* 29, 60—78 (1958).

Let  $X_1, \dots, X_m$  and  $Y_1, \dots, Y_n$  be two independent samples drawn from populations with absolutely continuous distributions functions  $F(x - \xi)$  and  $G(x - \eta)$  respectively. The generalized  $U$ -statistic modified by centering the observations at the estimates of the location parameters for the two sample problem is

$$\hat{U} = \binom{m}{s_1}^{-1} \binom{n}{s_2}^{-1} \sum \varphi(X_{\alpha_1} - \hat{\xi}, \dots, X_{\alpha_{s_1}} - \hat{\xi}, Y_{\beta_1} - \hat{\eta}, \dots, Y_{\beta_{s_2}} - \hat{\eta})$$

where  $\varphi(u_1, \dots, u_{s_1}, v_1, \dots, v_{s_2})$  is a function symmetric in  $u$  and  $v$  and the summation runs over all subscripts  $\alpha, \beta$  satisfying  $1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_{s_1} \leq m$ ,  $1 \leq \beta_1 < \dots < \beta_{s_2} \leq n$ , and  $\hat{\xi}, \hat{\eta}$  are estimates of the location parameters  $\xi, \eta$ , respectively. The author gives a set of necessary and sufficient conditions under which the modified  $U$ -statistics  $\hat{U}$  have the same asymptotic normal distribution as the original  $U$ -statistics (centered at the true values of the location parameters). The results are then extended to functions of several generalized  $U$ -statistics. The asymptotic theory developed is then applied to the problem of testing the hypothesis that the populations  $F$  and  $G$  differ only in location, in the following sense: assumed  $G(x - \eta) = F[(x - \eta)/\delta]$ , it is required to test the hypothesis  $\delta = 1$  against  $\delta \neq 1$ . The author shows that the nonparametric test proposed by him earlier for

a related problem (viz. that of testing  $\delta = 1$  against  $\delta \neq 1$  when the location parameters are known) is — after modification by centering the observations at  $\hat{\xi}, \hat{\eta}$  — asymptotically distribution-free for populations with bounded and symmetric densities. *J. Machek.*

**Walsh, John E.:** Efficient small sample nonparametric median tests with bounded significance levels. *Ann. Inst. statist. Math.* 9, 185—199 (1958).

Verf. (dies. Zbl. 33, 76, zweites Referat) hat Tests für die Hypothese entwickelt, daß  $n$  stetige und symmetrische Verteilungen alle denselben Median  $\Phi$  besitzen. Sind  $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$  die nach der Größe geordneten Werte der Stichprobe, so besitzen die Tests von Walsh eine kritische Region der Gestalt

$$\text{Min } [\tfrac{1}{2}(x^{(1)} + x^{(1+i)}), x^{(2)}] > \Phi_0 \text{ oder } \tfrac{1}{2}(x^{(1)} + x^{(1+i)}) > \Phi_0$$

$$\text{bzw. Max } [\tfrac{1}{2}(x^{(n)} + x^{(n-i)}), x^{(n-1)}] < \Phi_0 \text{ oder } \tfrac{1}{2}(x^{(n)} + x^{(n-i)}) < \Phi_0.$$

Die zugehörigen Irrtumswahrscheinlichkeiten sind unter den o. a. Voraussetzungen von der speziellen Form der Verteilung unabhängig. (Die Verteilung kann übrigens auch für jede Variable anders sein.) Fällt die Voraussetzung der Symmetrie der Verteilung weg, so hängt die Irrtumswahrscheinlichkeit von der Verteilung ab. In der vorliegenden Arbeit gibt Verf. nun für die Stichprobenumfänge 5(1)12 und verschiedene Werte von  $i$  Grenzen an, innerhalb derer die Irrtumswahrscheinlichkeit — je nach der Form der Verteilung — variieren kann. Neben diesen absoluten Grenzen gibt Verf. auch Grenzen für die Irrtumswahrscheinlichkeit für verschiedene Werte eines — ad hoc konstruierten — Schiefemaßes. Seine Ausführungen beziehen sich sowohl auf ein- als auch auf zweiseitige Tests. *J. Pfanzagl.*

**Girshick, M. A.:** An extension of the optimum property of the sequential probability ratio test. *Ann. math. Statistics* 29, 288—290 (1958).

T. W. Anderson presents this result, mentioned by Girshick before his death. Let the operating characteristic of a sequential procedure  $T$  be  $L(\vartheta, T) = P\{\text{Accepting } H_0 | \vartheta, T\}$  where  $\vartheta$  is the parameter which indexes the relevant distributions. And let  $E_\vartheta(n|T)$  be the expected number of observations for the procedure  $T$ . The result described in the title is: Let  $T^*$  be the sequential probability ratio test and  $T$  be any test such that  $L(\vartheta, T) \geq L(\vartheta, T^*)$  for all  $\vartheta < \bar{\vartheta}$  and  $L(\vartheta, T) \leq L(\vartheta, T^*)$  for all  $\vartheta > \bar{\vartheta}$ . Then  $E_\vartheta(n|T) \geq E_\vartheta(n|T^*)$  for all  $\vartheta$ . The assumptions on the distributions are more suited for use in the proof than for verification, but they have been discussed rather completely in articles cited in the references. *L. Cote.*

**Lindley, D. V.:** Fiducial distributions and Bayes' theorem. *J. roy. statist. Soc., Ser. B* 20, 102—107 (1958).

Two results are established: (i) The necessary and sufficient condition for the fiducial distribution of  $\theta$ , given  $x$ , to be a Bayes' distribution is that there exist transformations of  $x$  to  $u$ , and of  $\theta$  to  $\tau$ , such that  $\tau$  is a location parameter for  $u$ . (condition (A)). This extends some results of Grundy's (this Zbl. 73, 149). (ii) If, for a random sample of any size from the distribution for  $x$ , there exists a single sufficient statistic for  $\theta$  then the fiducial argument is inconsistent unless condition (A) obtains: and when it does, the fiducial argument is equivalent to a Bayesian argument with uniform prior distribution for  $\tau$  (from the A.'s summary).

*W. Richter.*

**Taga, Yasushi and Tatsuzo Suzuki:** On the estimation of average length of chains in the communication-pattern. *Ann. Inst. statist. Math.* 9, 149—156 (1958).

A group of  $N$  elements is considered. The elements may be imagined as distinct points on a plane. From some of the elements there exist connections to some other ones, imaginable on the graph as directed line segments, joining corresponding points. The starting point of a connection is the element from which a connection starts



but which is reached by none. Similarly the terminal point of a connection is the element to which a connection leads, but from which none starts. A chain of length  $l$  is a line, connecting a starting point with a terminal point and passing through  $l - 1$  points (i. e., composed of  $l$  connections,  $l$  segments). A method of counting chains is defined in the paper and the problems of estimating the total number of chains of given length  $l$  and of estimating the average length of chains on the basis of a sample of  $n$  elements randomly chosen from the group are solved. *J. Machek.*

**Connor, W. S.:** The uniqueness of the triangular association scheme. *Ann. math. Statistics* 29, 262—266 (1958).

If a partially balanced incomplete block design with two associate classes and  $\binom{n}{2}$  treatments is triangular (for definitions see this Zbl. 48, 116), then (a) the number of first associates of any treatment is  $2n - 4$ , (b) if  $\theta_1$  and  $\theta_2$  are first associates, then the number of treatments which are first associates of both  $\theta_1$  and  $\theta_2$  is  $n - 2$ , and (c) if  $\theta_1$  and  $\theta_2$  are second associates, then the number of treatments which are first associates of both  $\theta_1$  and  $\theta_2$  is 4. The author proves that (a), (b) and (c) are also sufficient for a partially balanced incomplete block design with two associate classes to be triangular when  $n \geq 9$ , and he conjectures that this is also true for  $n < 9$ .

*S. Vajda.*

**Mitra, Sujit Kumar:** Tables for tolerance limits for a normal population based on sample mean and range or mean range. *J. Amer. statist. Assoc.* 52, 88—94 (1957).

Tolerance intervals, covering a fixed portion  $p$  of a normal population with a given confidence  $\beta$ , may be of the form  $\bar{x} \pm k r$ , where  $\bar{x}$  is a sample mean and  $r$  a sample range or the mean range of a number of sub-samples of equal size. Tables are presented giving values of the tolerance factor  $k$  for different values of  $p$  and  $\beta$ , and for different sizes of sample and sub-samples. If the sample size is small, the expected length of the tolerance interval is only slightly increased by the use of the range instead of the standard deviation, and the former has to be preferred on account of its computational simplicity.

*J. J. Bezem.*

**Sarhan, A. E. and B. G. Greenberg:** Tables for best linear estimates by order statistics of the parameters of single exponential distributions from singly and doubly censored samples. *J. Amer. statist. Assoc.* 52, 58—87 (1957).

A sample is called censored or truncated if measurements on some of the sample elements are lacking because they fall outside certain limits. Censoring is said to be of type I if these limits are fixed; it is of type II if the numbers of observations to be omitted are fixed. The present paper deals with censored samples of type II and of sizes  $\leq 10$ , drawn from the exponential distributions given by  $f(y) = \sigma^{-1} e^{-y/\sigma}$  ( $y \geq 0$ ) and  $f(y) = \sigma^{-1} e^{-(y-\mu)/\sigma}$  ( $y \geq \mu$ ) respectively. Tables are provided to facilitate the calculation of estimates of the parameters of these distributions by means of linear functions of the observations arranged in ascending order. Other tables show the variance of these estimates, expressed in terms of the variance of the parent distribution, and their relative efficiency in comparison with estimates based on uncensored samples.

*J. J. Bezem.*

**Howell, John R.:** An iterative method for fitting the logistic curve. *Commun. Assoc. comput. Machin.* 2, Nr. 3, 5—6 (1959).

In seeking to make a least squares fit of data  $(x_i, y_i)$  with the equation  $y = p(x, \alpha, \beta)$ , the author linearizes the equation by expanding  $p$  in a double Taylor series to first order in the increments  $\Delta\alpha, \Delta\beta$ . He then estimates  $\Delta\alpha, \Delta\beta$  by making a least squares fit with the linearized equation and uses these to correct the values of  $\alpha, \beta$  as one step in an iteration process. This iterative process leads to the least squares estimate of  $\alpha, \beta$ , when it converges. Difficulties in convergence are to be avoided by using  $\theta\Delta\alpha, \theta\Delta\beta$  as corrections, with  $\theta$  to be empirically chosen from  $0 < \theta \leq 1$ . The process has been programmed for the IBM 650 in the case where

$p$  is the so-called Logistic Function. An example with three data points is given, including a numerical comparison of the results of various steps of the above process with a maximum likelihood estimate.

*P. Braunfeld.*

**Zoróa Terol, Procopio:** Über Probleme des kürzesten Gesamtweges im Bauwesen. *Revista Acad. Ci. Madrid* 52, 323—342, engl. Zusammenfassg. 342 (1958) [Spanisch].

The defining property of the median is used to solve problems which arise in architecture, such as for instance the following: all flats on the same floor of a house have doors that open onto a landing, from which there is a single exit. The numbers of inhabitants leaving the house within a given time is known, and it is required to locate the exit so that the total path traversed by all those who leave the house is minimized.

*S. Vajda.*

**Cerevadze, B. N., G. B. Čikoidze und T. G. Gačėčiladze:** Anwendung der mathematischen Theorie der Wortbildung auf die grusinische Sprache. *Soobščeniĭa Akad. Nauk Gruzinskoi SSR* 22, 705—710 (1959) [Russisch].

### **Biomathematik. Versicherungsmathematik. Wirtschaftsmathematik:**

• **Daus, Paul H. and William M. Whyburn:** Introduction to mathematical analysis. With applications to problems of economics. (Addison-Wesley Mathematics Series.) Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1958. VIII, 244 p. \$ 6,50.

This elementary textbook covers some topics from the first year mathematical curriculum of American universities (some of these topics are covered in European secondary schools). It is intended for a half-year course, to be taken in conjunction with a course in economics; as a result, the "applications to economics", mentioned in the title, mainly refer to the use of the vocabulary of economics, instead of the usual vocabulary of physics. The chapter headings are the following: 1. Applications of graphical analysis; 2. Introduction to differential calculus; 3. Applications of differential calculus; 4. Introduction to integration; 5. Introduction to partial differentiation; 6. Maxima and minima problems; 7. Introduction to curve fitting. (It is strange that this last chapter covers regression theory, without any mention of frequency or statistics.)

*B. Mandelbrot.*

**Kimura, Hitosi:** A remark on price analysis in Leontief's open input-output model. *Ann. Inst. statist. Math.* 9, 201—213 (1958).

Ausgehend vom input-output Markt-Modell von Leontief wird die Zweckmäßigkeit der quantitativen Bemessung der Produktion in Geldeinheiten statt in den ihr zukommenden physischen Einheiten hervorgehoben, weil — gestützt auf die Basis-Preise — sich die Möglichkeit einer einheitlichen und addierbaren Bewertung verschiedenartiger Erzeugnisse ergibt. Die auf dem Geldwert fundierten Preisgleichungen führen — gestützt auf den Matrizenkalkül — zu einem in mathematischer Hinsicht leicht zu bewältigenden Formelsystem. Es wird gezeigt, wie der Einfluß von Lohnsteigerungen und Veränderungen im Unternehmergewinn auf die Preise formelmäßig erfaßt werden kann. — Ein besonderer Vorteil des gewählten Darstellungsmodus zeigt sich beim Studium der Auswirkung einer Preisänderung in einer einzelnen Unternehmung auf das allgemeine Preisniveau der übrigen Produktions-Industrie. Das Abhängigkeitsverhältnis läßt sich nach dem Vorgehen des Verf. mit mathematisch einfachen Formeln zum Ausdruck bringen und ohne Schwierigkeiten auf allgemeine Fälle erweitern. Hinsichtlich der adäquaten Erfassung der realen Verhältnisse fragt es sich jedoch, ob und inwieweit die abgeleiteten Relationen zu befriedigen vermögen. Bedenken erweckt insbesondere die Tatsache, daß die retardierende Wirkung, wie sie bei solchen Erscheinungen zutage tritt, unberücksichtigt bleibt.

*P. Nolfi.*

Sargan, J. D.: The instability of the Leontief dynamic model. *Econometrica* 26, 381—392 (1958).

Verf. betrachtet Dynamisierungen des bekannten Leontief-Modells, in welchen nicht mehr dauernd Angebot und Nachfrage einander gleich sind, sondern verschiedene einfache Annahmen über das Verhalten bei Angebotsüber- oder -unterschluß gemacht werden. Es wird ein Grenzübergang ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) diskutiert, der zu der Annahme dauernder Gleichheit von Angebot und Nachfrage ( $\varepsilon = 0$ ) zurückführt, und an mehreren Beispielen und durch einige allgemeine Betrachtungen gezeigt, daß dabei nicht-abklingende zusätzliche Lösungen auftreten können, die im Falle  $\varepsilon = 0$  nicht vorhanden sind. In diesem Sinne ist das Leontief-System unstabil.

*E. Burger.*

Suzuki, Yukio: On scheduling of overtime work. *Ann. Inst. statist. Math.* 9, 37—42 (1957).

A method is given to obtain optimal overtime schedules if incoming orders at fixed times vary in size according to a given distribution function. The problem is very much specialized, and the solution, accordingly, offers no general interest.

*J. J. Bezem.*

Lydall, H. F.: The distribution of employment incomes. *Econometrica* 27, 110—115 (1959).

Summers, Robert: A note on least squares bias in household expenditure analysis. *Econometrica* 27, 121—126 (1959).

Eijk, C. J. van and J. Sandee: Quantitative determination of an optimum economic policy. *Econometrica* 27, 1—14 (1959).

Künzi, H. P.: Die Simplexmethode zur Bestimmung einer Ausgangslösung bei bestimmten linearen Programmen. *Unternehmensforsch.* 2, 60—69 (1958).

The author's method for finding a first feasible solution to a Linear Programming problem consists in choosing the slack variables to be basic, taking the expression of any of those which are negative as objective function, and increasing it until a positive value is reached. If any other variable is also negative, this fact is ignored at this stage. It is suggested that it is convenient to consider only rows of non-negative variables when searching for a possible pivot. (The author does not investigate the case when those rows do not contain a positive value in the chosen column, or when no positive valued variables exist at this stage.) Applying this method to all variables with negative values, eventually a feasible solution of all constraints is obtained.

*S. Vajda.*

Gomory, Ralph E.: Outline of an algorithm for integer solutions to linear programs. *Bull. Amer. math. Soc.* 64, 275—278 (1958).

Verf. gibt einen Algorithmus an, der die Gewinnung optimaler ganzzahliger Lösungen linearer Programmierprobleme in endlich vielen Schritten erlaubt, sofern Lösungen existieren. Die Idee ist ähnlich wie bei bereits bekannten Verfahren: Zunächst wird mit der Simplex-Methode die Objekt-Funktion maximiert. Ist die Lösung nicht ganzzahlig, dann wird eine zusätzliche Nebenbedingung mit einer Zusatzvariablen konstruiert, der die noch unbekannte ganzzahlige Lösung genügt, die bekannte unganzzahlige jedoch nicht. Bezogen auf das erweiterte Problem ist die alte Lösung also unbrauchbar, und man hat ein neues Maximum zu ermitteln. Der Prozeß der Addition zusätzlicher Nebenbedingungen und Variablen wird fortgesetzt bis zur Gewinnung eines ganzzahligen Maximums, bzw. bis durch zusätzliche Betrachtungen gezeigt werden kann, daß ein naheliegender ganzzahliger Wert optimal ist.

*G. Bertram.*

Chuard, Jules: Sur le rendement des obligations remboursables au pair à échéance fixe. *Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath.* 59, 261—273, deutsche, ital. u. engl. Zusammenfassg. 273 (1959).



Le taux de rendement des obligations remboursables au pair à échéance fixe évalué par une règle empirique est comparé avec le taux de rendement exact déterminé par itération. Une série d'exemples permet de confronter les taux exacts avec les taux approximatifs.

Zusammenfassg.

Wette, R.: Regressions- und Kausalanalyse in der Biologie. *Metrika* 2, 131—137 (1959).

Der Biometriker steht häufig vor der Aufgabe, die Art der Abhängigkeit zwischen verschiedenen Variablen zu untersuchen. Bei Vorliegen von linearer Abhängigkeit  $y = \beta x + \alpha$  ist es seine Aufgabe, die Parameter  $\alpha$  und  $\beta$  zu bestimmen. Ist nur eine der beiden Variablen eine zufällige, so kann nur eine Regressionsgerade bestimmt werden, andernfalls zwei. Verf. gibt einen Überblick über die entsprechende Literatur der letzten Jahrzehnte und weist abschließend auf Probleme hin, die durch Regressions- und Korrelationsanalyse nicht gelöst werden können. — 27 Literaturhinweise.

G. Reißig.

## Geometrie.

### Analytische Geometrie. Projektive Geometrie:

Englefield, M. J.: Oriented flat submanifolds in an affine space. *Canadian J. Math.* 10, 535—546 (1958).

Gegeben seien zwei lineare Unterräume  $E_p$  und  $E_q$  des  $n$ -dimensionalen affinen Raumes. Der Durchschnitt von  $E_p$  und  $E_q$  sei  $E_s$ ; der Verbindungsraum von  $E_p$  und  $E_q$  sei  $E_t$  (die Indizes bezeichnen die Dimensionen). Verf. beweist: 1. ist  $E_s$  weder leer noch uneigentlich und ist  $pq + st$  gerade, dann ist im Verbindungsraum  $E_t$  eine innere Orientierung bestimmt, falls in  $E_p$ ,  $E_q$  und  $E_s$  innere Orientierungen gegeben sind. Falls äußere Orientierungen zu  $E_p$ ,  $E_q$  und  $E_t$  gegeben sind, ist eine äußere Orientierung auch zu  $E_s$  bestimmt. Ist  $pq + st$  ungerade, so gilt dies auch, wenn zusätzlich die Reihenfolge  $E_p, E_q$  festgelegt wird. 2. ist  $E_s$  leer oder uneigentlich, so gelten die entsprechenden Resultate, wenn man  $pq + st$  durch  $pq + st + p + q$  ersetzt.

M. Barner — F. Flohr.

Edge, W. L.: The geometry of an orthogonal group in six variables. *Proc. London math. Soc.*, III. Ser. 8, 416—446 (1958).

In früheren Untersuchungen (dies. Zbl. 55, 144; 64, 143; 66, 142) hat Verf. die Eigenschaften einer Quadrik in einem endlichen Raume mit 2, 3, 4 Dimensionen, wo die homogenen Punktkoordinaten reduziert mod 3 sind, untersucht; insbesondere hat er sich mit orthogonalen Projektivitätsgruppen in solchen Räumen beschäftigt. Hier werden diese Untersuchungen auf endliche Räume mit 5 Dimensionen ausgedehnt. Als mögliche Werte der homogenen Punktkoordinaten kann man 1, —1, 0 wählen; es gibt so im Raume  $\frac{1}{2}(3^6 - 1) = 364$  Punkte, unter diesen gibt es 126 Punkte  $k$ , für welche die Summe der Quadrate der Koordinaten gleich 1 ist, 126 Punkte  $l$ , für welche jene Summe gleich —1 ist, und 112 Punkte, die der Gleichung  $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + v^2 + w^2 = 0$  genügen. Diese letzten bilden eine Quadrik  $Q$ , den Kern der vorliegenden Untersuchung. Es gibt  $27 \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 7$  Projektivitäten mit der Determinante 1, die  $Q$  in sich selbst verwandeln und welche die Punktgruppen  $k$  und  $l$  je in sich selbst durch paare Substitutionen verwandeln; sie bilden die im Titel genannte Gruppe  $G^*$ . Dieselbe Gruppe gestattet auch eine schon bekannte Darstellung als Kollineationsgruppe in einem komplexen Raume mit 5 Dimensionen (s. C. M. Hamill, dies. Zbl. 43, 28). Die Eigenschaften von  $Q$  und  $G^*$  werden hier gleichzeitig untersucht. Es gibt 567 aus Punkten  $k$  und 567 aus Punkten  $l$  bestehenden Polarsimplexe von  $Q$ ; die ersten werden von  $G^*$  transitiv transformiert. Dies führt zur Bestimmung der 25515 in  $G^*$  enthaltenen Sylowgruppen der Ordnung 27. Die möglichen Lagen der Geraden, Ebenen usw. von  $S_5$  in bezug auf  $Q$  werden diskutiert. Auch die in  $G^*$  enthaltenen Sylowgruppen der Ordnung  $3^6$  werden bestimmt. Es gibt 5184 Heptaeder, die der Quadrik  $Q$  umge-

schrieben sind, die sich in 2 verschiedene Scharen von je 2592 Heptaedern verteilen und zahlreiche bemerkenswerte Eigenschaften besitzen; z. B. sind sie mit den Operationen von  $G^*$  mit der Periode 7 eng verbunden. Es gibt im  $S_5$  540 Nullsysteme, die die Punkte von  $Q$  in die Tangentialhyperebenen von  $Q$  selbst verwandeln; sie werden von  $G^*$  transitiv transformiert usw. *E. Togliatti.*

Edge, W. L.: The partitioning of an orthogonal group in six variables. Proc. roy. Soc. London, Ser. A 247, 539—549 (1958).

Diese Abhandlung ist mit zwei anderen desselben Verf. (dies. Zbl. 66, 142 und vorstehendes Referat) eng verbunden. Es handelt sich um die projektive orthogonale Gruppe  $G$  in 6 homogenen Veränderlichen im Galois-Feld der Zahlen 0, 1,  $-1$ ; die Gruppe hat die Ordnung  $2^8 \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 7$  und enthält eine Untergruppe  $G^*$  vom Index 2, die Verf. in der zweiten der oben zitierten Arbeiten studiert hat. Hier gibt er zunächst eine Klassifikation aller Operationen von  $G^*$  in einer Tafel, wo für jede Operation die Art und Anzahl der zusammensetzenden Zyklen angegeben sind; es wird auch angezeigt, wie viele Operationen auf dieselbe Weise zusammengesetzt sind. In einer zweiten ähnlichen Tafel werden die Operationen der Nebengruppe von  $G^*$  in  $G$  in ähnlicher Weise klassifiziert. Die Untersuchung benutzt grundsätzlich die Quadrik  $Q$  des entsprechenden endlichen Raumes  $S_5$ , die von den Projektivitäten von  $G^*$  in sich verwandelt wird, und die Fixpunkträume dieser Projektivitäten. *E. Togliatti.*

Mandan, Sahib Ram: An  $S$ -configuration in Euclidean and elliptic  $n$ -space. Canadian J. Math. 10, 489—501 (1958).

In einem vierdimensionalen Raume ist ein Simplex  $ABCDE$  gegeben, dessen 10 Kanten mit einer Hyperebene in den Punkten  $Q_{AB}, Q_{AC}, \dots$  geschnitten werden; wenn  $P_{AB}, P_{AC}, \dots$  mit  $Q_{AB}, Q_{AC}, \dots$  die Punktpaare  $AB, AC, \dots$  harmonisch trennen, so erhält man die hier betrachtete  $S$ -Konfiguration. Sie besteht aus 10 Punktpaaren  $PQ$  und ist offenbar eine Verallgemeinerung der aus den 6 Spitzen eines ebenen Vierseits bestehenden Konfiguration. In einem Raume  $S_3$  hat man die mit einem Tetraeder verbundene und aus 12 Punkten bestehenden desmische Konfiguration. Die so definierte  $S$ -Konfiguration wird hier untersucht; es gibt: 40 Geraden, die je 3 Punkte der Konfiguration enthalten; 40 Ebenen, die je 6 Punkte und 4 Geraden der Konfiguration enthalten; 16 Hyperebenen, die je 10 Punkte, 10 Geraden und 5 Ebenen enthalten. Die duale Konfiguration besteht aus den 16 Punkten mit den Koordinaten  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1, 1)$ . Die beiden dualen Konfigurationen sind miteinander polar in bezug auf ein Simplex. Bemerkenswert ist der Fall, daß eine Fläche des Simplexes die unendlichferne Hyperebene ist, während die anderen paarweise orthogonal sind. Die Mittelpunkte der 10 Strecken  $PQ$  liegen auf einer Hyperebene. Die Ähnlichkeitspunkte von 5 Hyperkugeln bilden eine  $S$ -Konfiguration. Eine  $S$ -Konfiguration des elliptischen  $n$ -dimensionalen Raumes kann aus der Abbildung eines solchen Raumes auf die Gegenpunktpaare einer Hypersphäre des  $(n+1)$ -dimensionalen Raumes gefolgert werden. Die Ausdehnung auf  $n$  Dimensionen liefert ohne Schwierigkeiten eine Konfiguration von  $\binom{n+1}{2}$  Punktpaaren. *E. Togliatti.*

Horadam, A. F.: A locus in [8] invariant under a group of order  $51840 \times 81$ . Quart. J. Math. Oxford, II. Ser. 8, 241—259 (1957).

Der im Titel genannte Ort  $L$  liegt in einem Raume  $S_8$ , ist algebraisch und hat die Dimension 4 und die Ordnung 45. Die neun homogenen Punktkoordinaten im  $S_8$  seien mit  $x_{00}, x_{10}, x_{20}, x_{01}, x_{11}, x_{21}, x_{02}, x_{12}, x_{22}$  bezeichnet.  $L$  ist dann der Schnitt der kubischen Hyperfläche  $\theta = \sum x_{ij}^3 = 0$  mit den anderen vier kubischen Hyperflächen:

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= x_{00}x_{01}x_{02} + x_{10}x_{11}x_{12} + x_{20}x_{21}x_{22} = 0, \Phi_3 = x_{00}x_{11}x_{22} + x_{01}x_{12}x_{20} + x_{02}x_{10}x_{21} = 0, \\ \Phi_2 &= x_{00}x_{10}x_{20} + x_{01}x_{11}x_{21} + x_{02}x_{12}x_{22} = 0, \Phi_4 = x_{00}x_{12}x_{21} + x_{01}x_{10}x_{22} + x_{02}x_{11}x_{20} = 0.\end{aligned}$$

Die 5 Hyperflächen  $\theta$  und  $\Phi_i$  sind voneinander linear unabhängig. Es gibt eine endliche Gruppe von  $51480 \times 81$  Kollineationen des Raumes  $S_8$ , die  $L$  in sich selbst verwandeln. Diese Gruppe kann von den beiden Kollineationen erzeugt werden, deren Matrizen folgende Diagonalform haben:  $(11 \varepsilon^2 11 \varepsilon^2 11 \varepsilon^2)$  und  $(1 \varepsilon \varepsilon 1 \varepsilon \varepsilon 1 \varepsilon \varepsilon)$ , wo  $\varepsilon = \exp \frac{2}{3} \pi i$ . In der Gruppe gibt es insbesondere die 81 Kollineationen (die keine Gruppe bilden) mit den Matrizen  $JW$ , wo  $J$  diejenige Matrix ist, die aus der Einheitsmatrix  $I$  durch die Substitution 132798465 entsteht, und wo  $W$  eine beliebige der 81 möglichen Cliffordschen Matrizen der Ordnung 9 bedeutet. Jede Kollineation  $JW$  ist involutorisch und hat einen  $S_3$  und einen  $S_4$  als Fixpunkträume. Die so definierten 81 Räume  $S_3$  liegen alle auf  $L$ , und die 81 Räume  $S_4$  haben mit  $L$  je 45 Punkte gemein, die im  $S_4$  selbst eine Burkhardtsche Konfiguration bilden. Man erhält hier die bemerkenswerte Konfiguration dieser 81 Räume  $S_3$  und  $S_4$  des  $S_8$ : auf die vielen Eigenschaften der Konfiguration, die vom Verf. untersucht werden, gehen wir hier nicht ein, da dies zu langwierig wäre. (Wir erinnern nur noch an die Definition einer Cliffordschen Matrix  $W_{bb'}^{aa'}$ , wo  $a, a', b, b'$  ganze positive Zahlen reduziert modulo 3 bedeuten. In jeder Zeile und in jeder Spalte von  $W_{bb'}^{aa'}$  gibt es ein einziges von Null verschiedenes Element, das man mit dem Symbol  $\alpha_{ij}^{i'j'}$  bezeichnen kann, wenn man die Zeilen mit  $i, j$  und die Spalten mit  $i', j'$ , reduziert modulo 3, bezeichnet. Die nicht verschwindenden Elemente von  $W_{bb'}^{aa'}$  werden dann durch die Formel  $\alpha_{c+b, c'+b'}^{cc'} = \varepsilon^{a+c+a'c'}$  gegeben.) *E. Togliatti.*

**Kárteszi, Ferenc:** On projective mapping of quadrics to each other. *Mat. Lapok* 9, 260—272 (1959) [Ungarisch].

Synthetische Betrachtungen über die kollineare Abbildung zweier Quadriken aufeinander, wobei die Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte gemeinsame Tangenten beider Flächen sein sollen. Bei einer solchen Abbildung entsprechen einander die Punkte der einen Fläche und die zugeordneten Tangentialebenen der anderen in einem linearen Nullsystem, und die beiden Flächen haben ein windschiefes Erzeugendenvierseit gemein, was auch hinreicht (Bianchi-Nicoletti). Zur Veranschaulichung bedient sich Verf. insbesondere zweier coaxialer Drehparaboloide mit gemeinsamem Scheitel. *W. Wunderlich.*

**Court, Nathan Altshiller:** Sur la cubique gauche, application de la transformation harmonique. *Mathesis* 68, 110—127 (1959).

Verf. definiert die windschiefe Kubik  $C_3$  als Ort des harmonischen Pols einer durch eine feste Gerade gehenden veränderlichen Ebene bezüglich eines gegebenen, der  $C_3$  eingeschriebenen Tetraeders  $T$ . Von den zahlreichen Ergebnissen dieser Betrachtungsweise gibt er einige willkürlich herausgegriffene Beispiele. *M. Zacharias.*

**Lense, Josef:** Bemerkungen zur Erzeugung der kubischen Raumkurven durch drei projektive Ebenenbüschel. *S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München* 1958, 111—115 (1959).

Es ist bekannt, daß die kubische Raumkurve, die von drei projektiven Ebenenbüscheln erzeugt wird, in besonderen Fällen zerfallen kann; die drei projektiven Büschel  $x_1 = \lambda x_2, x_3 = \lambda x_4, x_2 + x_3 = \lambda (x_1 + x_4)$  erzeugen z. B. eine Linie 3. Ordnung, die aus drei Geraden besteht. Verf. diskutiert systematisch, auf analytisch-geometrischem Wege, die möglichen Ausartungen, um eine Behauptung von B. L. van der Waerden zu vervollständigen. *E. Togliatti.*

**Barsotti, Leo:** Über die Symmetrie von Kurven, die durch Polargleichungen gegeben sind. *Anuário Soc. Paranaense Mat., II. Sér.* 1, 28—31 (1958) [Portugiesisch].

**Dragomir, Achim:** Remarques sur les coordonnées projectives. *Lucrările şti. Inst. Ped. Timişoara, Mat.-Fiz.* 1958, 145—147, französ. und russ. Zusammenfassung 147—148 (1959) [Rumänisch].



Verf. beschäftigt sich mit § 3 der „Projektiven Geometrie“ von L. Bieberbach (dies. Zbl. 3, 67), S. 27, und stellt fest, daß in diesem Paragraphen zwei Irrtümer vorkommen.

*M. Zacharias.*

Bors, C.: *Coordonnées tricycliques*. Gaz. Mat. Fiz., Bucureşti, Ser. A 11 (64), 87—92, französ. und russ. Zusammenfassung 92 (1959) [Rumänisch].

### Algebraische Geometrie:

Zariski, Oscar: The problem of minimal models in the theory of algebraic surfaces. Amer. J. Math. 80, 146—184 (1958).

Verf. betrachtet eine Klasse birational äquivalenter nichtsingulärer Flächen über einem Körper  $k$ . Eine Mannigfaltigkeit  $V$  beherrscht (dominates) eine andere  $V'$ , wenn es eine auf  $V$  reguläre birationale Transformation von  $V$  auf  $V'$  gibt.  $V$  ist ein relativ-minimales Modell, wenn  $V$  keine andere Mannigfaltigkeit beherrscht.  $V$  ist ein minimales Modell, wenn es von allen anderen Mannigfaltigkeiten der Klasse beherrscht wird. Castelnuovo und Enriques (Superficie algebriche, dies. Zbl. 36, 371) haben für den klassischen Fall gezeigt, daß jede Klasse entweder ein minimales Modell oder eine Regelfläche enthält; jedoch waren die Beweise noch lückenhaft. Verf. zeigt diesen Satz für allgemeine Grundkörper mit algebraischen Methoden. Eine Kurve  $E$  auf einer Fläche  $F$  heißt eine Ausnahmekurve, wenn sie das totale Urbild eines Punktes bei einer Transformation  $T$  von  $F$  auf eine andere Fläche der Klasse ist.  $E$  heißt von 1. Art, wenn dabei  $T$  in jedem ihrer Punkte regulär ist; anderenfalls von 2. Art. Gibt es nun in unserer Klasse ein minimales Modell und ist  $F$  relativ minimal, so liegt auf  $F$  eine irreduzible Ausnahmekurve 2. Art. Verf. kann nun den Satz von Castelnuovo und Enriques verschärfen zu: wenn eine nicht-singuläre Fläche  $F$  eine irreduzible Ausnahmekurve  $E$  2. Art enthält, dann ist  $F$  einer Regelfläche birational äquivalent. Wenn dabei die Schnittzahl  $(E^2)$  von  $E$  mit sich selbst positiv ist, dann ist  $F$  rational. Beim Beweise sind verschiedene Fälle zu unterscheiden je nach dem Wert von  $(E^2)$  und der Schnittzahl  $(K^2)$  eines kanonischen Divisors mit sich selbst. Eng mit diesem Satze zusammen hängt das Kriterium von Castelnuovo für rationale Flächen: eine Fläche ist rational, wenn  $p_a = P_2 = 0$  ist. Verf. beweist es für positive und nicht positive Werte von  $(K^2)$  gesondert und läßt dabei zunächst den Fall  $(K^2) = 1$  beiseite. Dieser Fall erfordert besondere Hilfsmittel und wird in der folgenden Arbeit behandelt. Verf. gibt in der Einleitung einen lebendigen Überblick über die Entwicklung des Problems in den letzten Jahren. Er selbst hat 1956 eine Reihe von Vorlesungen in Tokio Kyoto gehalten. Ein Teil der dort gegebenen Beweise wurde inzwischen von Kodaira überholt. Kodaira hat seine Beweise 1956 in Princeton vorgetragen, aber leider bisher noch nicht der Öffentlichkeit zugänglich gemacht. Für positive Werte von  $(K^2)$  benutzt Kodaira topologische Methoden, während Zariski rein algebraisch vorgeht.

*O.-H. Keller.*

Zariski, Oscar: On Castelnuovo's criterion of rationality  $P_a = P_2 = 0$  of an algebraic surface. Illinois J. Math. 2, 303—315 (1958).

Castelnuovo hat für den Grundkörper der komplexen Zahlen den Satz bewiesen, daß eine Fläche rational ist, wenn  $p_a = P_2 = 0$ . Zariski hat ihn (s. vorstehendes Referat) für algebraisch abgeschlossene Grundkörper beliebiger Charakteristik mit einer Ausnahme bewiesen, nämlich daß  $(K^2) = 1$ , wo  $K$  ein kanonischer Divisor von  $F$  ist. In dieser Arbeit beweist er nun auch noch den Ausnahmefall. Dazu betrachtet er das antikanonische System  $|K_a|$  und zeigt, daß es im Ausnahmefall irreduzibel ist, die Dimension 1 hat und daß jedes Element ein Primzykel ist. Der Hauptteil des Beweises besteht nun in dem Nachweis, daß dann  $F$  eine Ausnahmekurve 1. Art enthält. Er beruht auf der Konstruktion der ganzen algebraischen Familie derjenigen Flächen, für die  $p_a = P_2 = 0$ , und für die jedes Element

des antikanonischen Systems ein Primzykel ist. — Aus dem Satz von Castelnuovo folgert er die folgende Verallgemeinerung des Satzes von Lüroth: Es sei  $k(x, y)$  eine rein transzendente Erweiterung eines algebraisch abgeschlossenen Körpers  $k$  vom Transzendenzgrad 2 und  $\Sigma$  ein Zwischenkörper, ebenfalls vom Transzendenzgrad 2 über  $k$ . Wenn dann  $k(x, y)$  eine separable Erweiterung von  $\Sigma$  ist, so ist  $\Sigma$  eine rein transzendente Erweiterung von  $k$ . Verf. zeigt an einem Beispiel, daß diese letzte Voraussetzung wesentlich ist.

O.-H. Keller.

Gallarati, Dionisio: Sulle varietà di Fano con curve sezioni canoniche. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. 16, 315—327 (1958).

Une variété algébrique d'ordre  $2p-2$ , à  $r$  dimensions appartenant à un espace  $S^{r+2p-2}$  est dite de Fano si ses sections par un  $S^{p-1}$  sont courbes canoniques de genre  $p$ . L'A. dit une telle variété de 1. espèce si toute hypersurface qu'elle contient est multiple de sa section hyperplane, de 2. espèce si la base de ses hypersurfaces est un sous-multiple de ses sections hyperplanes, de 3. espèce dans tous les autres cas. Le fait que les surfaces sections appartiennent à une de ces espèces n'entraîne pas contrairement à une affirmation de Fano que la variété soit de même espèce. Cette étude conduit à montrer que les variétés de Fano de 2. espèce se réduisent à la  $M_{32}^3$  de Véronèse, normale dans  $S_{20}$ , image des quadriques de  $S^5$  et à ses sections hyperplanes; elles sont donc birationnelles. L'A. étudie les variétés dont les sections par un  $S^p$  sont de 1. ou 2. espèce; alors l'existence d'un système  $|G|$  contenu partiellement dans celui  $|W|$  des sections hyperplanes entraîne que  $|kG|$  est contenu totalement dans  $|W|$  sans nécessairement coïncider comme pensait Fano, car  $|G|$  peut avoir des points-base. Sur la variété image de  $|G|$  on peut représenter multiplement selon  $m$  la variété; si l'on admet une surface fondamentale de la correspondance découpée par une forme d'ordre  $q$ , on peut lier les caractères  $\pi$ , genre de la courbe caractéristique de  $|G|$ ,  $n$  ordre de  $|G|$ ,  $q$ ,  $k$  et  $r$  par

$$2(\pi - 1) = n[(r - 2)(1 - k) - (q - 1)].$$

On trouve les cas  $r = 5, n = 1, k = 2, m = 1, q = 0$  et  $r = 4, n = 2, k = 2, m = 1, q = 0$ , donnant la variété de Véronèse, et ses sections, et  $r = 4, n = 1, k = 2, q = 1, m = 1$ , donnant une  $M_{24}^4$  de  $S_{15}$  variété de 3. espèce dont une étude complète est donnée. Quelques autres exemples dont une  $M_{36}^3$  de  $S_{20}$ , représentable par les surfaces du 4. ordre de  $S^3$  passant par une quartique plane, variété de 3. espèce à sections de 2. espèce,  $p = 19$  contradictoirement à des résultats de Fano.

B. d'Orgeval.

Samuel, M. Pierre: Un exemple de variété affine formale. Anuário Soc. Paraense Mat., II. Ser. 1, 4—5 (1958).

Wallace, Andrew H.: Analytic equivalence of algebroid curves. Canadian J. Math. 11, 1—17 (1959).

Deux idéaux  $I$  et  $I'$  de l'anneau des séries formelles  $A = k[[X_1, \dots, X_r]]$  ( $X_1, \dots, X_r$  indéterminées,  $k$  corps algébriquement clos) sont dits équivalents s'il existe un automorphisme  $T$  de  $A$  tel que  $I' = T(I)$ ; on dira que les variétés algebroides associées sont équivalentes. Si on prend une base finie  $(F_i)$  de  $I$  et une base finie  $(F'_i)$  de  $I'$ , on voit que  $I' = T(I)$  entraîne que les  $F'_i$  diffèrent des  $F_i$  seulement par les termes de degrés élevés. On étudie alors ici la réciproque, au moins dans le cas des courbes, le cas  $n = 2$  et  $V$  (variété de  $I$ ) irréductible ayant déjà été résolu par P. Samuel [J. Math. pur. appl., IX. Sér. 35, 1—6 (1956)]. L'A. rappelle le théorème de préparation de Weierstrass, une version du Lemme de Hensel et prouve le résultat suivant: si une courbe est définie par un idéal  $(F) = (F_1, F_2, \dots, F_{n-1})$  et si l'ordre des séries  $F_i - F'_i$  est assez grand, il existe une équivalence analytique appliquant les idéaux premiers isolés de l'idéal  $(F)$  sur les composants de l'idéal  $(F')$ .

J. Guérindon.

**Macdonald, J. G.:** Some enumerative formulae for algebraic curves. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **54**, 399—416 (1958).

Es wird hier folgende Frage der abzählenden Geometrie gelöst: auf einer algebraischen nichtsingulären Kurve  $C$  des Geschlechts  $p$  sind eine oder mehrere einfachen und fixpunktfreien Linearscharen von Punktgruppen gegeben; es sei dann  $A$  eine Gruppe von getrennten Punkten von  $C$ , so daß  $\alpha_0$  Punkte von  $A$  die Multiplizität  $u_0$  für eine Gruppe einer jeden der gegebenen Linearscharen aufweisen,  $\alpha_1$  die Multiplizität  $u_1$  (für dieselben Gruppen), ...,  $\alpha_\lambda$  die Multiplizität  $u_\lambda$ ; man will die Anzahl  $N$  der so beschaffenen Gruppen bestimmen, falls sie eine endliche ist. Für eine einzige Linearschar ist die Aufgabe seit langer Zeit durch eine bekannte Formel von De Jonquières schon gelöst. Hier wird der Fall einer einzigen Linearschar wieder behandelt, mit einer Methode, die dann auf den allgemeinen Fall ausgedehnt werden kann. Es ist nicht möglich, die gefundene Formel hier zu beschreiben. — Im zweiten Teil werden Anwendungen gemacht. Erstens: im Falle einer einzigen Linearschar  $g_n^r$  setzt man voraus, daß sie die Linearschar der Hyperbenechnitte einer algebraischen Kurve  $C$  der Ordnung  $n$  im Raume  $S_r$  ist. Es handelt sich dann darum, die Anzahl der Hyperebenen zu finden, die  $C$  in  $\alpha_i$  Punkten je  $u_i$ -mal schneiden ( $i = 0, 1, \dots, \lambda$ ). Allgemeiner kann man im  $S_r$  einen Unterraum  $S_k$  betrachten, welcher, wie oben,  $C$  in  $\alpha_i$  Punkten je  $u_i$ -mal schneidet; welcher überdies gewissen Schubertschen Bedingungen unterworfen wird (z. B. mit gegebenen Unterräumen je eine Hyperebene gemein zu haben), so daß die Anzahl der Lösungen eine endliche ist; man wird so eben zur Aufgabe des I. Teiles über mehrere Linearscharen zurückgeführt.

*E. Togliatti.*

**Spampinato, Nicolò:** Tre nuove formule per il calcolo del genere di una curva gobba. *Giorn. Mat. Battaglini* **86** (V. Ser. 6), 127—132 (1958).

Bezeichnet man mit  $n, m, r$  Ordnung, Klasse und Rang einer algebraischen Raumkurve, mit  $\beta, v, \alpha$  die Anzahl ihrer Spitzen, Inflexionstangenten und stationären Schmiegungebenen, so kann man das Geschlecht  $p$  der Kurve aus folgenden drei Formeln berechnen:

$$(m + v + \beta) - (n + r) = 4(p - 1); \quad (n + v + \alpha) - (m + r) = 4(p - 1); \\ (\alpha + \beta + 2v) - 2r = 8(p - 1).$$

Die dritte dieser Formeln erhält man als Summe der zwei ersten; und diese sind einfache Folgerungen der bekannten Ausdrücke von  $p$  durch die Charaktere der Kurve.

*E. Togliatti.*

● **Coolidge, Julian Lowell:** A treatise on algebraic plane curves. Unabridged and unaltered republ. of the first ed. New York: Dover Publications, Inc. 1959. XXIV, 513 p. \$ 2,45.

Vgl. die Besprechung der 1. Aufl. im J.-Buch Fortschr. Math. **57** (1931), 820.

**Chisini, Oscar:** Schemi e modelli per le singolarità delle curve algebriche piane. *Conferenze Sem. Mat. Univ. Bari* **23**, 27 p. (1957).

Bericht über eine Konferenz am Mathematischen Seminar der Universität Bari. Verf. stellt in sehr instruktiver Weise die verschiedenen Möglichkeiten dar, verwickelte Singularitäten ebener algebraischer Kurven anschaulich zu machen, wie sie vor allem Enriques und er selbst in den letzten Jahrzehnten entwickelt hat. Er geht dabei von drei Fragestellungen aus: 1. Schnittpvielfachheit zweier Kurven in einer Singularität. 2. Anzahl der Bedingungen, die diese Singularität den Kurven aufliegen, die sie besitzen sollen. 3. Was wird aus der Singularität bei Cremona-Transformationen? Er bespricht zunächst den Baum der Nachbarpunkte: Die Nachbarpunkte werden durch getrennt liegende Punkte repräsentiert; zusammengehörige werden durch Strecken verbunden. Weiter betrachtet er die Gruppe der Blättervertauschungen der zugehörigen Riemannschen Fläche. Diese wieder veranschaulicht er durch ein System von Epizyklen: Er geht dabei aus von der Puiseux-



schen Reihenentwicklung eines Zweiges, betrachtet die Bewegungen der einzelnen charakteristischen Glieder, wenn  $x$  einen Kreis um die Singularität beschreibt und legt jeweils den Mittelpunkt des Kreises für das spätere Glied in den Bildpunkt des früheren. Er führt alle diese Methoden ausführlich und äußert instruktiv an einigen immer wiederkehrenden Beispielen vor.

O.-H. Keller.

### Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

Hsiao, E. K.: Another proof for two properties of the generators of a ruled surface. Amer. math. Monthly 66, 707—709 (1959).

Nádeník, Zbyněk: Les surfaces analogiques aux courbes de Bertrand. Czechosl. math. J. 5 (80), 194—218 u. französ. Zusammenfassung 218—219 (1955) [Russisch].

Zwei Flächen  $\mathfrak{r}$  und  $\bar{\mathfrak{r}}$  des dreidimensionalen euklidischen Raumes seien punktweise aufeinander bezogen. In dieser Beziehung mögen sich zwei orthogonale Kurvennetze so entsprechen, daß zusammengehörende Dreibeine  $t_1, t_2, n$  und  $\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{n}$  beider Flächen durch eine feste orthogonale Transformation auseinander hervorgehen, zusammengehörende Normalen beider Flächen sich aber nicht schneiden ( $t_1, t_2$  sind die Einheitsvektoren an die Netztangenten,  $n$  ist der Normaleneinheitsvektor). Zu einer Fläche  $\mathfrak{r}$  gibt es dann und nur dann eine so zugeordnete Fläche  $\bar{\mathfrak{r}}$ , wenn zwischen geodätischer Krümmung  $c_1$ , Normalkrümmung  $b_1$  und geodätischer Windung  $a_1$  der einen Schar des orthogonalen Netzes auf  $\mathfrak{r}$  und zwischen  $c_2, b_2, a_2 = -a_1$  der anderen Schar die Beziehungen  $c_1 = p b_1 + q a_1 + r_1$ ,  $c_2 = p a_1 + q b_2 + r_2$  mit  $r_1^2 + r_2^2 \neq 0$  und Konstanten  $p, q, r_1, r_2$  bestehen. Solche Kurvennetze existieren auf den Weingartenschen Flächen mit

$$(p^2 + q^2 + 1)K + (p r_1 + q r_2)H + r_1^2 + r_2^2 = 0$$

und nur auf diesen ( $K$  ist die Gaußsche Krümmung,  $H$  die mittlere Krümmung der Fläche). Diese Flächen und Netze werden genauer untersucht, insbesondere wird gezeigt, daß unter den abwickelbaren Flächen nur die Rotationszylinder dazugehören. Weiter: Die zugeordnete Fläche  $\bar{\mathfrak{r}}$  ist genau dann abwickelbar, wenn das Netz der Krümmungslinien auf  $\mathfrak{r}$  das ausgezeichnete Netz ist, das die Beziehung beider Flächen vermittelt.

M. Barner.

Nádeník, Zbyněk: Über die zu den Bertrandschen Kurven analogen Flächen. Begriff des Raumes in der Geometrie, Ber. Riemann-Tagung Forsch.-inst. Math., 156 (1957).

Auszug aus der vorstehend besprochenen Arbeit.

Baudoin-Gohier, Simone: Extension des équations de Codazzi et des conditions de rigidité à des surfaces convexes différentiables de classe  $C^n$  ( $n < 3$ ). C. r. Acad. Sci., Paris 248, 2704—2706 (1959).

Die Gleichungen von Codazzi können in der Integralform geschrieben werden ( $B$  = zweiter Fundamentaltensor):

$$\iint \Gamma_{ik}^l \underline{B}^{ik} d\sigma = \oint \varepsilon^{il} B_{ik} du^k,$$

wo  $\underline{B}^{ik} = \varepsilon^{i\alpha} \varepsilon^{k\beta} B_{\alpha\beta}$ . Indem man unter den Integralzeichen mit  $(\mathfrak{r} \mathfrak{r}_i)$  überschreibt, kommt man direkt zur Gleichung von Minkowski

$$2 \iint [K(\mathfrak{r} \xi) + H] d\sigma = \oint (\mathfrak{r} \xi d\xi)$$

und weiter für zwei isometrische Flächen zur Formel von Herglotz. Auf Grund eines Ergebnisses von Hartman und Wintner folgt dann: Alle Theoreme über eindeutige Bestimmtheit konvexer Flächen mit und ohne Ränder sind gültig für nur zweimal differenzierbare Flächen. Nach Ansicht der Verf. ist diese Bedingung noch zu verringern. — Man vergleiche übrigens die Theorie von A. D. Alexandrov in Efimov, Flächenverbiegung im Großen (dies. Zbl. 77, 154), § 19. (Bem. des Ref.)

E. Rembs.

**Dorfman, A. G.:** Lösung der Gleichung der Verbiegungen für gewisse Flächenklassen. *Uspechi mat. Nauk* 12, Nr. 2 (74), 147—150 (1957) [Russisch].

Durch schweizerische und sowjetische Mathematiker ist die Verbiegbarkeit von Flächen mit Flachpunkt  $z = f^{(n)}(x, y) + f^{(n+1)}(x, y) + \dots$  (die  $f$  homogen von den angegebenen Ordnungen) untersucht worden. Man weiß, daß für  $n \geq 5$  die verbiegbaren von diesen Flächen höchstens eine Menge vom Maße Null bilden. Verf. beweist, daß es für jedes  $n$  verbiegbare Flächen gibt. Der Beweis wird geführt für die Flächen mit  $z_{yy} \equiv 0$  oder  $z_{xy} \equiv 0$ . Für die Bour-Darbouxsche Biegungsgleichung vom Monge-Ampèreschen Typ können nämlich in diesen Fällen, wie einfache Berechnung zeigt, nichttriviale Lösungen explizit angegeben werden mit demselben Verhalten der zweiten Ableitungen. *E. Rembs.*

**Poznjak, É. G.:** Beispiel einer geschlossenen Fläche mit singulärem Punkt, die ein abzählbares Fundamentalsystem von unendlich kleinen Verbiegungen besitzt. *Uspechi mat. Nauk* 12, Nr. 3 (75), 363—367 (1957) [Russisch].

Durch  $r(z)$  sei der Meridian einer Rotationsfläche dargestellt,  $v$  sei die geographische Länge. Die Koeffizienten für die Differentialgleichungen der Variationen  $R, Z, V$  von  $r, z, v$  bei infinitesimaler Verbiegung sind Funktionen von  $z$  allein. Bei Verbiegung der Fläche als Ganzes müssen  $R, Z, V$  periodisch in  $v$  sein. Man untersucht gewöhnlich die Fourierkoeffizienten  $R_{k1}(z), R_{k2}(z)$  von  $R$ . Sie müssen derselben gewöhnlichen Differentialgleichung 2. Ordnung genügen  $G \equiv r R_k'' + (k^2 - 1) r'' R_k = 0$  ( $k = 2, 3, \dots$ );  $k = 0$  oder  $1$  bedeuten nur infinitesimale Bewegungen. Ist die Rotationsfläche geschlossen, so sind Randbedingungen für die Pole zu berücksichtigen. Für die Frage der Existenz von Verbiegungen höherer Ordnung oder von endlichen Verbiegungen ist zu untersuchen, ob Lösungen von  $G = 0$  für mehrere Werte des ganzzahligen Parameters  $k$  bei den gegebenen Randbedingungen existieren. Verf. gibt geschlossene Flächen vom Geschlecht 0 an, die Lösungen von  $G = 0$  für jedes ganzzahlige  $k$  bei zugehörigen Randbedingungen haben. Die Flächen sind in dem einen Pol regulär und haben in dem anderen eine Spitze; in der Umgebung der Spitze verhält sich  $r$  wie  $z e^{-1/z}$  bei kleinem  $z$ . *E. Rembs.*

**Gheorghiev, Gh.:** Sur la décomposition d'un complexe de droites en congruences remarquables. *An. şti. Univ. Al. I. Cuza Iaşi, n. Ser. Sect. I* 1, 53—65, russ. und französ. Zusammenfassung 65—68 (1955) [Rumänisch].

Pour la décomposition d'un complexe de droites, on lui adjoint une relation entre les formes de Pfaff, qui donnent le déplacement infinitésimal du repère canonique. On établit quelle est cette relation pour une décomposition en congruences de normales [éventuellement avec des conditions supplémentaires] ou en congruences isotropes ou en congruences paraboliques (éventuellement avec des conditions supplémentaires). Dans tous ces cas, on étudie aussi des propriétés remarquables des complexes et des congruences et des cas particuliers intéressants; p. ex.: dans le cas de la décomposition en congruences isotropes, le paramètre moyen de la congruence est le double de la courbure de la congruence changée de signe. Pour le cas du complexe des tangentes à une surface (c. spécial) et celui où les centres du complexe sont sur une surface (c. semi-spécial), la méthode générale fait défaut. Ces cas sont étudiés séparément. *M. Haimovici.*

**Roman, A.:** Observations concernant la décomposition d'un complexe de droites dans l'espace Euclidien. *An. şti. Univ. „Al. I. Cuza“ Iaşi, n. Ser., Sect. I* 4, Nr. 1, 61—66, russ. und französ. Zusammenfassung 66 (1958) [Rumänisch].

L'A. donne une interprétation géométrique d'un des invariants d'un complexe et fait ensuite une série d'observations sur le travail de Gheorghiev recensé ci-dessus. *Gh. Th. Gheorghiev.*

## Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

● Širokov, P. A. und A. P. Širokov: *Affine Differentialgeometrie*. [Affinnaja differencial'naja geometrija.] Unter Redaktion von A. P. Norden. Moskau: Staatsverlag für physikalisch-mathematische Literatur 1959. 319 S. R. 9,85 [Russisch].

The book is written in a revised and enlarged form of the manuscript of the late professor P. A. Širokov, who gave a lecture on affine differential geometry in 1938. The content of the manuscript has considerably been enriched by adding two chapters namely, Chap. III and VIII on the one hand and the notion of intrinsic geometries of the first and second species as well as an appendix due to P. A. Norden on the other. A very complete list of literatures containing 401 articles is found at the end of the book. In the Introduction there are exposed several fundamental notions of affine geometry and a brief conception of Lie groups of transformations with the arc and curvature of a curve in a geometry of Lie groups. The main content is divided into two parts: The theories of plane and space curves and the theory of surfaces in both centro-affine and equi-affine spaces. A. P. Širokov has fruitfully formulated besides the classical materials in Blaschke's famous work "Affine Differentialgeometrie" certain recent investigations from the view-point of affine connections. Take, for example, Chap. IV on some special classes of surfaces; there are studied many interesting properties of affine moulding surfaces of Salkowski and affine surfaces of revolution of Su and Süss. According to Norden's method the latter can be considered as one sort of surfaces having Peterson correspondences of unit modulus with other surfaces. The last three chapters deal with ruled surfaces, the relative theory of surfaces and rectilinear congruences.

*Su Buchin.*

Terracini, Alessandro: *Gli elementi curvilinei piani del terz'ordine e una generalizzazione del teorema di Meusnier*. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 14, 66—77, engl. Zusammenfassg. 66 (1959).

L'A. osserva che sono uniche sia la parabola, sia l'iperbole equilatera, sia l'ellisse di eccentricità minima che contengono un dato  $E_3$ . Si ha così un'ellisse di ipercurvatura il cui centro è detto "centro di ipercurvatura" dell' $E_3$ : esso insieme con l' $E_1$  appartenente all' $E_3$  determina completamente quest'ultimo. L'A. dimostra che il luogo delle ellissi di ipercurvatura delle sezioni di una superficie coi piani di un fascio attorno a una generica tangente è un ellissoide. Altri due modi di generalizzare il teorema di Meusnier si possono avere sostituendo nel luogo precedente le ellissi di ipercurvatura con le suddette parabole o iperboli equilatera: l'ellissoide risulta corrispondentemente sostituito da un cilindro parabolico o da un iperboloide.

*P. Buzano.*

● Finikow, S. P.: *Theorie der Kongruenzen*. Wissenschaftliche Bearbeitung der deutschen Ausgabe: Gerrit Bol. (Mathematische Lehrbücher und Monographien. II. Abt. Bd. 10.) Berlin: Akademie-Verlag 1959. XV, 491 S. DM 56,—.

Etude du voisinage d'une droite d'une congruence (foyers, surfaces focales). — Application de la théorie du trièdre mobile basée sur le calcul symbolique de E. Cartan. — Théorie métrique des congruences. Application aux congruences pseudo-sphériques, aux congruences  $W$ , etc. — Transformation asymptotique de l'espace, au moyen de congruences  $W$ . Application aux surfaces réglées, surfaces  $R$ , etc. — Réseaux conjugués et congruences harmoniques hyperspatiaux en relation avec la transformation de Laplace. — Etude des congruences en utilisant la représentation des droites de l'espace sur l'hyperquadrique de Klein de  $S_5$ . — Applications métriques hyperspatiales (travaux de Guichard). — Invariants et formes invariantes d'une congruence de  $S_3$ . Élément linéaire d'une congruence, c'est-à-dire partie principale du rapport anharmonique des foyers d'un rayon et des intersections de celui-ci avec les plans focaux d'un rayon infiniment voisin. — Congruences avec conservation des lignes de Darboux sur les nappes focales; relations avec les suites de



Laplace. - Congruences dont les surfaces focales sont projectivement applicables. - Congruences telles que les quadriques de Lie des nappes focales se touchent le long d'une génératrice. Très bon ouvrage, en grande partie original. Indications bibliographiques complètes et précises. *L. Godeaux.*

**Godeaux, Lucien:** Sopra una estensione della nozione di congruenze stratificabili. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 13, 551—554, französ. Zusammenfassg. 551 (1958).

Con l'intervento di una successione  $(L)$  di Laplace:  $\dots U_n \dots U_1 U V V_1 \dots V_n \dots$  l'A. definisce in uno spazio  $S_n$  una congruenza  $AB$   $n$ -stratificabile con una congruenza  $UV$  e ne dà la costruzione seguente. In uno spazio  $S_{r+2n}$  si consideri una successione di Laplace  $\dots \bar{U}_n \dots \bar{U}_1 \bar{U} \bar{V} \bar{V}_1 \dots \bar{V}_n \dots$  che da uno  $S_{2n-1}$  si proietti nella  $(L)$  su  $S_r$ : l'intersezione di  $S_r$  con lo spazio  $(\bar{U}_n \dots \bar{V}_n)$  è la retta  $AB$ . *P. Buzano.*

**Demaria, Davide Carlo:** Su alcuni sistemi  $\infty^2$  di rette in  $S_4$ . Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur. 92, 457—470 (1958).

Let  $S$  be a system of  $\infty^2$  lines in a four-dimensional projective space  $S_4$  such that the Plücker coordinates  $p_{ik}$  of all the lines satisfy a same Laplace equation, and let  $S'$  be the line congruence obtained by projecting the system  $S$  from a general point  $P$  of  $S_4$  onto any hyperplane not through  $P$ . It is proved that if for the system  $S$  there exists at least a center  $P$  such that the projection congruence  $S'$  has a non-ruled proper focal surface, then all the lines of  $S$  belong to a same hyperplane. Moreover, if for any center  $P$  the congruence  $S'$  always has a curve and a ruled surface for its two focal surfaces, then the system  $S$  consists of all the lines of  $\infty^1$  pencils  $Q\pi$ , where  $\pi$  is a fixed plane through each general point  $Q$  of a curve in  $S_4$ . The author also remarks that the above results can be immediately extended to a projective space  $S_n$  of a general dimension  $n$  ( $> 4$ ). *C. C. Hsiung.*

**Sorace, Orazio:** Intorno ad un problema di W. Blaschke generalizzato. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 25, 465—469 (1959).

Let  $\Phi$  be a surface in a projective space  $S_{2r+2}$  ( $r > 0$ ) with a conjugate system: its  $r$ -osculating spaces  $S(r)$  are  $S_{2r+2}$ . An  $S_3$  intersects these spaces in a congruence of lines: if this is a  $W$ -congruence the  $S_3$  is said to be a Blaschke's space of  $\Phi$ . A necessary and sufficient condition is given for such spaces. An application is made to surfaces whose non-homogeneous coordinates are  $(h_i + u)^\lambda (h_i + v)^\mu$ ,  $h_i$  constants ( $i = 1, \dots, 2r + 2$ ). *E. Bompiani.*

**Savel'ev (Saveliev), S. I.:** Surfaces with plane generatrices along which the tangent plane is constant. Doklady Akad. Nauk SSSR 115, 663—665 (1957) [Russisch].

Inhaltsübersicht einer Arbeit, die unter Leitung von Finikov entstanden ist. In Verallgemeinerung der Torsen des dreidimensionalen Raumes wird nach  $n$ -dimensionalen Flächen gefragt, die  $p$ -dimensionale ebene Erzeugende tragen, längs denen die Tangentenebene fest ist [vgl. auch E. Cartan, Bull. Soc. math. France 45, 57—121 (1916), insbes. S. 73; 48, 132—208 (1920), insbes. S. 161]. Solche Flächen liegen in einem Raum der Dimension  $N$  mit  $n < N \leq n + \frac{1}{2}(n-p)(n-p+1)$ ; wenn man von den Kegeln mit  $(p-1)$ -dimensionalen Scheiteln absieht, ist sogar  $N \leq n + (n-p)$ . Die Theorie der Hyperflächen dieses Typs ( $N = n + 1$ ) ist äquivalent der Theorie der  $(n-p)$ -parametrischen Flächen im  $(n+1)$ -dimensionalen projektiven Raum. Bei  $p = n - 2$  führt  $N = n + 3$  auf Kegel,  $N = n + 1$  auf Hyperflächen, so daß nur der Fall  $N = n + 2$  interessiert. Hierzu gibt es drei verschiedene Arten solcher Flächen, die zum Schluß der Inhaltsübersicht charakterisiert werden. *M. Barner.*

**Terracini, Alessandro:** Su certi sistemi  $\infty^7$  di linee spaziali. Boll. Un. mat. Ital. III. Ser. 13, 564—573, engl. Zusammenfassg. 564 (1958).

The author had already defined composed differential elements  $E_{2,1}$  and systems  $(\infty^2) \Gamma$  and  $\Delta$  of them having at a point a given tangent and osculating plane (this Zbl. 82, 151). In this paper systems  $(\infty^7) \Gamma$  and  $\Delta$  of curves are considered such that the curves  $(\infty^2)$  passing through a point with a given tangent and osculating plane determine a system  $\Gamma$  or  $\Delta$  of  $E_{2,1}$ . The differential equations of such systems are given and various examples of them.

E. Bompiani.

### Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

Pyle, H. Randolph: Proportional metrics in  $N$  variables. Math. Mag. 32, 261—263 (1959).

Verf. beweist, daß für zwei Räume  $S, S'$  mit den Metriken

$$ds^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} dx_i dx_j \quad \text{und} \quad ds'^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} dy_i dy_j$$

und dem Zusammenhang  $y_i = \Phi_i(x_1, \dots, x_n)$  ( $i = 1, \dots, n$ ), die Bedingung  $ds'^2 = \lambda^2 ds^2$  gleichwertig ist mit der Bedingung  $\sum_{k=1}^n a_{kj} \bar{\Phi}_{ik} = \mu \sum_{k=1}^n b_{ik} \Phi_{kj}$ , wobei  $\Phi_{ik} = \partial \Phi_i / \partial x_k$  und  $\Phi_{ij}$  der Kofaktor von  $\Phi_{ij}$  in der Matrix  $\Delta = (\Phi_{ij})$  ist.

H. Tolle.

Stanciu, P.: Submersion d'une variété riemannienne dans un espace non euclidien. Lucrările ști. Inst. Ped. Timișoara, Mat.-Fiz. 1958, 127—130, français. und russ. Zusammenfassung 130—131 (1959) [Rumänisch].

En interprétant un espace non euclidien en coordonnées homogènes comme un espace euclidien à une dimension de plus, l'A. écrit dans le cas de la submersion d'une variété riemannienne dans un espace non euclidien à une dimension de plus les théorèmes de Gauss et Codazzi-Petersen. On considère les mêmes questions dans le cas général de la submersion d'une variété riemannienne  $V_m$  dans un espace non euclidien  $n$ -dimensionnel.

T. Postelnicu.

Soós, Gy.: Über die geodätischen Abbildungen von Riemannschen Räumen auf projektiv-symmetrische Riemannsche Räume. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 9, 359—361 (1958).

Il est bien connu le théorème de Beltrami qui dit qu'un espace de Riemann  $\bar{V}_n$  peut être géodésiquement appliqué sur un espace à courbure constante, seulement s'il est lui aussi à courbure constante. Siniukov a montré que si  $V_n$  est symétrique dans le sens de Cartan, donc si le tenseur dérivé  $R_{jkl,p}^i$  du tenseur de courbure est nul, les espaces  $\bar{V}_n$  et  $V_n$  sont tous les deux à courbure constante. Une nouvelle démonstration du théorème de Siniukov a été donné par le Ref. [Acad. Républ. Roumaine, Revue Math. pur. appl. 1, 147—166 (1956)] en utilisant les différents cas de représentation géodésique de Levi-Civita. L'A. montre que si l'espace est projectif symétrique, donc nous avons en même temps

$$W_{ijk}^h = R_{ijk}^h - \frac{1}{n-1} (\delta_k^h R_{ij} - \delta_j^h R_{ik}), \quad W_{ijk,i}^h = 0$$

alors les deux espaces  $V_n$  et  $\bar{V}_n$  sont à courbure constante, ce qui constitue une généralisation du théorème de Siniukov.

G. Vranceanu.

Ichijô, Yoshihiro: On some properties of plane curves in Riemann spaces. J. Gakugei Tokushima Univ., natur. Sci. Math. 9, 27—30 (1958).

The author shows that if a curve lying in an  $n$ -dimensional Riemannian space  $V_n$  locally imbedded in  $V_m$  constitutes a plane curve and is also Darboux one, it must be an asymptotic or geodesic circle. When  $V_n$  is a hypersurface, he shows that in order that every plane curve in  $V_{n+1}$  be a plane curve in  $V_n$ , it is sufficient that either  $V_n$  be a totally geodesic or a totally umbilical hypersurface in  $V_{n+1}$ .

T. Okubo.

Golab, S.: Über die Metrisierbarkeit der affin-zusammenhängenden Räume. Tensor, n. Ser. 9, 1—7 (1959).

Die Metrisierbarkeit eines affin-zusammenhängenden Raumes bedeutet analytisch die Lösbarkeit des Gleichungssystems

$$(*) \quad \partial_\mu g_{\lambda\nu} - g_{\nu\lambda} \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha - g_{\lambda\alpha} \Gamma_{\nu\mu}^\alpha = 0,$$

wo die  $g_{\mu\nu}$  die unbekannten Funktionen sind. Es soll  $p$  den Rang der Matrix der  $g_{\mu\nu}$  und  $q$  das Maximum von  $p$  für alle mögliche Lösungen des Systems (\*) sein. Von den Komponenten des Krümmungstensors  $R_{\alpha\mu\nu}{}^\lambda$  bildet Verf. im zweidimensionalen Falle zwei Skalarendichten und eine kennzeichnende Matrix. Mit dem Range dieser Matrix und mit den eingeführten Skalarendichten können nun die möglichen Fällen  $q = 0, 1$ , bzw.  $2$  charakterisiert werden, womit die verschiedenen Typen der Lösungen des Gleichungssystems (\*) bestimmt sind. A. Moór.

Eliopoulos, H. A.: Subspaces of a generalized metric space. Canadian J. Math. 11, 235—255 (1959).

In the present article a theory of  $m$ -dimensional subspaces  $F_m$  of an  $n$ -dimensional Finsler space  $F_n$  (the latter being regarded as a locally Minkowskian space) is developed. This paper thus represents a direct generalization of the work of the reviewer (this Zbl. 74, 172) who, however, considered solely the case  $m = n - 1$  (hypersurfaces). Due to the lack of symmetry of the Minkowskian orthogonality (transversality) one has to consider in the case  $m = n - 1$  a cone of "normal" directions in addition to another unique normal. This leads to two distinct second fundamental forms, which between them share the properties usually attributed to the classical second fundamental form. These concepts are generalized by the author to the case of an arbitrary  $m \leq n - 1$ , and, by means of the induced connection parameters, the normal curvatures of  $F_m$  are defined and studied in detail. Generalizations of the classical theorems of Meusnier, Euler and Rodrigues are found, while an interesting relation between principal directions is given, the latter being a generalization of the classical orthogonality relation between such directions. Again, the lack of symmetry of the Minkowskian cosine invariably causes analytical complications. Another difficulty arises from the fact that the covariant derivatives of the unit normals are not tangential to  $F_m$  (in contrast to classical theory), so that an explicit evaluation of these derivatives is given. On the basis of these expressions various forms of the generalizations of the Gauss-Codazzi equations (corresponding to the various normals) are derived. H. Rund.

Hashiguchi, Masao: On parallel displacements in Finsler spaces. J. math. Soc. Japan 10, 365—379 (1958).

The present paper represents a comparative study of the various covariant derivatives which have been defined in Finsler spaces. The author begins with a discussion of the space of line-elements  $(x^i, y^j)$  in which a metric tensor  $g_{ij}(x, y)$  and connection coefficients  $\Gamma_{hk}^i, C_{hk}^i$  satisfying certain assumptions are given. In particular, it is assumed that  $C_{jk}^i(x, y) y^k = C_{jk}^i(x, y) y^j = 0$ . Conditions which ensure that the connection be metrical are derived, and it is shown by means of two lemmas how further connections — not necessarily metrical — may be obtained. The metric tensor is then subjected to further conditions, which imply that the metric is that of a Finsler space. The author's connection then becomes that of Cartan (Les espaces de Finsler, this Zbl. 8, 418), from which the connections of Synge [Trans. Amer. math. Soc. 27, 61—67 (1925)], Taylor [Trans. Amer. math. Soc. 27, 246—264 (1925)] and Barthel (this Zbl. 53, 118) are then derived as special cases. The application of the above-mentioned lemmas also yields the distinct parallel displacements as defined by Berwald [Math. Z. 25, 40—73 (1926)] and the reviewer (this Zbl. 42, 404).

H. Rund.



Moór, Arthur: Über nicht-holonome allgemeine metrische Linienelement-räume. *Acta math.* **101**, 201—233 (1959).

In a recent paper (this Zbl. **70**, 172) the author introduced a theory of  $n$ -dimensional manifolds whose given metric tensor  $g_{ij}(x^k, x'^k)$  [ $i, j, k = 1, \dots, n; x^k, x'^k$  positional and directional coordinates respectively] need not necessarily represent the second directional derivatives of a scalar function  $\frac{1}{2} F^2(x^k, x'^k)$  [thus generalizing Finsler geometry]. In the present paper he studies the corresponding nonholonomic geometry which results from the imposition of  $m$  constraints of the form  $G^\mu(x^k, x'^k) = 0$ ,  $\mu = 1, \dots, m$ , and results are obtained which are natural generalizations of the work of J. L. Synge [*Math. Ann.* **99**, 738—751 (1928)] and the reviewer (this Zbl. **55**, 405—406). Besides the autoparallels of the (unconstrained) geometry and the extremals resulting from the fundamental function defined by  $\frac{1}{2} f^2(x^k, x'^k) = g_{ij}(x^k, x'^k) x'^i x'^j$ , a further class of curves, the so-called "trajectories" have to be considered. The latter satisfy the equations of constraint and are such that their principal normals are transversal to certain  $(n - m)$ -dimensional local non-holonomic submanifolds defined by the constraints. These conditions determine the trajectories uniquely and give rise to a non-holonomic connection such that the trajectories are "autoparallel" with respect to this connection. A theory of curvature (Bianchi identities, "autoparallel deviation" of neighbouring trajectories, being the analogue of the "geodesic deviation" of Levi-Civita) based on this connection is developed in detail. Necessary and sufficient conditions for the coincidence of the trajectories with the extremals of the problem of Lagrange corresponding to the integrand  $f(x^k, x'^k)$  and the constraints are derived. In Part II the author considers the more general case in which the directional arguments appearing in the equations of constraint do not necessarily coincide with the tangent vectors of the corresponding trajectories.

H. Rund.

Coz, Marcel: Pyramides et cônes convexes asymétriques. *C. r. Acad. Sci., Paris* **248**, 3682—3684 (1959).

Die Methode von G. Bouligand (s. dies. Zbl. **78**, 146), mit der zu einer Variationsmetrik ein Modell konstruiert werden kann, wird vom Verf. weiterentwickelt. Bei den Verallgemeinerungen gelangt man zur Fläche

$$(a) \quad \zeta = \sum_{i=1}^n \lambda_i |\xi \sin \alpha_i - \eta \cos \alpha_i - \mu_i \zeta|.$$

Ist  $\mu_i = 0$ , so gibt (a) den Bouligandschen Fall. Es wird eine Methode angegeben, womit zu einer Pyramide eine Representation von der Form (a) konstruiert werden kann. Der Fall des Kegels, in dem  $n$  unendlich wird, liefert statt (a) die Integralgleichung

$$(b) \quad \zeta = \int_0^{2\pi} |\xi \sin \alpha - \eta \cos \alpha - \mu(\alpha)| d\varphi(\alpha).$$

Es wird gezeigt, daß unter gewissen Bedingungen die Integralgleichung (b) für  $\varphi(\alpha)$  nur eine wachsende Lösung hat.

A. Moór.

## Topologie:

• Bourbaki, N.: *Éléments de mathématique. VIII. Part. 1: Les structures fondamentales de l'analyse. Livre III: Topologie générale. Chap. 9: Utilisation des nombres réels en topologie générale.* (Actualités scientifiques et industrielles. No. 1045.) 2ième éd. revue et augmentée. Paris: Hermann 1958. 169 p.

Die Erweiterungen gegenüber der 1. Auflage (dies. Zbl. **31**, 55) betreffen vor allem die metrisierbaren Räume (§ 2) und die parakompakten Räume (§ 4). Den Satz von Nagata-Smirnow über die Metrisierung regulärer Räume findet man unter den Übungsaufgaben. Neu ist § 6 über „polnische“ Räume; so nennt Verf.

die vollständigen metrischen Räume mit abzählbarer Basis. In der Hauptsache handelt es sich dabei um die Souslinschen und Borelschen Mengen und um den Choquetschen Kapazitätsbegriff. Die Übungsaufgaben haben vielfach eine Neuformulierung und Vermehrung erfahren; ihre Umgruppierung gegenüber der ersten Auflage ist beträchtlich; sie ist in einer Übersetzungstabelle für in beiden Auflagen abweichende Numerierungen festgehalten. Der Bequemlichkeit des Lesers dient auch ein herausklappbares Blatt, das den Stammbaum der topologischen Räume zeigt, vom metrisch kompakten bis zum Hausdorffschen Raum. *G. Aumann.*

**Onuchie, Nelson:** *P-spaces and the Stone-Čech compactification.* *Anais Acad. Brasil. Ci.* **30**, 43—45 (1958).

Ein vollständig regulärer Raum  $E$  heißt ein  $P$ -Raum, wenn jedes  $G_\delta$  offen ist. Die Stone-Čechsche Kompaktifizierung des vollständig regulären Raumes  $E$  wird mit  $\beta(E)$  bezeichnet. Die ohne Beweisangabe formulierten Sätze behandeln Beziehungen zwischen verschiedenen, in einem  $P$ -Raum definierten uniformen Strukturen, notwendige und hinreichende Bedingungen für die Eigenschaft eines vollständig regulären Raumes, ein  $P$ -Raum zu sein, sowie Beziehungen zwischen  $\beta(E \times E)$  und  $\beta(E) \times \beta(E)$ . *F. Albrecht.*

**Suzuki, Jingoro:** *Some properties of completely normal spaces.* *Proc. Japan Acad.* **33**, 19—24 (1957).

Es werden mehrere notwendige und hinreichende Bedingungen für die vollständige Normalität eines topologischen Raumes gefunden. Das Hauptresultat der Arbeit ist folgender, von T. Inokuma (dies. Zbl. **64**, 169) für endliche Mengensysteme bewiesene Satz: der Raum  $H$  ist dann und nur dann vollständig normal, wenn es zu jedem lokal-endlichen System von abgeschlossenen Mengen  $\{X_\alpha | \alpha \in \Omega\}$  ein System von abgeschlossenen Mengen  $\{H_\alpha | \alpha \in \Omega\}$  gibt, derart, daß  $H = \bigcup H_\alpha$  und  $H_\alpha \cap H_\beta \cap (X_\alpha \cup X_\beta) = X_\alpha \cap X_\beta$  ist. *F. Albrecht.*

**Lelek, A.:** *Sur les involutions multivalentes.* *Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. math. astron. phys.* **6**, 511—517, russ. Zusammenfassung XLI (1958).

A lemma of Kuratowski concerning involutions of unicoherent locally connected continua (see for instance I. Berstein, this Zbl. **72**, 185) is extended to multivalued involutions. Let  $X$  be a locally connected unicoherent continuum. The results are based on the following theorem. If  $F: X \rightarrow 2^X$  is upper semicontinuous, then for any open  $G \subset X$  at least one of the sets  $G$  or  $X - G$  has not property  $(\alpha)$ . In the author's notation, a set  $A \subset X$  has property  $(\alpha)$  if there is a component  $C$  of  $X - A$ , such that  $F(A) \subset C$ . An upper semicontinuous  $\Phi: X \rightarrow 2^X$  is an involution, if  $x_1 \in \Phi(x_2)$  for all  $x_2 \in \Phi(x_1)$ . Let  $C(X)$  be the set of all nonvoid subcontinua of  $X$ . If  $\Phi: X \rightarrow C(X)$  is an involution and  $G \subset X$  satisfies  $\Phi(G) \subset G$ , then at least one of the sets  $G$  and  $X - G$  has a component  $A$  such that  $\Phi(A) = A$ . *I. Berstein.*

**Ratray, B. A.:** *Generalizations of the Borsuk-Ulam theorem.* *Sympos. internac. Topologia algebraica* **302** (1958).

Let  $S^n$  be the  $n$ -sphere  $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1$ . Theorem 1. Any continuous map  $f: S^n \rightarrow S^n$  of even degree carries at least one pair of antipodal points into the same point. Theorem 2. Any continuous map  $f: S^n \rightarrow S^n$  of odd degree carries some pair of antipodal points into antipodal points. For similar results cf. G. Hirsch, *Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér.* **32**, 394—399 (1946).

**Hu, S.T.:** *Continuous associative multiplications in locally triangulable spaces.* *Fundamenta Math.* **46**, 109—115 (1958).

Let  $S$  be a compact connected Hausdorff space. A continuous associative multiplication on  $S$  with two-sided unit  $u \in S$  is called essential if it does not convert  $S$  into a topological group. A point  $x \in S$  is conic if there exists a neighbourhood  $V \ni x$ , such that  $\bar{V}$  is homeomorphic to the cone over its boundary  $F(\bar{V})$ . Main result: If the unit  $u \in S$  is conic then it is an unstable (labile) point. For definition of lability see Borsuk and Jaworowski (this Zbl. **53**, 300); the reviewer remarks

that this definition, used in the paper, does not coincide with that of Hopf and Pannwitz (this Zbl. 6, 422). Several corollaries are derived, as for instance: If  $S$  is locally triangulable without unstable points, then  $S$  admits no essential multiplication.

I. Berstein.

Pasynkov, B.: Polyhedral spectra and the dimensionalities of biocompacts, especially of bicompact groups. Doklady Akad. Nauk SSSR 121, 45—48 (1958) [Russisch].

Ein Spektrum  $S = \{X_\alpha, w_\alpha^\beta\}$  heißt polyedral, wenn  $X_\alpha$  ein Polyeder ist. Ist  $w_\alpha^\beta$ , die Projektion, simplizial und affin auf den Simplexen, so wird  $S$  simplizial genannt. Es heißt  $S$  „ $n$ -fach im Sinne  $\dim$ “ wenn  $\dim X_\alpha \leq n$  für alle  $\alpha$  ist. U. a. werden die folgenden Sätze angegeben: (1) Jedes Bikompaktum  $\Phi$  ist topologischer Raum eines polyedralen Spektrums. (2) Ist  $\dim \Phi = 0$ , so kann man  $S$  nulldimensional, simplizial mit epimorphen Projektionen voraussetzen. (3) Ist ein Bikompaktum  $\Phi$  Raum eines Spektrums, das  $n$ -fach im Sinne  $\dim$  ist, so ist  $\dim X_\alpha \leq n$ .

F. W. Bauer.

Švedov (Shvedov), I.: A proof of the homeomorphism of polyhedra and point sets. Doklady Akad. Nauk SSSR 122, 566—569 (1958) [Russisch].

Die Untersuchungen des Verf. zielen zweifellos darauf hin, gewisse Abschwächungen der Hauptvermutung der kombinatorischen Topologie zu behandeln. Dabei bedient er sich des Begriffs eines Spektrums. Der wesentliche Satz dieser Note ist eine Abschwächung der Hauptvermutung der kombinatorischen Topologie und lautet: Notwendig und hinreichend dafür, daß zwei Mengen  $A \subset R^n$ ,  $A' \subset R^{n'}$  homöomorph sind, ist, daß ihre geometrischen Spektren  $S$  und  $S'$  (d. h. die Spektren, welche durch ihre Triangulationen entstehen) konfinale Teile  $s, s'$  enthalten, die konfinal zu einem und dem selben abstrakten Spektrum  $\Sigma$  vervollständigt werden können. Entscheidend für das Verständnis dieses Satzes ist, daß hier nicht, wie gewöhnlich, bei einem Spektrum gefordert wird, für drei Komplexe  $\alpha < \beta < \gamma$  und beliebige Simplexe  $e_\gamma \in \gamma$  gilt  $w_\alpha^\beta w_\beta^\gamma e_\gamma = w_\alpha^\gamma e_\gamma$ , sondern nur daß  $w_\alpha^\beta w_\beta^\gamma e_\gamma \subset w_\alpha^\gamma e_\gamma$  erfüllt ist. Gilt aber immer das Gleichheitszeichen, so spricht man von einem transitiven Spektrum. Die übrigen Begriffe, insbesondere der der Konfinalität und der konfinalen Vervollständigung, sind im bekannten Sinne zu verstehen. Es ist ein sehr wichtiges und ungelöstes Problem, ob obiger Satz auch für transitive Spektren, d. h. genauer für transitives  $\Sigma$  gilt.

F. W. Bauer.

Mardešić, S.: Equivalence of singular and Čech homology for ANR-s application to unicoherence. Fundamenta Math. 46, 29—45 (1958).

(1): The author shows that, in metric ANR, the singular and the Čech theory based on all coverings are naturally isomorphic; his proof of this well-known result differs from those already in the literature. (2): A detailed proof that for any space  $X$ ,  $f: X \rightarrow S^1$  is nullhomotopic if and only if  $f(x) = \exp[i\varphi(x)]$  for suitable  $\varphi: X \rightarrow E^1$  is given; this is a known extension of Eilenberg's original theorem for metric  $X$ , and is already in Kuratowski's book, Topologie II (this Zbl. 41, 96), p. 326, although the proofs differ somewhat. (3): A connected locally connected normal paracompact space  $X$  is unicoherent if and only if the integral Čech cohomology  ${}_c H^1(X) = 0$ ; the author simply notes that Eilenberg's proof of the equivalence, for metric  $X$ , of "X unicoherent" and " $(S^1)^X$  arc-connected" goes through under weaker conditions on  $X$ , and applies Dowker's version of Bruschlinsky's theorem. As application of these results: If  $X$  is compact metric,  $\dim X = k < m$ , then (a): if  $k < m - 1$ ,  $(S^m)^X$  is unicoherent (b): if  $k = m - 1$ ,  $(S^m)^X$  is unicoherent if and only if  $\text{Hom} [{}_c H^k(X), Z] = 0$ ; these follow from (1), (3) by noting that [J. C. Moore, this Zbl. 71, 385; S. Mardešić, Periodicum math. phys. astron., II. Ser. 11, 169—242 (1956)] the singular homology  $H_p[(S^m)^X] = 0$  for  $p < m - k$  and  $\approx {}_c H^k(X)$  for  $p = m - k$ , and that  $(S^m)^X$  is a metric ANR.

J. Dugundji.



Sitnikov, K. A.: Kombinatorische Topologie der nichtabgeschlossenen Mengen.

III. Mat. Sbornik, n. Ser. 48 (90), 213—226 (1959) [Russisch].

(Teil I, s. dies. Zbl. 55, 163; Teil II, s. dies. Zbl. 65, 161). — In dieser Arbeit wird vor allem der zweite Sitnikovsche Dualitätssatz ausführlich bewiesen, welcher folgendes besagt: Es ist für beliebigen diskreten Koeffizientenbereich  $G$ :  $\Delta_c^p(B, G) = \nabla_c^q(A, G)$ , wobei  $A \subset R^n$ ,  $B = R^n - A$ ,  $p + q = n - 1$  ist. Die Gruppe  $\Delta_c^p(B, G)$  ist die bekannte Vietoris-Homologiegruppe von  $B$ , während  $\nabla_c^q(A, G)$  eine gewisse Faktorgruppe der Čech-Dowker-Sitnikovschen Kohomologiegruppe  $\nabla^q(A, G)$  ist, die auf sternendlichen Überdeckungen basiert. Der Satz kommt dadurch zustande, daß man den ersten Sitnikovschen Dualitätssatz untersucht, welcher folgende Isomorphie feststellt:  $\Delta^p(B, G) = \nabla^q(A, G)$ . Hier ist  $\Delta^p(B, G)$  die von Sitnikov eingeführte Homologiegruppe, aus der ihrerseits die Vietoris-Gruppe als Faktorgruppe hervorgeht, mit dem Kern  $H^p(B, G)$ . Es war lange Zeit ein schwieriges Problem, ob sich die Vietoris-Gruppe überhaupt im Sinne der Alexander-Dualität dualisieren läßt, d. h. ob sich in  $\nabla^q(A, G)$  eine Untergruppe  $N_y^q(A, G)$  finden läßt, welche bei dem Isomorphismus  $\varphi$ , der den ersten Dualitätssatz liefert, in  $H^p(B, G)$  übergeht. Auch für bikompakten Koeffizientenbereich kann man eine ganz ähnliche Aussage herleiten. Nur hat es hier keinen Sinn, die Untergruppe  $H^p(B, G)$  zu nehmen, da die Sitnikovsche und die Vietoris-Homologie in diesem Falle übereinstimmen. Die hierbei auftretenden Untergruppen, die als Kerne entsprechender Homomorphismen auftreten, sind durch Verschlingungen oder durch skalare Produkte definiert. Ebenso werden die anderen, schon früher bekannten Dualitätssätze und Homologiegruppen, welche alle von P. S. Alexandroff stammen, in einem allgemeinen übersichtlichen Schema angeordnet. Die entsprechenden Dualitätssätze werden aus den Sitnikovschen hergeleitet. Dabei ergibt sich auch eine Reihe neuer, bisher noch unbekannter Dualitätssätze. Verf. stellt fest, daß alle in letzter Zeit definierten Gruppen, die auf unendlichen Überdeckungen basieren, sich ebenso wie die Gruppen, die „mit kompaktem Träger“ operieren, dualisieren lassen, im Gegensatz zu den Gruppen, die auf endlichen Überdeckungen beruhen, wie ein bekanntes Beispiel von P. S. Alexandroff zeigt. Hierbei erweist sich der erste Sitnikovsche Dualitätssatz unzweifelhaft als der stärkste bisher bekannte Dualitätssatz vom Alexanderschen Typus. Die bei diesen Prozessen auftretenden Gruppen ergeben sich alle aus den beiden Gruppen  $\Delta^p(A, G)$  oder  $\nabla^q(A, G)$  durch Unter- oder Faktorgruppenbildung oder durch den Topologisierungs-Prozeß von Čogošvili. In der vorliegenden Arbeit sind sie alle in einer Tabelle zusammengefaßt. Außerdem werden in der Arbeit die sogenannten quasi-offenen Mengen  $A \subset S^n$  eingeführt und so definiert, daß stets die Dualität  $\Delta_c^p(A, D) \mid \Delta_c^q(B, K)$  gilt, wo  $B$  die Komplementärmenge,  $D$  eine diskrete und  $K$  die kompakte, zu  $D$  duale Gruppe bezeichnet. Das wesentliche Ergebnis über diese Mengen ist darin zu sehen, daß sie mittels der Dualitätssätze als topologisch invariant erkannt werden: Die Eigenschaft der quasi-Offenheit hängt nicht von der Einbettung von  $A$  ab. Vertauscht man in obiger Definition die Rolle von  $D$  und  $K$ , so kommt man zu den quasi-abgeschlossenen Mengen, die ebenfalls als invariant nachgewiesen werden. Diese Mengen bilden einen maximalen Dualitätsbereich im Sinne von P. S. Alexandroff. Durch diese Arbeit wird die Reihe der bedeutenden Sitnikovschen Arbeiten über die kombinatorische Topologie nicht abgeschlossener Mengen fortgesetzt und, wenn man nach den vorausgegangenen Noten urteilt, beendet. Durch Sitnikovs Untersuchungen ist das Problem der Dualitätssätze für nicht abgeschlossene Mengen zu einem gewissen Abschluß gebracht worden.

F. W. Bauer.

Frum-Ketkov, R. L.: Homologieeigenschaften der Urbilder von Punkten bei dimensionserhöhenden Abbildungen von Mannigfaltigkeiten. Doklady Akad. Nauk SSSR 122, 349—351 (1958) [Russisch].

Verf. geht aus von dem bekannten Vietoris'schen Abbildungssatz und untersucht die Frage, welche genaueren Aussagen man über die Homologie des Urbildes  $f^{-1}(y)$  bei einer Abbildung  $f: X \rightarrow Y$ ,  $y \in Y$  machen kann, wenn  $f$  insbesondere dimensionserhöhend ist. Zwei seiner Sätze lauten: (1) Sei  $f$  eine stetige Abbildung einer  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M^n$  auf ein  $m$ -dimensionales Polyeder  $K$ ,  $m > n$ , so daß  $H_r(f^{-1}(y)) = 0$  für beliebiges  $y \in K$  und  $r \leq s$  ist. Dann ist  $2s < n - 2$ . (2) Sei  $f$  eine monotone Abbildung von  $M^3$  auf  $M^m$ ,  $m > 3$  (d. h. das Urbild einer zusammenhängenden Menge ist zusammenhängend), und sei  $y \in M^m$  ein beliebiger Punkt. Ist  $f^{-1}(y)$  nicht Träger eines Zyklus  $z^1, z^1 \sim 0$  in  $M^1$ , so gibt es in jeder beliebigen Umgebung  $U(y)$  zwei Punkte  $x_1, x_2$ , so daß ihre Urbilder Zyklen enthalten, die verschlungen sind. Der zweite Satz bekommt besondere Bedeutung durch Untersuchungen von Ludmilla Keldyš, welche erstmalig eine monotone Abbildung  $f: S^3 \rightarrow S^4$  konstruierte, welche diese lokale Verschlingungseigenschaft hat. Bezüglich der Beweise ist zu bemerken, daß (1) mit Hilfe des Vietoris'schen Abbildungssatzes recht einfach bewiesen werden kann, während (2) komplizierter ist. *F. W. Bauer.*

**Weier, Joseph:** Sur des matrices de torsion caractéristiques de M. G. de Rham. C. r. Acad. Sci., Paris **248**, 1752—1754 (1959).

Verf. verallgemeinert die üblichen Verschlingungsmatrizen und deren Verhalten bei Abbildungen einer Mannigfaltigkeit  $M$  auf eine Mannigfaltigkeit  $N$ ,  $\dim M = 4n + 1$ ,  $\dim N = 2n + 1$ , auf allgemeinere Dimensionszahlen.

*F. W. Bauer.*

**Piccinini, Renzo:** Über eine Produktbildung in  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten. Anuário Soc. Paranaense Mat., II. Sér. **1**, 11—20, engl. Zusammenfassg. **20** (1958) [Portugiesisch].

In this paper the author defines a product in an  $n$ -dimensional manifold (in the sense of Seifert-Threlfall) without using the coboundary operator. He uses the "intersection" of dual cells belonging to dual decompositions (distribution) of the manifold.

**Suzuki, Haruo:** On the realization of homology classes by submanifolds. Trans. Amer. math. Soc. **87**, 541—550 (1958).

Ce papier contient les deux théorèmes suivants: 1. Si  $u$  et  $v$  sont deux classes de cohomologie d'une variété réalisables par des sous-variétés, alors la classe produit  $u \cup v$  l'est aussi. 2. Si la classe  $u$  est réalisable pour le groupe  $O(k)$  (i. e. il existe une sous-variété duale à  $u$  dont le fibré normal admet  $O(k)$  pour groupe de structure), alors la classe  $\text{Sq}^k u$  est également réalisable. Les démonstrations, faites en passant aux complexes  $M(O(r))$  appropriés, sont pratiquement immédiates.

*R. Thom.*

**Thomas, Emery:** The generalized Pontrjagin cohomology operations and rings with divided powers. Mem. Amer. math. Soc. Nr. **27**, 82 p. (1957).

Soit  $A$  un anneau gradué  $A = \sum A^k$ ,  $A^k$  de degré  $k$ , dont tous les  $A^k$  sont des groupes de la forme  $Z_{p^{\alpha}}$ ;  $A$  est dit «à puissances divisées» (au sens de H. Cartan), s'il existe des opérations  $g_r: A^{2k} \rightarrow A^{2rk}$  jouissant des propriétés formelles de l'opération  $x \rightarrow x^n/n!$ , nulles sur tout produit d'éléments de degré impair. Alors la cohomologie  $H^*(X; A)$  de tout espace  $X$  à valeur dans  $A$ , est bigraduée; elle peut être munie d'opérations:  $k_r: H^{2m}(X; A^{2n}) \rightarrow H^{2rm}(X; A^{2rn})$  qui font de  $H^*(X; A)$  un anneau à puissances divisées. Ces opérations  $k_r$  sont fonctoriellement liées aux puissances  $g_r$  de l'anneau  $A$ . On les définit dans un complexe  $K$  grâce au schéma de Steenrod: On donne à toute classe  $u \in H^n(K; Z_\theta)$  une cochaîne représentative, c'est-à-dire, une application  $\psi$  des cochaines d'un «espace de Moore»  $M(Z_\theta, n)$  dans les  $n$ -cochaines de  $K$ :  $\psi: M \rightarrow K$ . On forme ensuite le  $p$ -produit de  $M, K$  par eux-mêmes, ( $p$  premier) on y fait agir le groupe  $\pi = Z_p$  des permutations cycliques; si  $W$  désigne un complexe universel pour  $\pi$ , engendré par  $e_0, e_1, \dots, e_j, \dots$  tels que  $de_{j+1} = \sum e_j$  ou  $\Delta e_j$ , suivant que  $j$  est pair ou impair, on a une suite d'homomorphismes:  $W \otimes_\pi M^p \rightarrow W \otimes_\pi K^p \rightarrow K$ , qui permet de définir certaines opérations cohomologiques de la classe  $u$ . Dans le cas actuel, on

introduit la fonction cochaîne:  $R^p: C^{2n}(M) \rightarrow C^{2p n}(W \otimes_{\pi} M^p)$  définie par la formule:

$$R^p(u) = e_0 \otimes_{\pi} u^p + \sum e_1 \otimes_{\pi} u^{p-1} \delta u.$$

On vérifie que cette fonction  $R^p$  définit bien une opération cohomologique  $k_p: H^{2n}(K; Z_{\theta}) \rightarrow H^{2pn}(K; \Gamma_p(Z_{\theta}))$ , où  $\Gamma_p(Z_{\theta})$  désigne la composante de degré  $2p$  de l'anneau à puissances divisées universel engendrée par le groupe  $p$ -cyclique  $Z_{\theta}$ . Dans le cas  $n = 1, p = 2$ , on retrouve le classique «carré de Pontrjagin». On obtient ensuite les opérations  $k_r$ ,  $r$  quelconque, par factorisation en  $k_p$ , après vérification du fait que  $k_p k_q = k_q k_p$ . Il ne reste plus ensuite qu'à vérifier, à partir des  $k_p$  dont on connaît la formule en cochaines, que les  $k_r$  ont vis-à-vis de la somme et du cup-produit, les propriétés postulées des puissances divisées. La construction des opérations  $k_r$  comble une lacune: selon une idée répandue, en effet, ces opérations, associées aux puissances de Steenrod, opérations de Bockstein et au cup-produit, permettent par composition d'obtenir toute opération cohomologique partout définie.

R. Thom.

Ven, A. J. H. M. van de: An interpretation of the formulae of Kundert concerning higher obstructions. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 60, 196—200 (1957).

(Die Terminologie dieses Referats ist die von F. Hirzebruch: Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie, dies. Zbl. 70, 163, im Folgenden als „[H]“ zitiert.) —  $X$  sei ein endliches Polyeder, trianguliert durch den simplizialen Komplex  $K$ ,  $K^q$  sei dessen  $q$ -dimensionales Gerüst. Sei  $n \geq 2$  und  $PU(n)$  die projektiv-unitäre Gruppe:  $PU(n) = U(n)/D(n)$ , wo  $D(n)$  die Gruppe aller komplexen  $n$ -reihigen Diagonalmatrizen ist, bei denen alle Elemente der Hauptdiagonalen einander gleich und vom Betrage 1 sind. Sei  $\xi$  ein  $U(n)$ -Bündel über  $X$ . Vermöge des kanonischen Homomorphismus  $U(n) \rightarrow PU(n)$  entspricht  $\xi$  genau ein  $PU(n)$ -Bündel über  $X$  (vgl. [H], S. 42/43), das hier mit  $P(\xi)$  bezeichnet werde. (Ist  $\xi'$  ein weiteres  $U(n)$ -Bündel über  $X$ , so gilt (vgl. [H], S. 67):  $P(\xi) = P(\xi') \Leftrightarrow$  Es gibt ein  $U(1)$ -Bündel  $\tilde{\zeta}$  über  $X$  mit  $\xi' = \xi \otimes \tilde{\zeta}$ .)  $\sigma(\xi)$  bezeichne das zu  $\xi$  assoziierte Faserbündel über  $X$  mit typischer Faser  $S^{2n-1}$ ,  $\eta$  das zu  $P(\xi)$  assoziierte Faserbündel über  $X$  mit typischer Faser  $P_{n-1}(C)$ , dem komplexen projektiven Raum der komplexen Dimension  $n - 1$ . Die Projektion von  $S^{2n-1}$  auf  $P_{n-1}(C)$  der bekannten Faserung von  $S^{2n-1}$  in 1-Sphären über  $P_{n-1}(C)$  induziert dann eine fasertreue stetige Abbildung  $h_{\xi}$  von  $\sigma(\xi)$  auf  $\eta$ . — Verf. beweist dann folgende Sätze: Theorem 1: Seien  $f, g$  zwei Schnitte von  $\eta$  über  $K^q$ ,  $3 \leq q \leq 2n - 1$ . Die Differenzkokette  $d(f|K^2, g|K^2) \in G^2(K, Z)$  ( $\pi_2(P_{n-1}(C)) = Z!$ ) ist wegen  $q \geq 3$  ein Kozyklus und repräsentiert daher eine Cohomologieklassse  $d \in H^2(X, Z)$ . Zu  $d$  gibt es (bekanntlich) genau ein  $U(1)$ -Bündel  $\zeta$  über  $X$  mit erster Chernscher Klasse  $c_1(\zeta) = d$ . Dann gilt: Gibt es einen Schnitt  $\tilde{g}$  von  $\sigma(\xi)$  über  $X$  mit  $g = h_{\xi} \circ \tilde{g}$ , so gibt es einen Schnitt  $\tilde{f}$  von  $\sigma(\xi \otimes \zeta)$  über  $X$  mit  $f = h_{\xi \otimes \zeta} \circ \tilde{f}$ . — Theorem 2:  $\zeta, \zeta'$  seien zwei  $U(1)$ -Teilbündel von  $\xi$ .  $\zeta$  bzw.  $\zeta'$  bestimmen in natürlicher Weise je einen Schnitt  $f$  bzw.  $f'$  in  $\eta$  über  $X$ . Dann gilt für die Cohomologieklassse  $d$  des Differenzkozyklus  $d(f|K^2, f'|K^2): d = c_1(\zeta') - c_1(\zeta)$ , d. i. die Differenz der Chernschen Klassen von  $\zeta'$  und  $\zeta$ . — Es ist bekannt (vgl. [H], S. 67), daß die „1. Hauptformel“ von E. Kundert (dies. Zbl. 43, 174) qualitativ, d. h. lediglich unter Benutzung einer etwas anderen Deutung der auftretenden Größen, ein Spezialfall der allgemeinen Formel für die Berechnung der (totalen) Chernschen Klasse eines Tensorprodukts von  $U(q)$ -Bündeln ist. Das Theorem 1 des Verf. gestattet — als eine Anwendung — zusammen mit der eben genannten Formel für die Chernschen Klassen die „1. Hauptformel“ von Kundert (l. c.) voll-inhaltlich herzuleiten. — Im abschließenden Theorem 3, dessen Beweis Verf. seiner Thesis (Leiden) vorbehält, gibt er eine neue Formulierung der „2. Hauptformel“ von Kundert (l. c.).

P. Dombrowski.



Shapiro, Arnold: Obstructions to the imbedding of a complex in a euclidean space. I: The first obstruction. Ann. of Math., II. Ser. 66, 256—269 (1957).

Soit  $K$  un complexe simplicial; on lui associe le complexe  $K^*$  formé des couples de simplexes  $(\sigma, \tau)$  tels que  $\sigma, \tau$  n'aient aucun sommet commun; l'espace sous-jacent  $K^*$  peut être considéré comme un rétracte par déformation du complémentaire de la diagonale dans le produit symétrique de  $K$  par lui-même. Soit donnée une application  $f$  de  $K$  dans l'espace euclidien  $R^n$ , telle que les images  $f(\sigma^{p-1})$ ,  $f(\tau^{n-p})$  soient disjointes si  $\sigma, \tau \in K^*$ ; alors, à tout  $n$ -simplexe  $(\sigma^p, \tau^{n-p})$  de  $K^*$ , on peut associer le nombre d'intersection des simplexes singuliers ouverts  $f(\sigma^p)$ ,  $f(\tau^{n-p})$ ; ainsi se trouve défini un cocycle  $m_n(f)$  sur  $K^*$ ; la classe de ce cocycle (à valeurs dans les entiers tordus) est indépendante de l'application  $f$ : l'A. montre qu'elle est égale à la  $n^{\text{ème}}$  puissance de la classe  $m_1$ , qu'on peut définir comme classe caractéristique du revêtement à deux feuillets  $K \times K - \Delta \rightarrow K^*$ . Ces classes  $m^n$  peuvent être considérées comme l'obstruction à plonger  $K$  dans  $R^n$ . En usant des méthodes de plongement de H. Whitney, l'A. montre que la nullité de  $m^{2n}$  est une condition nécessaire et suffisante pour plonger un  $n$ -complexe  $K$  dans  $R^{2n}$ ,  $n \geq 3$ . Le cas  $n = 2$  échappe à ces méthodes. Il est à noter qu'une théorie très analogue a été développée indépendamment par Wu Wen-Tsun. R. Thom.

James, I. M.: Whitehead products and vector-fields on spheres. Proc. Cambridge philos. Soc. 53, 817—820 (1957).

Si  $n + 1 = 16^a \cdot b \cdot c$ ,  $a \geq 0$ ,  $b$  impair,  $c = 1, 2, 4, 8$ , et si on pose  $u(n) = 8a + c - 1$ ,  $v(n) = 16^a \cdot c$ , il existe sur la  $n$ -sphère  $S_n$  un champ de  $r$ -repères si  $r \leq u(n)$ , mais non si  $r \geq v(n)$ : ainsi peut-on énoncer un résultat de Steenrod-Whitehead qui permet de donner la borne supérieure de  $r$  lorsque  $n \not\equiv -1 \pmod{16}$ . L'A. en tire de nombreux corollaires, dont le lemme: Si  $S_n$  a un  $r$ -champ,  $0 < r < n$ , et si  $\pi_{n-1}(S^{n-r-1})$  n'a pas d'élément d'ordre pair, alors  $S^n$  a un  $(r+1)$ -champ. Ainsi peut-on prouver une conjecture de J. P. Serre: il existe une infinité de valeurs de l'entier  $q$ , tel que le groupe stable  $\pi_{n+q}(S^n)$  ait un élément d'ordre pair. Désignons par  $j$  la classe de l'application identique de  $S^n$  sur elle-même, et soit  $r < n$ . On a le théorème: Si  $S^n$  admet un  $r$ -champ, alors le produit de Whitehead  $[j, j]$  est une  $r$ -suspension. Réciproquement, si  $[j, j]$  est une  $r$ -suspension, et si  $n > 2r$ , alors  $S^n$  admet un  $r$ -champ. La démonstration utilise la construction de Hopf. D'autres résultats intéressants sont en trop grand nombre pour être rapportés ici. R. Thom.

Švare (Schwarz), A. S.: The genus of fiber space. Doklady Akad. Nauk SSSR 119, 219—222 (1958) [Russisch].

Zu jedem Faserraum  $(E, B, F, p)$  wird ein Geschlecht  $g(F, B, F, p)$  definiert, welches die kleinste Mächtigkeit derjenigen Überdeckung von  $B$  ist, derart, daß über jedem Element dieser Überdeckung eine Schnittfläche existiert. Über dieses Geschlecht, welches naturgemäß in enger Beziehung zum Ljusternik-Schnirelmannschen Kategorienbegriff steht, werden eine Reihe von Sätzen angegeben. Z. B.: (1) Ist  $f: E \rightarrow E'$  so beschaffen, daß  $p'f = p$  ist, dann ist  $g(E', B, F', p') \leq g(E, B, F, p)$ . (2) Sind  $\mathfrak{B} = (E, B, G, p)$  und  $\mathfrak{B}_1 = (E_1, B_1, G, p_1)$  zwei Hauptfaserräume und ist  $f$  eine zulässige Abbildung (d. h. fasertreu) von  $\mathfrak{B}$  in  $\mathfrak{B}_1$ , so ist  $g(E, B, G, p) \leq g(E_1, B_1, G, p_1)$ . (3)  $g(E, B, F, p) \leq \text{cat } B$ . (4) Seien  $x_1, \dots, x_n \in H^*(B, G)$  (= dem Kohomologieren von  $B$  mit geeignetem Koeffizientenbereich),  $p^*x_1 = \dots = p^*x_n = 0$ ,  $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \neq 0$  dann ist  $g(E, B, F, p) \geq m + 1$ . Zu jedem  $n$  und zu jeder Gruppe  $G$  wird ein universeller Hauptfaserraum  $\mathfrak{S} = (E_n(G), B_n(G), G, p_n)$  konstruiert,  $g(\mathfrak{S}) \leq n$ , so daß sich jeder  $\mathfrak{B} = (E, B, G, p)$  in zulässiger Weise in  $\mathfrak{S}$  abbilden läßt ( $g(\mathfrak{B}) = n$ ). Es werden ferner Klassifikationssätze über Faserräume, und klassifizierende Räume angegeben, sowie gewisse charakteristische Kohomologieklassen. Dieser Geschlechtsbegriff scheint einen wichtigen Beitrag zum

Klassifikationsproblem der Faserräume zu liefern. Die Note enthält nur an einigen Stellen äußerst knappe Beweisgedanken. Es steht zu hoffen, daß bald eine ausführliche Darstellung dieser offenbar recht inhaltsreichen Theorie erscheint.

*F. W. Bauer.*

**Hu, Sze-Tsen:** On fiberings with singularities. Michigan math. J. 6, 131—149 (1959).

A general definition of fiberings with singularities is given:  $p: X \rightarrow B$  is a fiber map with singularities  $A \subset B$  whenever  $p$  is onto and  $(X - p^{-1}(A), p|_{X - p^{-1}(A)}; B - A)$  is a Serre fiber space; for each  $a \in A$ ,  $p^{-1}(a)$  is called a singular fiber. If  $A \subset B$  is closed, and  $H$  is the quotient space obtained by identifying each singular fiber of  $p$  to a point,  $p$  factors into  $X \xrightarrow{p_2} H \xrightarrow{p_1} B$  where each non-singular fiber of  $p_2$  and each singular fiber of  $p_1$  is a single point; since  $p_2$  is the natural projection, the author thereafter considers only fiberings with each singular fiber a single point. An example applicable to his theory of local invariants is studied in detail: Recall that for an arc-connected space  $Y$ , he defines the tangent space  $T(Y, y_0)$  of  $Y$  at  $y$  as  $\{\alpha \in Y^I | \alpha(0) = y_0, \alpha^{-1}(y_0) = 0\}$  equipped with the compact-open topology, and the local properties of  $Y$  at  $y_0$  to be the corresponding (global) properties of  $T(Y, y_0)$ . It is shown that the extended tangent space  $E(Y, y_0) = \alpha_0 \cup T(Y, y_0)$  [ $\alpha_0(I) = y_0$ ] with the natural projection is a fiber space over  $Y$  with the single singularity  $y_0$ , and that this fiber map induces a homotopy equivalence of  $T(E(Y, y_0), \alpha_0)$  with  $T(Y, y_0)$ . The local properties of a fibering  $p: X \rightarrow B$  around an isolated singularity  $b_0$  with  $p^{-1}(b_0) = x_0$ , a single point, are studied.  $b_0$  is called normal if the induced  $\hat{p}: T(X, x_0) \rightarrow T(B, b_0)$  is a (non-singular) fibering, and a sufficient (but not necessary) condition for normality is given. For normal  $b_0$  the local homotopy (homology) properties of  $X$  at  $x_0$  and  $B$  at  $b_0$  are evidently related by the exact (spectral) sequence of this fiber space; examples are given. Finally, the author shows that the theory of Serre fiber spaces is included in the theory of fiber spaces having exactly one normal singularity: given a fiber space  $(X, p, B)$ , the cone construction yields the fiber map  $p_c: c(X) = c(B)$  having the "vertex"  $c_0$  as sole normal singularity;  $\hat{p}_c|_{T(c(X), c'_0)}$  is shown to be essentially the fiber map  $p$ , in the sense that  $X, B$  can be identified with strong deformation retracts of  $T(c(X))$ ,  $T(c(B))$  such that  $\hat{p}_c|_X = p$  and with the obvious commutativity holding under the deformation retractions.

*J. Dugundji.*

**Reeb, Georges:** Structures feuilletées. Notas Mat. Nr. 12, 70 p. (1958) [Portugiesisch].

These lectures cover more or less the same ground as the author's thesis (the second part of the book "Sur les espaces fibrés et les variétés feuilletées" by Went-sun Wu and the author, s. this Zbl. 49, 126). The stability theorems are proved in a more neat way using the concept of holonomy group of Ehresman.

*M. M. Peixoto.*

**Harary, Frank:** On the group of the composition of two graphs. Duke math. J. 26, 29—36 (1959).

A graph  $G$  is an irreflexive symmetric binary relation  $\varrho$  ( $\varrho$  is the set of unordered pairs) on a finite set  $P$  and its group  $\mathfrak{G}$  is the permutation group of all automorphisms of  $G$ . The composition  $G = G_1[G_2]$  of graphs  $G_1$  and  $G_2$  is defined as follows:  $P = P_1 \times P_2$  and  $[(a_1, a_2), (b_1, b_2)] \in \varrho$  if and only if either  $(a_1, b_1) \in \varrho_1$  or  $a_1 = b_1$  and  $(a_2, b_2) \in \varrho_2$ . The first theorem:  $\mathfrak{G}$  is permutationally equivalent to the Pólya's „Gruppenkranz“  $\mathfrak{G}_1[\mathfrak{G}_2]$  of  $\mathfrak{G}_1$  and  $\mathfrak{G}_2$  (see this Zbl. 17, 232) if and only if not both graphs  $G_1$  and  $G_2$  are complete [ $G_1$  is complete if  $(a_1, b_1) \in \varrho_1$  for all  $a_1, b_1 \in P$ ,  $a_1 \neq b_1$ ], is false e. g. for disconnected and non complete graphs  $P_1 = \{a, b, c\}$ ,  $\varrho_1 = \emptyset$  and  $P_2 = \{p, q, r\}$ ,  $\varrho_2 = \{(p, q)\}$ . The second theorem concerns the group of product  $G = G_1 \times G_2$  of graphs introduced by G. Sabidussi

(see this Zbl. 79, 392) as follows:  $P = P_1 \times P_2$  and  $[(a_1, a_2), (b_1, b_2)] \in \varrho$  if and only if either  $a_1 = b_1$  and  $(a_2, b_2) \in \varrho_2$  or  $(a_1, b_1) \in \varrho_1$  and  $a_2 = b_2$ . *K. Čulík.*

**Sabidussi, Gert:** On the minimum order of graphs with given automorphism group. *Monatsh. Math.* **63**, 124—127 (1959).

A graph  $X$  is a finite set  $V(X)$  together with a set  $E(X)$  of unordered pairs of distinct elements of  $V(X)$ . Given a finite group  $G$  let  $\alpha(G)$  be the minimum of  $\text{card } V(X)$  for all graphs  $X$ , the group of automorphisms of which is isomorphic to  $G$ . Further let  $m$  resp.  $n$  denote the order resp. the minimal number of generators of  $G$ . By using the results and by refining the method of R. Frucht (this Zbl. 34, 258, second review), there are given complete constructions proving the following theorems: 1.  $\alpha(G) = O(m \log n) = O(m \log \log m)$ , 2. For cyclic group  $Z_m$  of order  $m$  is valid  $\alpha(Z_m) = 2$ , if  $m = 2$ ;  $= 3m$ , if  $m = 3, 4, 5$ ;  $= 2m$ , if  $m = p^e \geq 7$ , where  $p$  is prime and  $\alpha(Z_m) = \alpha(Z_{p_1^{e_1}}) + \dots + \alpha(Z_{p_r^{e_r}})$ , if  $m = p_1^{e_1} \dots p_r^{e_r}$ , where  $p_1, \dots, p_r$  are distinct primes. *K. Čulík.*

**Sedláček, Jiří:** Über die Konstruktion gerichteter Graphen. *Pokroky Mat. Fys. Astron.* **3**, 273—276 (1958) [Tschechisch].

Es sei  $G$  ein endlicher und gerichteter Graph und  $\psi(G) = \sum_{\substack{i=1 \\ t_i > 0}}^n t_i$ ,  $t_i = r_i - s_i$ ,

wobei  $r_i$  bzw.  $s_i$  die Anzahl der verschiedenen Kanten ist, die im Knotenpunkt  $x_i$  enden bzw. beginnen.  $G$  ist „im gleichen Gewicht“ (dieser Begriff stammt von A. Kotzig), wenn  $r_i = s_i$  für alle Knotenpunkte  $x_i$  gilt. Es wird der bekannte Satz vom Listing-Lucas auf gerichtete Graphen in folgender Form übertragen: Ist keiner der zusammenhängenden Bestandteile des Graphen  $G$  im gleichen Gewicht, so gilt: a) Es gibt ein solches System  $S_p$  von offenen kontinuierlich gerichteten Kantenzügen in  $G$ , daß jede Kante aus  $G$  gerade einem einzigen von ihnen angehört. b) Für jedes System  $S_p$  gilt  $p \geq \psi(G)$  und es gibt ein solches  $S_{p_0}$ , daß  $p_0 = \psi(G)$ . *K. Čulík.*

## Theoretische Physik.

● **Emel'janov, V. S.** (verantwortlicher Redakteur): **Kurze Enzyklopädie „Atomenergie“.** [Kratkaja énciklopedija „atomnaja energija“.] Moskau: Wissenschaftlicher Staatsverlag „Große Sowjetenzyklopädie“ 1958. 612 S. R. 24,— [Russisch].

● **Atkin, R. H.:** **Mathematics and wave mechanics.** With a foreword by H. T. Flint. Reprinted with corrections. Melbourne-London-Toronto: William Heineman Ltd. 1959. XV, 348 p. 30 s. net.

Die erste Auflage wurde in diesem Zbl. 70, 404 angezeigt.

● **Wigner, Eugene P.:** **Group theory and its application to the quantum mechanics of atomic spectra.** Transl. from the German by J. J. Griffin. With additions and corrections by Eugene P. Wigner. (Pure appl. Phys., Vol. 5.) New York: Academic Press Inc., Publ.; London: Academic Books Ltd. 1959. XI, 372 p. \$ 8,80, 80 s.

Als das vorliegende Buch 1931 erstmalig publiziert war (vgl. dies. Zbl. 1, 374), hatte erst ein sehr kleiner Teil der Physiker mit der Algebra Bekanntschaft geschlossen und nur wenige konnten die Methoden der Gruppentheorie ihren Überlegungen nutzbar machen. Im großen und ganzen herrschte in den folgenden Jahren eine erhebliche Resistenz gegenüber dieser mathematischen Disziplin und selbst heute beenden jährlich viele Studenten ihr Physikstudium, ohne mit der Algebra in Berührung gekommen zu sein. Ein Blick in das physikalische Schrifttum zeigt jedoch deutlich, daß die moderne Physik nicht auf das Hilfsmittel der Gruppentheorie verzichten darf, und so kann die Neuauflage des bedeutenden Werkes von Wigner nicht hoch genug eingeschätzt werden. Wigners Buch ist speziell auf die Atomspektren zugeschnitten, allein gewinnt man genügend Hilfsmittel auch für andere Anwendungs-



bereiche. Die Übersetzung ist im Gegensatz zur ersten Ausgabe nur unwesentlich geändert. Erfreulich ist, daß jetzt die „richtige“ Schrödinger-Gleichung —  $\hbar/i \partial\Psi/\partial t = H\Psi$  verwendet wird. Neu hinzugefügt hat Wigner drei Kapitel, die der Entwicklung seit 1931 Rechnung tragen: Racahkoeffizienten, Zeitumkehr und ein Originalbeitrag (bisher nicht publiziert) über die physikalische Interpretation und die klassischen Grenzen der Darstellungskoeffizienten (Racah etc.). *W. Klose.*

● **Cheng, David K.:** *Analysis of linear systems.* (Addison-Wesley Series in Electrical Engineering.) Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1959. XIII, 431 p. \$ 8,50.

Im ersten Kapitel des Buches werden zunächst die charakteristischen Eigenschaften linearer Systeme sowohl vom physikalischen als auch vom mathematischen Standpunkt aus besprochen. In mathematischer Hinsicht werden hier vor allem die linearen Differentialgleichungen erörtert und im nachfolgenden zweiten Kapitel die klassischen Lösungsmethoden für sie mitgeteilt. Es werden dann die Grundgleichungen der linearen elektrischen Stromkreise aufgestellt, bei denen die Voraussetzung erfüllt ist, daß sich ihre elektrischen und magnetischen Eigenschaften mit hinreichender Genauigkeit durch konstante Widerstände, Kapazitäten und Induktivitäten wiedergeben lassen. Im anschließenden vierten Kapitel wird auch auf solche linearen Systeme eingegangen, die anderen physikalischen Gebieten angehören wie etwa der Mechanik und der Wärmelehre. In den vier nächsten Kapiteln fünf bis acht kommen die Fourierschen Reihen, die Fourier-Integrale und die Laplace-Transformation zur Sprache. Es werden die Begriffe des Einheitsschritts und des Einheitsimpulses erläutert und die entsprechenden Integraldarstellungen hergeleitet. Die drei letzten Kapitel gelten dem Studium zeitlich veränderlicher Vorgänge in Stromkreisen mit Rückkopplung oder mit stetig verteilten Leitungskonstanten. Hier lohnt es sich, die Ausführungen im Kapitel zehn hervorzuheben. Sie gelten in dem Falle, daß die Speisung der Stromkreise durch regelmäßige, sehr kurzzeitige Impulse (Linear Sampled Data Systems) erfolgt. Sehr lesenswert sind auch die in diesem Teil untergebrachten Abschnitte über periodische Einschaltvorgänge, über das Routh-Hurwitz- und das Nyquist-Kriterium. Das Buch ist klar und einfach geschrieben und dürfte sich vor allem für die angehenden Elektro-Ingenieure zur Einführung in die Theorie linearer Systeme hervorragend eignen. *H. Buchholz.*

### Elastizität. Plastizität:

● **Filonenko-Borodič, M. M.:** *Elastizitätstheorie.* [Teorija uprugosti.] 4. überarb. und erg. Aufl. Moskau: Staatsverlag für physikalisch-mathematische Literatur 1959. 364 S. R. 7,35 [Russisch].

Ce livre représente une édition revue et augmentée du manuel publié par l'A. il y a quelques années. Après une courte introduction, on présente la théorie des tensions et des déformations élastiques ainsi que la loi généralisée de Hooke; à l'aide de ces résultats on passe à la formulation du problème générale en déplacements (équations de Lamé) et en tensions (équations de Beltrami-Mitchel). On présente des théorèmes généraux et on résolve quelques problèmes particuliers. Le problème plan de la théorie de l'élasticité est étudié en coordonnées cartésiennes et en coordonnées polaires; différentes applications importantes s'ensuivent. La torsion et la flexion de la barre droite sont traitées séparément. On donne quelques méthodes générales pour la solution du problème général tridimensionnel, en insistant spécialement sur la méthode de Boussinesq. Le problème des plaques planes est étudié à l'aide de l'hypothèse de Kirchhoff. Enfin l'A. présente des méthodes variationnelles pour résoudre les problèmes de la théorie de l'élasticité (les équations variationnelles de Lagrange et de Castigliano); on donne une application pour le problème de Lamé (le parallélépipède élastique, les études personnelles de l'A.). Le livre peut être utilisé avec succès dans l'enseignement technique supérieur. *P. P. Teodorescu.*

Olszak, W. and P. Perzyna: Criteria of validity of variational theorems in mechanics of inelastic non-homogeneous anisotropic deformable bodies. Arch. Mech. stosow. 10, 559—567, russ. Zusammenfassg. 568 (1958).

The well-known variational principles of homogeneous, isotropic inelastic media are extended to non-homogeneous anisotropic media by the introduction of generalized potentials and their expansion into Taylor series, similar to the procedure used in deriving these principles for isotropic media. *A. M. Freudenthal.*

Zawadzki, Jerzy: Beitrag zur Deformationshypothese der sphärischen Polymeren. Z. angew. Math. Mech. 38, 337—343 (1958).

An attempt is made to modify the Kuhn-Guth-Treloar theory of rubberelasticity based on the change of "configurational entropy" by the consideration of additional terms representing "entropy of volume change", as well as the effects of inhomogeneity and imperfection of chain-structures on the internal energy.

*A. M. Freudenthal.*

Srinivasan, R.: Elastic constants of calcium fluoride. Proc. phys. Soc. 72, 566—575 (1958).

Employing Born's theory of crystal lattices, the elastic constants of fluorspar have been evaluated theoretically. Besides the coulomb forces, repulsive forces between nearest neighbour calcium and fluorine atoms and fluorine-fluorine atoms have been assumed. The experimental values of  $c_{11}$ ,  $c_{12}$  and  $c_{44}$  are in fair agreement with the theoretically calculated values.

*Aus der Zusammenfassg. des Autors.*

Zanaboni, Osvaldo: Qualche considerazione sui fenomeni detti di instabilità progressiva. Rend. Sem. mat. fis. Milano 28, 36—60 (1959).

L'A. considera un sistema deformabile le cui configurazioni possano caratterizzarsi mediante un parametro  $\eta$  e le forze esterne siano proporzionali ad un parametro  $\lambda$ ; ad ogni valore di  $\eta$  si abbia equilibrio per un corrispondente valore  $\lambda(\eta)$ . La funzione  $\lambda = \lambda(\eta)$  crescente per piccoli valori di  $\eta$ , presenti almeno un massimo dove  $\eta = \eta_m$ ,  $\lambda_m = \lambda(\eta_m)$ . Se il sistema viene portato su questa posizione (cioè  $\eta = \eta_m$ ,  $\lambda = \lambda_m$ ), che è di equilibrio labile, si manifesta l'instabilità progressiva in quanto il sistema tende a portarsi nella posizione di equilibrio stabile per cui  $\lambda$  ha ancora il valore  $\lambda_m$ , o a rompersi se quest'ultima posizione non esiste. L'A. illustra le sue considerazioni con numerosi esempi. Infine dimostra come certi fenomeni di instabilità o di deformazioni infinite possano essere eliminati evitando alcune ipotesi semplificatrici.

*D. Graffi.*

Chattarji, P. P.: Torsion of a circular cylinder having a rigid spherical inclusion. Bull. Calcutta math. Soc. 49, 199—205 (1957).

This paper is concerned with the torsion problem for an infinitely long isotropic circular cylinder having a symmetrically located rigid spherical inclusion. Instead of using the usual stress function for torsion, as done by C. B. Ling (this Zbl. 46, 411), the author approaches the problem by using the differential equation for the angular rotation  $\Phi$  of an elemental ring of radius  $r$  in a cross section of the solid (Timoshenko and Goodier, Theory of elasticity, this Zbl. 45, 264). The boundary conditions take the forms  $\Phi = 0$  on the surface of the inclusion and  $\partial\Phi/\partial r = 0$  on the entire external surface of the cylinder. By expressing the differential equation in cylindrical and spherical polar coordinates the modified Bessel's functions and associated Legendre's functions both of order one are obtained, respectively. Ling's procedure leads to the same functions but of order two. There are two misprints in Legendre's associated equation (14) p. 201 of the paper. The differential coefficients  $d^2G/d\varrho^2$  and  $dG/d\varrho$  entering in it must be replaced by  $d^2G/d\omega^2$  and  $dG/d\omega$ , respectively. The author constructs a solution  $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1$  where  $\Phi_0$  is the solution for an infinite solid circular shaft without inclusion and  $\Phi_1$  is an auxiliary solution which satisfies the condition that  $\partial\Phi_1/\partial r = 0$  on the surface of the cylinder. The function  $\Phi_1$  is expressed as an infinite sum of Legendre's associated functions of the first kind of degree  $n$  and order one. The condition that  $\Phi$  vanishes on the surface of the inclusion



leads to an infinite set of linear equations in the parametric coefficients involved in the infinite sum. As done by Ling, this system of equations is solved by successive approximations. No proof is given to establish the convergence of the obtained solution. The effect of inclusion on the angle of twist is investigated. An expression is given for the shear stress across the minimum section and a table presented to show the variation of shear stress over this section corresponding to various values of the ratio  $\lambda$  between the radius of inclusion and radius of cylinder ( $\lambda = 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}$  and  $\frac{1}{2}$ ). It is found that the maximum shear stress occurs on the external boundary across the minimum section. It may be worthy of mention that S. B. Dutt [J. Technol. 3, 13—17 (1958)] has discussed the stress concentration around a small spherically isotropic spherical inclusion on the axis of an isotropic circular cylinder in torsion while S. Chandra Das (this Zbl. 56, 181) has already dealt with the isotropic spherical or spheroidal inclusion.

*W. A. Bassali.*

**Mitchell, T. P.:** The nonlinear bending of thin rods. J. appl. Mech. 26, 40—43 (1959).

Usando l'equazione non lineare dell'elastica, l'A. determina la forma di una trave inizialmente rettilinea o ad arco circolare, incastrata ad un estremo, sottoposta ad un carico di direzione generica concentrato nell'estremo libero. Le equazioni parametriche della direttrice della trave deformata sono espresse mediante funzioni ellittiche. Viene anche esaminato e risolto il caso di una distribuzione continua del carico con legge sinusoidale, e quello di un carico uniforme normale alla trave.

*T. Manacorda.*

**Zanaboni, Osvaldo:** Soluzione mediante serie delle travi snelle pressoinflesse. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 44, 293—315 (1957).

On étudie les poutres soumises en même temps à des forces transversales et axiales. En utilisant de l'orthogonalité des fonctions propres de l'équation de l'équilibre dans le cas, où il n'y a pas de forces transversales, l'A. déduit le développement en série de la solution du problème. Pour le calcul des coefficients, il applique le principe des travaux virtuels en forme variationnelle. La méthode reste valable dans le cas des poutres simplement fléchies. Deux exemples sont traités numériquement.

*M. Haimovici.*

**Ambareumjan, S. A. und D. V. Peštmaldžjan:** Zur Theorie der orthotropen Schalen und Platten. Akad. Nauk Armjan. SSR, Izvestija, Ser. fiz.-mat. Nauk 12, Nr. 1, 43—59 (1959) [Russisch].

In dieser Arbeit werden Lösungen angegeben für dünne orthotrope Schalen, und zwar für die Gleichungen der Schalentheorie mit großen Wölbungsziffern (nach A. L. Goldenveizer, „Theorie dünner, elastischer Schalen“ dies. Zbl. 52, 419) und für beliebige Verteilungsfunktionen der Schubspannungen  $\tau_{\alpha\gamma}$  und  $\tau_{\beta\gamma}$  längs der Normalen zur Mittelfläche, im Zusammenhange mit einer früheren Arbeit von S. A. Ambareumjan [Priklad. Mat. Mech. 22, 226—237 (1958)]. Es werden Grundgleichungen vorgeführt, in denen willkürliche Volumkräfte  $X, Y, Z$  auftreten. Dann werden diese Gleichungen in einigen Sonderfällen mittels geeigneter Spannungsfunktionen gelöst, nämlich: Schalen positiver Gaußscher Krümmung, rechteckig und kreisförmig im Querschnitt, mit sinusoidaler Belastung und unter Annahme parabolischer Verteilung der Schubspannungen  $\tau_{\alpha\gamma}$  und  $\tau_{\beta\gamma}$  längs der Schalendicke. Insbesondere werden Kugel- und Zylinderschalen wie auch Platten in Anspruch genommen. Als Randbedingungen wurden freigestützte, eingespannte und freie Ränder in den Rechnungen benutzt. Die Rechnungen wurden unter Annahme folgender Werte von  $E/G' = 0, 2, 5, 10$  durchgeführt, wobei zu bemerken ist, daß der Wert 0 (oder  $G' = \infty$ ) dem Ansatz von Kirchhoff entspricht. Die errechneten Zahlenwerte sind in Zahlentafeln zusammengestellt worden.

*J. Naleszkiewicz.*

**Bassali, W. A.:** Thin circular plates supported at several points along the boundary. Proc. Cambridge philos. Soc. 53, 525—535 (1957).



The supports being symmetrically situated with respect to the common diameter of the plate and the excentric circle solutions have been obtained in the cases of (1) uniform line loading distributed along the circumference of the excentric circle, and (2) when the load intensity on the plate is given by  $p = p_0 R^{s-2}$ , ( $s \geq 2$ ) and by  $p = p_0 R^{s-3} \cos \Theta$ , ( $s \geq 3$ );  $R, \Theta$  being the polar coordinates of a point with the centre of the excentric circle as origin. The case of a circular plate loaded by a concentrated couple at any point and that of a circular plate concentrically loaded have also been discussed. The results obtained previously by the author in Proc. Cambridge philos. Soc. 52, 734—741 (1956) and together with Dawoud, *ibid.* pp. 584—598 (1956) by Muskhelishvili's complex variable methods have been used. Particular cases from results derived in the paper have been shown to tally with well known results of Nadai and DeBeer, obtained by other methods. In conclusion a disagreement with Timoshenko's result has been mentioned though the comparative discussion has not been done.

S. C. Das.

Frame, J. S.: Eine Lösung in Kettenbrüchen für die Kármánsche Theorie der Rohrbiegung. Österreich. Ingenieur-Arch. 12, 95—101 (1958).

Th. v. Kármán hat 1911 eine Lösung für die Biegung eines gekrümmten dünnwandigen Rohres angegeben. Dort ist ein Faktor  $\kappa$  für die Verminderung des Biegemomentes eingeführt worden. Für diesen Verminderungsfaktor schlägt Verf. ziemlich einfache Formeln mittels Kettenbrüchen vor. Er gibt auch eine Rekursionsformel für  $\kappa$  an, die zu einer Differenzengleichung führt. Diese Überlegungen erlauben eine Reihenentwicklung für kleine Werte von  $\kappa/h$  abzuleiten, deren Konvergenz jedoch nicht bewiesen wird.

J. Naleszkiewicz.

Krischer, Otto und Werner Kast: Wärmeübertragung und Wärmespannungen bei Rippenrohren. VDI-Forschungsh. 25, Nr. 474, 58 S. (1959).

Kurth, Friedrich: Spannungsuntersuchung an Kreisringscheiben. Wiss. Z. Hochschule Schwermaschinenbau Magdeburg 3, 39—62 (1959).

In der Veröffentlichung werden die in Baggerunterbauten vorhandenen Kreisringträger nach der Theorie des geraden Stabes (lineare Normalspannungsverteilung) untersucht. Zentralsymmetrische und zu einem Durchmesser antimetrische Belastungen werden dabei durch Fourierentwicklungen dargestellt. Die Arbeit hat das Ziel, für die behandelten Kreisringträger Vergleichswerte zu schaffen, um die Anwendbarkeit der Theorie des geraden Stabes gegenüber den Theorien des gekrümmten Stabes und der Kreisringscheibe — diese Untersuchungen sollen in späteren Arbeiten durchgeführt werden — abzugrenzen. Der Titel der vorliegenden Abhandlung ist unzutreffend, da Kreisringscheiben nicht behandelt werden.

D. Rüdiger.

Teodorescu, Petre P.: Sur le problème plan de l'élasticité de certains corps anisotropes. I: Relations entre tensions et déformations spécifiques. II: Corps à isotropie transverse. III: Les corps orthotropes. IV: Les corps à plan de symétrie élastique. V: Les corps à un axe de symétrie du troisième ordre. VI: Les corps avec un axe de symétrie élastique du quatrième ordre. Comun. Acad. Republ. popul. Romîne 7, 395—400, 401—406, 503—508, 509—513, 641—647, 753—758, russ. und französ. Zusammenfassg. 399—400, 405, 507—508, 513, 646—647, 757 (1957) [Rumänisch].

Dans la première Note, l'A. — après avoir passé en revue les différentes formes sous lesquelles on exprime de coutume la loi généralisée de Hooke pour les corps anisotropes — déduit une nouvelle forme de cette loi, en appliquant le principe de la superposition des effets, à savoir:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x} - \frac{\mu_{xy}}{E_y} \sigma_y - \frac{\mu_{xz}}{E_z} \sigma_z + \frac{\eta_{xy, yz}}{G_{yz}} \tau_{yz} + \frac{\eta_{x, zz}}{G_{zx}} \tau_{zx} + \frac{\eta_{x, zy}}{G_{zy}} \tau_{zy}, \dots$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\eta_{y, zx}}{E_x} \sigma_x + \frac{\eta_{yz, y}}{E_y} \sigma_y + \frac{\eta_{yz, z}}{E_z} \sigma_z + \frac{\tau_{yz}}{G_{yz}} + \frac{\gamma_{yz, zx}}{G_{zx}} \tau_{zx} + \frac{\gamma_{yz, zy}}{G_{zy}} \tau_{zy}, \dots$$

les expressions pour  $\varepsilon_y, \varepsilon_z$  et  $\gamma_{zx}, \gamma_{zy}$  ayant des formes analogues. Ces formules

constituent le point de départ pour les Notes ultérieures, dans lesquelles on étudie des cas particuliers d'anisotropie. Ainsi, dans la II-ème Note on traite des corps à isotropie transverse, soumis à l'état de tension plane ou de déformation plane. La fonction d'Airy  $F(x, z)$  doit satisfaire à l'équation

$$(s_1 \partial/\partial x + i \partial/\partial z) (s_1 \partial/\partial x - i \partial/\partial z) (s_2 \partial/\partial x + i \partial/\partial z) (s_2 \partial/\partial x - i \partial/\partial z) F = 0,$$

les  $s_i$  étant des constantes élastiques. Il en résulte que l'intégrale générale peut être représentée à l'aide de quatre fonctions de variable complexe:

$$F(x, z) = \varphi(x + i s_1 z) + \psi(x - i s_1 z) + \chi(x + i s_2 z) + \kappa(x - i s_2 z).$$

Des considérations similaires sont faites pour les corps orthotropes (III-ème Note), pour les corps admettant un plan de symétrie élastique (IV-ème Note), pour les corps à un axe de symétrie du troisième ordre (V-ème Note) et pour les corps avec un axe de symétrie élastique du quatrième ordre (VI-ème Note). *Dan Gh. Ionescu.*

**Meškov, A. I.:** Das Gleichgewicht eines elastischen Parallelepipeds. Vestnik Moskovsk. Univ., Ser. Mat. Mech. Astron. Fiz. Chim. 12, Nr. 2, 35—43 (1957) [Russisch].

L'A. étudie l'équilibre élastique d'un parallélépipède élastique oblique, en utilisant les coordonnées obliques. De même que Filonenko-Borodič pour le parallélépipède droit, l'A. emploie la méthode variationnelle de Ritz et donne des résultats pour les premières approximations. *P. P. Teodorescu.*

● **Parkus, Heinz:** Instationäre Wärmespannungen. Wien: Springer-Verlag 1959. V, 166 S. mit 34 Textabb. Ganzln. DM 38,—.

Das Buch „Instationäre Wärmespannungen“ ist eine Fortsetzung der von E. Melan und H. Parkus verfaßten Monographie „Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder“ (Wien 1953). Beide Bücher gemeinsam geben eine gedrängte, aber gleichzeitig volle Darstellung der Grundlagen der Theorie der Wärmespannungen. Während Verf. sich in dem ersten Buch auf die Untersuchung von Spannungen in homogenen und voll-elastischen Körpern beschränkten, bei denen die Voraussetzungen des Hookeschen Gesetzes erfüllt waren, so wurde im vorliegenden Buch ein Grundriß über instationäre Spannungen auch in visko-elastischen und elasto-plastischen Körpern gegeben. Im ersten Abschnitt werden Gleichungen der Thermoelastizität unter den klassischen Voraussetzungen der linearen Elastizitätstheorie und der Unabhängigkeit der Materialkonstanten (elastischer und thermischer Art) von der Temperatur angegeben. Der Abschnitt behandelt die allgemeinen Zusammenhänge zwischen Spannungszustand, Verzerrungszustand und Temperaturfeld, Verschiebungsgleichungen der Bewegung, grundlegende Behauptungen energetischer Art sowie eine Lösungsmethode, die auf der Einführung des thermo-elastischen Verschiebungspotentials beruht und auch Lösungen, die die Randbedingungen korrigieren. Drei weitere Abschnitte sind den quasi-statischen Problemen gewidmet, also solchen Lösungen thermo-elastischer Gleichungen, in denen Beschleunigungen der Verschiebungen außer acht bleiben. Diese Voraussetzungen, die bei langsam sich ändernden Verschiebungen der Temperaturfelder ihre Berechtigung haben, fallen im fünften Abschnitt fort, in welchem die dynamischen Einflüsse in eingehender Weise besprochen werden. Großen Wert legt Verf. auf exakte Lösungen. Ausführlich wurde das Problem der im elastischen Raum und Halbraum tätigen Wärmequellen, die Wärmeeexposition in der den elastischen Halbraum begrenzenden Ebene und die Abkühlung hohler und voller Zylinder (von endlicher und unendlicher Länge), sowie die der Kugeln und Scheiben besprochen. Viel Aufmerksamkeit wurde den durch das Temperaturfeld hervorgerufenen Spannungen gewidmet, die sich zeitlich in periodischer Weise ändern sowie der auf der Oberfläche des Körpers mit konstanter Geschwindigkeit sich bewegenden Wärmequelle. Äußerst interessant ist der Abschnitt, der folgende Probleme behandelt: Lösung dynamischer Thermoelastizitätsgleichungen, elastische Wellen,



hervorgerufen durch plötzliche Erwärmung des elastischen Halbraums, plötzliches Erscheinen von Wärmequellen im unbegrenzten Körper und in einer unbegrenzten Scheibe, Querschwingungen von Balken und Platten, hervorgerufen durch Einwirkung des Wärmeshocks. Die beiden letzten Abschnitte befassen sich mit thermischen Spannungen in visko-elastischen und elasto-plastischen Körpern. Diese Probleme, die in den letzten Jahren im Mittelpunkt des Interesses standen, haben eine große Bedeutung bei Untersuchungen von Spannungen bei erhöhten Temperaturen. Den Abschluß der Arbeit bildet ein umfangreiches Literaturverzeichnis. Die Monographie gibt eine umfassende Übersicht über Probleme und Arbeiten auf dem Gebiet der Thermoelastizität bis zum Jahre 1959. In gedrängter, aber klarer Form gehalten, umfaßt sie erstmalig die im Schrifttum vorhandenen Lösungsmethoden. Die Einheitlichkeit der methodischen Darstellung und die Präzision des mathematischen Apparates verdienen besonders hervorgehoben zu werden.

*Witold Nowacki.*

**Landau, H. G. and J. H. Weiner:** *Transient and residual stresses in heat-treated plates.* J. appl. Mech. **25**, 459—465 (1958).

For an elastic-plastic plate with temperature-distribution varying arbitrarily in the direction normal to the faces as well as in time the equations for transient and for residual stresses are derived on the basis of the Prandtl-Reuss relations and the v. Mises yield-condition. The equations are integrated and applied to the solution of the problem of rapid surface cooling of a heated plate. Stress-distribution sequence and residual stresses are obtained by numerical methods for several values of cooling rate and yield stress.

*A. M. Freudenthal.*

**Piechocki, Władysław:** *The stresses in an infinite wedge due to a heat source.* Arch. Mech. stosow. **11**, 93—108, russ. Zusammenfassg. 109 (1959).

Through the point source an arc is drawn to divide the wedge into two regions and thus the nonhomogeneous differential equation has been replaced by a system of two homogeneous equations with additional conditions for the temperature along the dividing arc. Continuity of displacements along it is taken and to make the edges free from stresses Airy function method is adopted. The stress function is expressed in the form of Fourier integral of a linear combination of eight particular integrals. In particular case, agreement with previously obtained results has been pointed.

*S. C. Das.*

**Piechocki, Władysław:** *The stresses in an infinite wedge due to a nucleus of thermoelastic strain.* Arch. Mech. stosow. **11**, 211—220, russ. Zusammenfassg. 220—221 (1959).

The component due to nucleus of thermoelastic strain in the equation of equilibrium is represented in the form of Fourier-Bessel series. The potential of thermoelastic displacement is expressed in closed form. The Green's functions of the problem are then obtained, following the method of the previous paper.

*S. C. Das.*

**Sokołowski, Marek:** *The axially symmetric thermoelastic problem of the infinite cylinder.* Arch. Mech. stosow. **10**, 811—824, russ. Zusammenfassg. 824 (1958).

In der Arbeit wurden die Greenschen Funktionen für Ring- und Radialspannungen, die durch die Wirkung der Kerne der thermo-elastischen Deformation und durch die Wärmequellen hervorgerufen werden, dargestellt. Die Lösung erhielt man unter Anwendung der Fourierschen Integrale und der endlichen Hankelschen Transformation in Gestalt von Reihen und konvergenten uneigentlichen Integralen. Die erhaltenen Greenschen Funktionen gestatten die Bestimmung der durch das axial-symmetrische Temperaturfeld hervorgerufenen Spannungen.

*Witold Nowacki.*

• **Schnell, W. und G. Fischer:** *Berechnung der Beulwerte von Platten unter ungleichmäßiger Temperaturbeanspruchung nach dem Mehrstellenverfahren.* (Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt e. V. Ber. Nr. 78.) Köln und Opladen: Westdeutscher Verlag 1958. 35 S.



Bei unregelmäßiger stationärer Erwärmung entstehen in der Flügelhaut Wärmespannungen. Wenn diese Eigenspannungen zu große Werte erreichen, kann die Flügelhaut beulen. Das Problem wurde auf eine Randwertaufgabe der Beulungsgleichung einer rechteckigen Platte von mittlerer Stärke gebracht. Die kritische Spannung erhielt man angenähert unter Anwendung des „Mehrstellenverfahrens“ nach L. Collatz.

*Witold Nowacki.*

**Kröner, Ekkehart und Alfred Seeger: Nicht-lineare Elastizitätstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen.** Arch. rat. Mech. Analysis **3**, 97—119 (1959).

The authors consider an infinite medium in the Euclidean space, with given finite dislocations determined by a (local) dislocation density tensor  $\alpha_{,n}^k$ . These dislocations produce proper stresses. The fundamental assumption in the paper is that to a deformed state in the Euclidean space there corresponds an undeformed natural state in a linearly connected non-Euclidean metric space. Coefficients  $\Gamma_{mlk}$  of connexion of such a space are expressible in terms of  $\alpha_{,n}^k$  and the deformation tensor. While components of the deformation tensor are not satisfying the compatibility conditions in the Euclidean space and hence the Einstein tensor  $\eta_{kl}$  is not vanishing, it is assumed that the Einstein tensor of the connexion  $\Gamma_{mlk}$  (i. e. in the natural state space) vanishes, presenting thus the set of fundamental equations for determination of proper stresses. When the use is made of the stress-strain relations of the non-linear theory of elasticity and components of the deformation tensor are expressed in terms of the stress-functions, the fundamental equations contain only the given dislocation density tensor  $\alpha_{,n}^k$ , the incompatibility tensor  $\eta_{kl}$  and the stress-functions, which can now be determined by successive approximations. As an illustration of the method, the authors applied it to the general problem of the plane state of proper stresses, considering separately two special cases: skew dislocations and edge dislocations. At the end of the paper there is a discussion on some problems connected with the method itself and the applications of it to the boundary value problems, thermoelasticity etc.

*R. Stojanovitch.*

**Spencer, A. J. M.: On finite elastic deformations with a perturbed strain-energy function.** Quart. J. Mech. appl. Math. **12**, 129—145 (1959).

It is supposed that the strain-energy function  $W$  of an elastic isotropic solid is perturbed to a new strain-energy function  $W^* = W + \varepsilon W'$ , where  $W$  is a strain-energy of the finitely deformed body  $B$  for which, in a given problem, an explicit solution can be found, and  $\varepsilon W'$  represents a small perturbing strain-energy function. Replacing  $W$  by  $W^*$  the author induces a further deformation of a body  $B$  into  $B'$ . Stress-strain relations and equations of equilibrium are derived which, together with suitable boundary conditions and a knowledge of the state of the body  $B$  make possible the determination of the additional displacements and stresses. Although the theory is similar to that of the small elastic deformations superposed on finite deformations, the functions appearing in the stress-strain relations of the present theory differ from the analogous functions in the paper of Green, Rivlin and Shield (this Zbl. **46**, 412) by the additional terms involving the perturbing strain-energy function  $W'$ . As an illustration, the theory is applied to the problem of simultaneous extension, inflation and shear of a cylindrical tube and to the special case in which the tube undergoes shear only. Here is supposed  $W$  to be of the form postulated by Mooney, while  $W'$  is an arbitrary function of the strain invariants.

*R. Stojanovitch.*

**Zyzkowski, Michal: Theory of finite deflections of elastic-plastic beams.** Proc. 2nd Congr. theor. appl. Mech., New Delhi 1956, Oct. 15—16, 24—32 (1957).

Under the limiting assumptions of constant length and continuous loading of the cross-sections the equations of lateral deflection of an elastic-plastic Navier beam

of rectangular cross-section are established and their solution presented in parametric form. Neither boundary conditions nor stability problems are discussed.

*A. M. Freudenthal.*

**Chadwick, P.:** The quasi-static expansion of a spherical cavity in metals and ideal soils. *Quart. J. Mech. appl. Math.* **12**, 52—71 (1959).

Es werden die quasi-statischen, elastischen und plastischen Formänderungen eines unendlich ausgedehnten Körpers untersucht, die von Druckänderungen in einem kugelförmigen Hohlraum dieses Körpers ausgehen. Dabei werden die Formänderungsgesetze des elastisch-plastischen Fließens benutzt (Reuß), für die Fließbedingung wird jedoch eine Abhängigkeit vom hydrostatischen Druck angenommen (Coulombs Festigkeitshypothesen). Die Trescasche Fließbedingung ist als Sonderfall darin enthalten. Neu ist gegenüber der früheren Behandlung dieses Problems durch Hill (The mathematical theory of plasticity, dies. Zbl. **41**, 108) die Erweiterung auf die allgemeinere Fließbedingung sowie die Einführung der „logarithmischen Dehnung“, die eine geschlossene Lösung ermöglicht. An einem Sonderfall wird gezeigt, daß die Berücksichtigung der Kaltverfestigung die Lösung qualitativ nicht wesentlich verändert. Ein interessantes Ergebnis ist ferner, daß bei Entlastung nach hinreichend großer Vorbelastung eine sekundäre plastische Zone auftreten kann.

*Th. Lehmann.*

**Colonnetti, Gustavo:** Relaxation et érouissage. *C. r. Acad. Sci., Paris* **248**, 2429—2432 (1959).

Proseguendo sue precedenti ricerche [*C. r. Acad. Sci., Paris* **247**, 376—378 (1958)] l'A. studia nella teoria di Volterra la deformazione plastica  $\bar{\varepsilon}$  di un sistema nel quale la deformazione elastica  $\varepsilon$  è funzione lineare del tempo, e il coefficiente di ereditarietà sviluppabile in serie di potenze di  $\varepsilon$ . Limitando tale sviluppo al primo termine si ritrova conformemente ad un risultato precedente dello stesso A., che la curva  $\bar{\varepsilon} = \varepsilon(\varepsilon)$  è una parabola. Nel caso generale, se il primo coefficiente dello sviluppo non nullo è positivo, si ha una legge aderente al tipo del rilassamento, mentre se tale coefficiente è negativo, la curva  $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(\varepsilon)$  presenta un punto di inflessione e si adatta bene a render conto dell'incrudimento, in accordo con precedenti risultati sperimentali.

*T. Manacorda.*

**Mathews, P. M.:** Vibrations of a beam on elastic foundation. II. *Z. angew. Math. Mech.* **39**, 13—19 (1959).

In an earlier paper of the author (see this Zbl. **82**, 384) the main object was to consider the dynamical problem of vibrations of a beam on elastic foundation in the case of a beam subject to a force whose point of application moves along the beam neglecting damping. The effect of damping is taken into account in the present paper. Using a transformation of variable  $r = x - vt$ , the solution is supposed in this form  $y(r, t) = y_1 \cos \varphi + y_2 \sin \varphi$ ,  $\varphi = \omega t$ ;  $y_i = y_i(r)$  have Fourier transforms  $p_i(s)$ . The analysis revealed the existence of a resonance frequency  $\omega_0$  for the beam, and a critical velocity  $v_0$  representing the limit beyond which the vibrations would be unstable in the undamped case. The damping constant  $\nu$  has also a "critical" value  $\nu_0 = 2(k\rho)^{1/2}$ ;  $k$  is the elasticity of the foundation,  $\rho$  mass per unit length of the beam. By means of the critical values  $\omega_0$ ,  $v_0$  and  $\nu_0$  two constants are introduced  $a_0 = (k/4\mathfrak{B})^{1/4}$ ,  $y_0 = (4\mathfrak{B}/k)^{3/4}(F_0/8\mathfrak{B})$ ,  $\mathfrak{B} = EI$ ,  $F_0$  is the amplitude of the applied force, expressing all the quantities in non-dimensional form:  $W = \omega/\omega_0$ ,  $V = \nu/\nu_0$ ,  $N = \nu/\nu_0$ ,  $S = s/a_0$ ,  $R = ra_0$ ,  $Y = y/y_0$ . Then the solution is  $Y(R, t) = Y_1 \cos \varphi + Y_2 \sin \varphi$ ,  $\varphi = \omega t$ ,  $Y_i = f_i(R)$  with  $P_i(S)$  as Fourier inverses. Two cases are treated: a) alternating load at the origin ( $V = 0$ ,  $N \neq 0$ ,  $W \neq 0$ ), b) a moving load of constant magnitude ( $W = 0$ ,  $N \neq 0$ ,  $V \neq 0$ ). The functions  $Y_i(R)$  in both cases are plotted. The author concludes that in qualitative features the most obvious difference from the undamped case is that, for non-zero velocity, the



displacements of the beam are no longer symmetric about the instantaneous position of the applied force, but are greater behind than ahead of this position. [See also Kenney, this Zbl. 56, 428]. *D. Rašković.*

**Rutecki, Jerzy:** *Vibration of space frames of thin-walled elements with open cross-section.* Rozprawy inż. 7, 95—140, russ. und engl. Zusammenfassg. 141—142 (1959) [Polnisch].

Zuerst werden Differentialgleichungssysteme für Schwingungen dünnwandiger Stäbe von offenen Profilen integriert, unter der Annahme, daß dieses Profil zwei zueinander rechtwinklige Symmetrieachsen hat. Als Hauptparameter sind die Werte der Randfunktionen eingeführt worden. Weiter werden die Schwingungen eines dünnwandigen Stabes offenen orthogonalsymmetrischen Profils betrachtet, wenn dieser Stab noch eine Belastung von verallgemeinerten Außenkräften trägt, und zwar werden die Amplitudenverhältnisse in jeder der Hauptebenen bestimmt. Es werden auch Drehschwingungen behandelt und Amplituden von schwingenden Biegemomenten, Drehmomenten, Drehbiegemomenten und Bimomenten berechnet. Nach einer eingehenden Diskussion der Schwingungen eines solchen Stabes werden Schwingungsgleichungen eines Stabwerkes mit Hilfe der Verschiebungsmethode abgeleitet. Endlich kommt Verf. zu den dynamischen Reaktionen, und dann werden dreidimensionale Stabwerke an einem Zahlenbeispiel betrachtet, das aber nur mit einigen vereinfachenden zusätzlichen Annahmen durchgeführt worden ist.

*J. Naleszkiewicz.*

**Hamburger, L.:** *Sur les vibrations des bielles de machines alternatives.* Acad. Républ. popul. Roumaine, Revue Méc. appl. 2, Nr. 2, 159—169 (1957).

In übersichtlicher und klarer Form werden die Formeln zur Bestimmung der Grundfrequenzen der longitudinalen und transversalen Eigenschwingungen der Pleuelstange zusammengestellt. Hierbei wird die Gestalt der Pleuelstange in der Form der Querschnittsfläche und des axialen Trägheitsmomentes mitberücksichtigt. Abgesehen von einem Fall werden diese Formeln mit Hilfe der Rayleigh-Galerkin'schen Näherungsmethode erhalten. Die Ergebnisse gestatten den Einfluß der verschiedenen Formen der Pleuelstange auf die oben genannten Grundfrequenzen zu beurteilen.

*B. Dizioğlu.*

**Thomas, T. Y.:** *On the velocity of formation of Lüders bands.* J. Math. Mech. 7, 141—148 (1958).

Under the assumption that a Lüders band in a flat uniformly stressed specimen forms by propagation from an indefinitely small plastic region in the direction of zero extension, it is shown that the velocity of the boundary of the elastic region, which is a plane either parallel or perpendicular to the direction of the force, is identical with the velocity of shear waves in the elastic medium; the velocity of formation of the band is therefore the resultant velocity in the direction of the Lüders band.

*A. M. Freudenthal.*

## Hydrodynamik:

**Slibar, Alfred and Paul R. Paslay:** *Retarded flow of Bingham materials.* J. appl. Mech. 26, 107—113 (1959).

Der untersuchte Bingham-Stoff besitzt im Ruhezustand eine Fließgrenze  $\tau_1$ , die bei der Scherbewegung sprunghaft in eine kleinere Fließgrenze  $\tau_0$  übergeht. Es handelt sich also nicht um einen Bingham-Stoff im üblichen Sinn, sondern um einen thixotropen Bingham-Stoff. Es wird eine Lösung für das Fließen dieses Stoffes angegeben für folgende drei Fälle der Scherbewegung: a) Scherung zwischen parallelen Platten, b) Scherung im Couette-Viskosimeter, c) Scherung im Kapillar-Viskosimeter. Es wird eine sprunghafte Erhöhung der Schergeschwindigkeit bei Beginn der Scherbewegung gefunden, und es wird eine Formel zur Berechnung des jeweiligen Fließ-



zustandes angegeben, die von der Vorgeschichte abhängig ist. Mit diesem Ergebnis werden einige der Widersprüche zwischen experimentellen Ergebnissen und theoretischen Vorhersagen für einen Bingham-Stoff geklärt. *F. Schultz-Grunow.*

**Wagner, Richard:** Ein Strömungsproblem mit nicht eindeutig bestimmter Lösung. *Z. angew. Math. Mech.* **38**, 427—431 (1958).

Verf. betrachtet die symmetrische Strömung eines freien Strahles gegen eine unendlich ausgedehnte Platte mit einer Öffnung als ebenes Problem. Das komplexe Strömungspotential läßt sich mit Hilfe elliptischer Funktionen aufbauen. Die Art der Strömung hängt vom Verhältnis der Grenzdicke des ankommenden Strahles zum Durchmesser der Blendenöffnung ab und ist in gewissen Fällen nicht eindeutig bestimmt. *G. Kelbg.*

**Yih, Chia-Shun:** Two solutions for inviscid rational flow with corner eddies. *J. Fluid Mechanics* **5**, 36—40 (1959).

Die stationäre Strömung einer reibungsfreien Flüssigkeit durch einen langen Kanal, dessen Abschluß eine Senke enthält wird untersucht. Behandelt werden die zweidimensionale Strömung gegen eine Liniensenke und die axialsymmetrische Strömung durch ein rotationssymmetrisches Rohr, wobei die Senken in der Symmetrie-Achse angeordnet sind. Die Gleichungen der Hydrodynamik liefern zwei Strömungsgebiete. Im ersten Gebiet münden alle Stromlinien in der Senke ein, während im zweiten Gebiet, welches an den Ecken liegt, die durch Rohrwand und Abschluß gebildet werden, geschlossene Stromlinien (Ecken-Wirbel) auftreten. *G. Kelbg.*

**Mitra, M. K.:** Resistance on a sphere due to a circular vortex filament in an uniform flow of a perfect liquid. *Z. angew. Math. Mech.* **39**, 25—30 (1959).

Verf. will eine effektive Formel für den Widerstand einer Kugel angeben, die gleichförmig von einer idealen Flüssigkeit umströmt wird, indem er noch einen Wirbelring hinter der Kugel voraussetzt. Bei diesem Modell ist die Stromfunktion  $\psi$  zu konstruieren, und zwar aus der Stromfunktion  $\psi_0$  der gleichförmigen Umströmung der Kugel, aus der Stromfunktion  $\psi_1$  des Wirbelringes selbst und aus der Butlerschen Stromfunktion  $\psi_2$ ; es ist

$\psi_3 = \psi_0 + \psi_1 + \psi_2 = -\frac{1}{2} U r^2 \sin^2 \theta (1 - a^3 r^{-3}) + \frac{1}{2} m \pi^{-1} (r \sin \theta)^{1/2} (R \sin \chi)^{1/2} (\theta - \theta')$ ,  
wobei:  $a$  = Kugeldurchmesser;  $U$  = Strömungsgeschwindigkeit im Unendlichen;  $r, \theta$  = Polarkoordinaten eines beliebigen Punktes;  $R, \chi$  = Polarkoordinaten des Wirbelschnitts mit einer Meridianebene;  $m$  = Wirbelringintensität. — Verf. entwickelt erst  $\psi_1$  und  $\psi_2$  in Potenzreihen nach  $k$  (Modul eines elliptischen Integrals), dann  $k$  nach  $r/R$  (wobei  $r < R$  oder aber, wegen der Symmetrie von  $k$  bezügl.  $r$  und  $R$ ,  $r > R$ ) und schließlich  $\psi_1$  und  $\psi_2$  nach  $r/R$  bis zum Gliede mit  $r^6/R^6$ . Nach unmittelbarer Umrechnung der Koeffizienten sechster Ordnung erhält er auf diese Art und Weise die — wie vom Verf. gesagt — nach Kugelfunktionen entwickelte Formel der Stromfunktion, nämlich

$$\psi = -\frac{1}{2} U r^2 \sin^2 \theta \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) + \frac{m}{2} \sin^2 \theta \sin^2 \chi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \frac{r^{n+1}}{R^n} P_n(\mu) P_n(\lambda) \left(1 - \frac{a^{2n+1}}{r^{2n+1}}\right),$$

wobei  $\mu = \cos \theta$ ,  $\lambda = \cos \chi$ . Er hat eigentlich für  $\psi$  so eine Entwicklung nur bis  $n = 6$ ! — Mit solcher Struktur der Formel der Stromfunktion bestimmt er auch die Potentialfunktion  $\Phi$ , und daraus berechnet er mit Hilfe der Bernoullischen Gleichung  $\rho \partial \Phi / \partial t + \frac{1}{2} \rho v^2 + p = C(t)$  den Widerstand.

*B. Dolaptschiew — I. Dimowski.*

**Eckart, Carl:** Surface wake of a submerged sphere. *Phys. Fluids* **1**, 457—461 (1958).

The problem of a sphere moving in a homogeneous incompressible liquid has been solved under three major assumptions: 1. There is no free surface or other boundary to the fluid; 2. A steady state been reached without a) creating vorticity

city; b) creating turbulence. For example, the sphere experiences no drag force, and leaves no wake. Consequently, it becomes necessary to consider how the three simplifying assumptions can be eliminated. This is particularly important in the case of 1., since the surface expression of the wake is of interest. It is shown that the surface wake of a submerged sphere is approximately the same as that which would be caused by a traveling pressure disturbance in the atmosphere above the free surface. This is, essentially, a consequence of the Bernoulli theorem. If the motion is sufficiently slow, the surface reacts to this equivalent pressure as a barometer (equilibrium theory). For more rapid motions, dynamic effects reduce the response of the surface, but leave a wake in the region already traversed by the sphere. The calculation of this wake involves the usual distinction between incoming and outgoing waves, which is introduced in the Fourier transform of the solution. The resulting integrals are evaluated by Kelvin's approximate method of stationary phase.

*Dan Gh. Ionescu.*

**Rosenblat, S.: The aerodynamic forces on an aerofoil in unsteady motion between porous walls.** Quart. J. Mech. appl. Math. 12, 151—174 (1959).

A solution is obtained to the boundary-value problem arising in the unsteady motion of a thin aerofoil in a stream bounded by porous walls. The flow is two-dimensional, inviscid and incompressible and the author sets up the assumption that the condition holding at such porous boundaries is a proportionality between the normal velocity component at the wall and the pressure difference across the wall. Calculating the pressure on the aerofoils in terms of the flow directions at the wall, the relations for the lift and moment about the midchord point are obtained for a harmonic upwash distribution. For the case of a rigid aerofoil these terms are given as dimensionless "airload coefficients".

*T. Okubo.*

**Kawaguti, Mitutosi: Note on Allen and Southwell's paper "Relaxation methods applied to determine the motion, in two dimensions, of a viscous fluid past a fixed cylinder".** Quart. J. Mech. appl. Math. 12, 261—263 (1959).

In einer Arbeit von Allen und Southwell (dies. Zbl. 64, 198) ist die laminare Strömung um einen Kreiszylinder bei verschiedenen Reynolds-Zahlen durch numerische Lösung der Navier-Stokesschen Gleichungen behandelt worden. Es wird die Gültigkeit dieser Lösung angezweifelt, da sie mit derjenigen mehrerer anderer Autoren nicht übereinstimmt.

*H. Schlichting.*

**Smirnov, L. P. und M. A. Pavlichina: Die Wirbelspur bei der Umströmung schwingender Zylinder.** Acad. Républ. popul. Roumaine, Revue Méc. appl. 3, 455—462 (1958) [Russisch].

**Babadžanjan, G. A. und A. G. Nazarjan: Über eine Lösung des Problems der ebenen laminaren Flüssigkeitsbewegung in einem offenen Kanal.** Akad. Nauk Armjan. SSR, Izvestija, Ser. fiz.-mat. Nauk 12, Nr. 1, 16—73 (1959) [Russisch].

In dieser Arbeit wird die stationäre und laminare Bewegung einer zähen inkompressiblen Flüssigkeit in einem offenen, sehr breiten Kanal betrachtet, dessen Bodenkontur durch eine willkürlich vorgegebene Kurve dargestellt ist. Der Untersuchung dieses ebenen Problems werden die Navier-Stokesschen Gleichungen zugrunde gelegt, wobei die Haftung der Flüssigkeit am Boden einerseits und die durch die Gestalt der Oberfläche festgelegte Beziehung zwischen den beiden Geschwindigkeitskomponenten, sowie die Ausdrücke für den normalen bzw. tangentialen Spannungsvektor an der Oberfläche andererseits, als Randbedingungen angenommen sind. Nach der Einführung dimensionsloser Variabler und eines kleinen Parameters  $\sigma \ll 1$ , der das Verhältnis zwischen einer charakteristischen Tiefe  $H$  und einer charakteristischen Länge  $L$  darstellt, nehmen die Ausgangsgleichungen und die entsprechenden Randbedingungen eine Form an, die für die Entwicklung der gesuchten Funktionen in Reihen nach Potenzen von  $\sigma$  geeignet ist. Durch das Einsetzen dieser Reihen in die transformierten Gleichungen und die entsprechenden Randbedingungen



und nach darauffolgendem Koeffizientenvergleich erhält man die Gleichungssysteme, die zur Bestimmung der nullten, ersten, usw. Näherungen dienen. In dieser Arbeit beschränkt man sich auf die Berechnung der beiden ersten Näherungen. Anschließend werden an Hand der erhaltenen Formeln die Gestalt der Oberfläche und einige Geschwindigkeitsprofile für eine vorgegebene Kurve der Bodenkontur ermittelt und graphisch dargestellt.

V. Saljnikov.

**Lance, G. N.:** The effect of a vertical lapse rate of temperature on the spiral flow of a fluid in a heated rotating cylinder. J. Fluid Mechanics 3, 523—530 (1958).

Verf. hatte gemeinsam mit Deland [Proc. Heat Transfer Fluid Mech. Inst. (1955) § 16] die Strömung in einem von unten geheizten, mit der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  rotierenden Zylinder vom Radius  $r_0$  bei größerer Flüssigkeitstiefe  $h$  theoretisch untersucht. Dabei war eine mit der Höhe  $Z$  konstante Temperatur angenommen worden, obwohl Versuche eine nahezu lineare Abhängigkeit der Temperatur von der Höhe zeigten. Zweck der vorliegenden Arbeit ist, den Einfluß eines konstanten Temperaturgefälles  $\partial T_0 / \partial Z = \theta = \text{const.} \neq 0$  zu bestimmen. Nach der Methode der kleinen Schwingungen werden die sechs partiellen Differentialgleichungen für die Störungsgrößen der drei Geschwindigkeitskomponenten, der Dichte, des Druckes und der Temperatur aufgestellt. Unter der vereinfachenden, durch die Natur jedoch nicht zu rechtfertigenden Annahme, daß der radiale Temperaturgradient vernachlässigbar ist, kann man wie in der oben genannten Arbeit  $r$  und  $Z$  trennen und erhält nach Elimination von Druck und Dichte ein System von 4 gewöhnlichen Differentialgleichungen, das dann in den drei Parametern  $a = 3,83 h/r_0$ , Reynoldszahl  $R = \Omega h^2/\nu$  und  $A = h^2 \sigma \theta/\nu$  ( $\sigma$  = Prandtl-Zahl) numerisch nach der Methode von Goodman und Lance (dies. Zbl. 71, 340) gelöst wird. Es werden die Werte  $a = 1$  (also für den Radius des im Versuch verwendeten Zylinders  $r_0 = 15$  cm eine Flüssigkeitshöhe von 3,92 cm) und  $A = 10737$  ( $\sigma = 7$  für Wasser von  $15^\circ\text{C}$ ;  $\nu = 0,01$ ;  $\theta = 1$ ) verwendet. In Schaubildern werden radiale, zonale und vertikale Geschwindigkeitskomponente über  $Z/h$  für  $R = 0$  (Ruhe), 2, 4, 8, 16, 32 aufgetragen und mit dem Verlauf bei  $A = 0$ ,  $R = 16$  aus der erstgenannten Arbeit verglichen. Im ganzen bewirkt der positive Temperaturgradient eine Beruhigung des Geschwindigkeitsfeldes, die der stabilen Schichtung einer nach oben wärmer werdenden Flüssigkeit entspricht. Eine Erweiterung der Rechnungen zu höheren Reynoldszahlen und anderen Werten für  $a$  ist in Arbeit.

J. Pretsch.

**Nickel, Karl:** Einige Eigenschaften von Lösungen der Prandtl'schen Grenzschicht, Differentialgleichungen. Arch. rat. Mech. Analysis 2, 1—31 (1958).

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in zwei Hauptteile. Im I. Hauptteil werden Abschätzungs- und Einzigkeitssätze für eine allgemeine Klasse von expliziten parabolischen Differentialgleichungen gewonnen. Diese Sätze werden im II. Hauptteil zu Aussagen über die mögliche Form eines Grenzschichtprofils herangezogen. Die Sätze des I. Hauptteils nehmen ihren Ausgang von einem Satz von Nagumo (dies. Zbl. 44, 99) und Westphal (dies. Zbl. 35, 65), der i. w. folgendes aussagt:

Sei  $z_x^- = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{z(x, \eta) - z(x - h, \eta)}{h}$ ,  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m)$ , so sei ein Randwertproblem

durch die parabolische Differentialgleichung  $z_x^- = f(x, \eta, z, z_{\eta_1}, z_{\eta_2})$  im beschränkten Gebiet  $\mathcal{G}$  und durch  $z(x, \eta) = U(x, \eta)$  auf einem (nicht geschlossenen) Stück des Randes gegeben;  $f$  sei schwach monoton in  $z_{\eta_1}$ ; ist nun  $u(x, \eta)$  eine Lösung des Randwertproblems, und gilt überall in  $\mathcal{G}$ :  $v_x^- < f(x, \eta, v, v_{\eta_1}, v_{\eta_2})$  sowie  $w_x^- > f(x, \eta, w, w_{\eta_1}, w_{\eta_2})$ , so gilt auch  $v(x, \eta) < u(x, \eta) < w(x, \eta)$ . Dieser Satz, der hier nicht ganz vollständig formuliert werden kann, wird zunächst auf unbeschränkte Gebiete verallgemeinert und durch zwei Zusätze erweitert, deren einer sich darauf bezieht, daß die Differentialgleichung auch auf dem ganzen Rande erfüllt sei, während der andere die Annahmen für  $u(x, \eta)$  mildert. Aus diesen



Erweiterungen des Nagumo-Westphalschen Lemmas wird dann ein Abschätzungssatz gefolgert, der Schranken für die Differenz zweier ungefährender Integrale von zwei Differentialgleichungen der betrachteten Gestalt liefert; weiter zwei Randwertsätze, die eine Verallgemeinerung des Maximum-Minimum-Prinzips darstellen (s. z. B. auch Collatz, dies. Zbl. 71, 119), sowie ein Einzigkeitsprinzip, aus dem sich ein allgemeiner Einzigkeitssatz sowie als Spezialfälle die Einzigkeitssätze von Nagumo und Giuliano (dies. Zbl. 47, 92) ergeben. Im II. Hauptteil wendet Verf. diese Sätze auf die Prandtlschen Grenzschicht-Differentialgleichungen der ebenen, laminaren, stationären und inkompressiblen Grenzschicht an:  $u u_x + v u_y = U U' + v u_{yy}$  ( $x_0 \leq x \leq x_1$ ,  $0 \leq y < \infty$ );  $u(x_0, y) = \tilde{u}(y)$ ,  $u(x, 0) = 0$ ,  $\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = U(x)$ ,  $v(x, 0) = v_0(x)$ ; senkrecht Absaugen oder Ausblasen ist

also erlaubt. Dabei ist  $v(x, y) = v_0(x) - \int_0^y u_x(x, t) dt$  nach der Kontinuitätsgleichung. Auf die Bedeutung des Westphalschen Lemmas für die Grenzschichtgleichungen hatte zuerst H. Görtler (dies. Zbl. 37, 406) hingewiesen. Verf. verwendet neben der genannten Form der Grenzschichtgleichungen wechselweise die v. Misessche und die Croccosche Form. Die wichtigsten Aussagen seien kurz in der Sprache der Grenzschichttheorie zusammengefaßt: 1. Übergeschwindigkeiten können nicht von selbst entstehen, sind sie jedoch im Anfangsprofil vorhanden, so können sie nicht weiter anwachsen. 2. Die Schubspannung nimmt ihre maximalen und minimalen Werte im Anfangsprofil und an der Wand an. 3. Nimmt die Außengeschwindigkeit stromabwärts nicht ab und wird an der Wand höchstens abgesaugt, so kann a) im Innern der Strömung die Geschwindigkeit  $u$  nirgends auf Null absinken (keine Rückströmung), b) die Wandschubspannung nicht Null werden (keine Ablösung). 4. Die Anzahl der Wendepunkte eines Profils ist höchstens um  $G + 1$  höher als die der Wendepunkte des Anfangsprofils, wobei  $G$  die Anzahl der Vorzeichenwechsel der Gradienten  $U'$  der Außenströmung ist. 5. Bei vorgegebener Außengeschwindigkeit  $U(x)$  ist die gesamte Grenzschicht durch das Anfangsprofil eindeutig bestimmt. Mit diesen Sätzen — dies sei abschließend betont — werden Lücken in den Grundlagen der mathematischen Grenzschichttheorie geschlossen, deren Vorhandensein schon seit langem als Mangel empfunden worden war.

G. Hämmerlin.

Boley, Bruno A. and Morton B. Friedman: On the viscous flow around the leading edge of a flat plate. J. Aero-Space Sci. 26, 453—454 (1959).

Für die laminaire Plattengrenzschicht wird für das Gebiet in der Nähe der Plattennase, wo die Grenzschichtvernachlässigungen nicht zutreffen, eine Korrektur angegeben. Diese wird mittels einer Variationsrechnung aus den Navier-Stokeschen Gleichungen hergeleitet.

H. Schlichting.

Amick, James L.: A semiempirical relation for laminar separation. J. Aero-Space Sci. 26, 603—604 (1959).

Hassan, H. A.: On heat transfer to laminar boundary layers. J. Aero-Space Sci. 26, 464 (1959).

Verf. gibt eine Lösung für die inkompressible, stationäre, laminare Temperaturgrenzschicht mit konstanten Stoffeigenschaften bei beliebig vorgegebenem Verlauf von Außendruck und Wandtemperatur an. Diese formal exakte Lösung hat die Form einer Reihenentwicklung, in der nur universelle Funktionen vorkommen. Das Verfahren ist eine Übertragung der vom Verf. und, in etwas anderer Form, vorher von Görtler angegebenen Reihenentwicklung für die Geschwindigkeitsverteilung auf die Temperaturverteilung in der Grenzschicht.

E. Becker.

Mercer, A. McD.: The growth of the thermal boundary layer in laminar flow between parallel flat plates. Appl. sci. Research, A 8, 357—365 (1959).

Für die Temperaturverteilung des laminaren Einlaufs eines ebenen Kanales mit parallelen Wänden wird ein neues Lösungsverfahren angegeben. Bei einer Temperaturdifferenz zwischen Wand und Strömung, die in einem bestimmten Querschnitt  $x = 0$  beginnen möge, entwickelt sich stromabwärts ein Temperaturfeld, das vorn Grenzschichtcharakter hat und asymptotisch in eine parabolische Temperaturverteilung übergeht. Die Entwicklung der Temperaturgrenzschicht von  $x = 0$  stromabwärts wird mittels einer Reihenentwicklung nach steigenden Potenzen von  $x$  mit von  $y$  abhängigen Koeffizientenfunktionen berechnet, wie sie früher von H. Schlichting, Z. angew. Math. Mech. **14**, 368—373 (1934) für die Geschwindigkeitsgrenzschicht der Kanaleinlaufströmung angegeben worden ist. Die hierbei sukzessiv zu lösenden gewöhnlichen Differentialgleichungen für die Funktionen der Temperaturverteilung sind linear und lassen sich z. T. geschlossen integrieren. Es wird ein Diagramm zugegeben, das den vorderen Teil des Temperaturfeldes zeigt.

H. Schlichting.

Bourne, D. E., D. R. Davies and S. Wardle: A further note on the calculation of heat transfer through the axisymmetrical laminar boundary layer on a circular cylinder. Quart. J. Mech. appl. Math. **12**, 257—260 (1959).

Für den Wärmeübergang in der laminaren Strömung längs eines Kreiszylinders (axialsymmetrische Strömung) waren in mehreren früheren Arbeiten bereits Lösungen angegeben worden, die als Entwicklungen nach kleinen und großen Werten des Abstandes  $x$  von der Vorderkante gekennzeichnet werden können. Diese Lösungen werden nach einem Näherungsverfahren verbessert, wobei insbesondere für den Überdeckungsbereich der früheren Lösungen größere Genauigkeit erreicht werden soll.

H. Schlichting.

Kapur, J. N.: Transverse component of velocity in a plane symmetrical jet of a compressible fluid. Quart. J. Mech. appl. Math. **11**, 423—426 (1958).

Für den ebenen laminaren Strahl bei kompressibler Strömung ist von D. G. Toose (dies. Zbl. **46**, 193) eine geschlossene Lösung für die Geschwindigkeitsverteilung angegeben worden. Verf. zeigt, daß jene Lösung für die Querkomponente der Geschwindigkeit nicht zutreffend ist. Es wird hier die richtige Lösung für die Querkomponente angegeben, und es wird auch gezeigt, daß diese im Grenzübergang zur inkompressiblen Strömung in die bekannte Lösung von W. G. Bickley, Philos. Mag., VII. Ser. **23**, 727—731 (1937) übergeht.

H. Schlichting.

White jr., F. M., B. F. Barfield and M. J. Goglia: Laminar flow in a uniformly porous channel. J. appl. Mech. **25**, 613—620 (1958).

Für die laminare, stationäre und inkompressible Strömung zwischen zwei ebenen parallelen Platten (Kanalströmung, Kanalhöhe  $2h$ ) werden die Navier-Stokesschen Gleichungen exakt gelöst, und zwar für den Fall, daß an den Platten mit homogener Geschwindigkeit  $v_w$  senkrecht eingeblasen oder abgesaugt wird. Angegeben werden die Lösungen für solche Anfangsprofile der Geschwindigkeit, die stromabwärts ihre Form beibehalten (ähnliche Lösungen). Das Problem führt auf folgendes Randwertproblem:  $\Phi' \Phi'' - \Phi \Phi''' + \Phi'''' = 0$  mit  $\Phi(0) = 0$ ,  $\Phi'(0) = 0$ ;  $\Phi(1) = v_w h / \nu$ ,  $\Phi'(1) = 0$ . Die Lösung erfolgt durch eine Reihenentwicklung. Die mittlere Geschwindigkeit der Strömung nimmt bei Einblasen linear mit der Lauflänge zu, bei Absaugen entsprechend ab. Bei einer mittleren Geschwindigkeit von  $\bar{U}(0)$  bei  $x = 0$  ist demnach der Kanal bei Absaugung nach der Lauflänge  $x = h \bar{U}(0) / v_w$  leer. Die auf die örtliche mittlere Geschwindigkeit bezogene Wandschubspannung  $c_f' = \tau_0 / [\frac{1}{2} \rho \bar{U}^2(x)]$  ist bei Absaugung größer und bei Einblasen kleiner als diejenige der Kanalströmung.

K. Gersten.

Liu, V. C.: On the separation of gas mixtures by suction of the thermal-diffusion boundary layer. Quart. J. Mech. appl. Math. **12**, 1—13 (1959).



Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Angabe einer Methode zur Trennung eines Gemisches von Gasen mit verschiedenen Molekulargewichten. Der Grundgedanke der Methode ist der folgende: Man läßt das Gemisch über eine stark erhitzte Wand hinwegströmen. Innerhalb der sich ausbildenden Grenzschicht kommt infolge des vorhandenen Temperaturgradienten eine Diffusion zustande derart, daß das leichtere Gas eine Bewegungstendenz nach dem wärmeren Gebiet hin, das schwerere Gas dagegen nach dem kühleren Gebiet hin aufweist. Sorgt man dafür, daß die Wandtemperatur ständig wesentlich über der Temperatur am Außenrand der Grenzschicht liegt, so wächst die Dichte des leichteren Gases monoton innerhalb der Grenzschicht und erreicht ihren Maximalwert an der Platte, so daß man eine weitgehende Trennung des Gasgemisches in der Grenzschicht erhält. Durch Absaugung der Wärme-Diffusionsgrenzschicht gelangt man daher zu einer weitgehenden Trennung des Gasgemisches. Eine Durchrechnung des Problems für den einfachen Fall einer ebenen Platte mit konstanter Absaugung wird durchgeführt unter der zusätzlichen Annahme, daß die Dichte des leichteren Gases wesentlich kleiner als eins ist. Der Grenzwert des Verhältnisses von Absauge- zu Außenströmungsgeschwindigkeit, bei dem die Strömung gerade noch laminar bleibt, wird angegeben und die Zeit, die zur Einstellung eines stationären Zustandes erforderlich ist, abgeschätzt.

*Th. Geis.*

**Rosner, Daniel E.:** Chemically frozen boundary layers with catalytic surface reaction. *J. Aero-Space Sci.* 26, 281—286 (1959).

Ein gasförmiges Medium enthalte einen Bestandteil, der mit der Wand reagiert, so daß die Wand für diese Komponente wie eine Senke wirkt. Für dieses Problem wird ein Näherungsverfahren nach Art des Pohlhausenverfahrens entwickelt, wobei auch die Diffusionsgleichung in Integralform aufgestellt wird. Für den Sonderfall „ähnlicher“ Grenzschichtprofile reduzieren sich die Integrale auf Konstanten. Das Gas wird als inkompressibel vorausgesetzt, und die Konzentration des reagierenden Bestandteils wird als so gering angenommen, daß Diffusionskonstante  $D$ , kinematische Zähigkeit  $\nu$  und Schmidtsche Zahl (Prandtlsche Zahl für Diffusion) als konstant angesehen werden können. Abschließend wird die Ausdehnung der Methode auf mehrere reagierende Bestandteile diskutiert, und es wird gezeigt, daß die den Vorgang beherrschenden katalytischen Parameter als Verhältnis charakteristischer Zeiten integriert werden können.

*W. Wuest.*

**Moore, F. K.:** On the separation of the unsteady laminar boundary layer. *Grenzschichtforsch., Sympos. Freiburg/Br.* 26.—29. Aug. 1957, 296—311 (1958).

**Persen, L. N.:** Lösungen für instationäre Grenzschichtströmungen mit Hilfe von Integraltransformationen. *Ibid.* 312—318 (1958).

**Wuest, W.:** Periodische Absaugegrenzschichten. *Ibid.* 319—329 (1958).

**Nikolskij, A. A.:** Einige Strömungen der idealen Flüssigkeit mit entstehender Ablösung und ihre Betrachtung vom Standpunkt der Grenzschicht-Theorie. *Ibid.* 330—334 (1958).

**Rachmatulin, H. A.:** Grenzschicht-Theorie der homogenen und Zweikomponenten-Flüssigkeit mit zwei Geschwindigkeiten. *Ibid.* 335—343 (1958).

**Pfenninger, W.:** Boundary layer suction. *Ibid.* 343 (1958).

**Wortmann, F. X.:** Grenzschicht-Absaugung. *Ibid.* 343—347 (1958).

**Tani, I.:** Unsteady boundary layer flow. *Ibid.* 347 (1958).

Moore setzt in der ersten Arbeit voraus, daß die instationäre laminare zweidimensionale Grenzschicht eines inkompressiblen Mediums sich in der Nähe der Ablösestelle quasistationär bewegt. Dies soll bedeuten: Der Ablösepunkt bewege sich mit kleiner, annähernd gleichförmiger Geschwindigkeit  $\varepsilon$  gegenüber der Wand, und in einer Störungsrechnung mit  $\varepsilon$  als Störparameter seien allein die in  $\varepsilon$  linearen Glieder zu berücksichtigen. Dies führt auf zwei Grenzschicht-Differentialgleichungen im mitbewegten Koordinatensystem: a) eine stationäre Grenzschicht bei bewegter



Wand und b) eine Differentialgleichung für das instationäre Störglied. Verf. untersucht die Grenzschicht in der Nähe der Ablösestelle und benutzt dazu insbesondere „ähnliche Lösungen“ zu der Außengeschwindigkeit  $A(t)x^m$  ( $t$  = Zeit-,  $x$  = Wandkoordinate). Ergebnisse für mit der Geschwindigkeit  $\varepsilon x^m$  mitbewegte Wand entsprechend a) werden für  $\varepsilon = 1/10$  und  $\varepsilon = 1/3$  angegeben. Analog zum Vorgehen von Goldstein wird die Singularität an der Ablösestelle untersucht: Ist  $u = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots$  die Geschwindigkeit parallel zur Wand und  $y$  der Wandabstand, dann ergibt sich bei a) näherungsweise  $a_0 \approx C(-x)^{1/2}$ ,  $a_1 \approx K(-x)^{1/4}$ , bei b) jedoch  $a_0 = 0$ ,  $a_1 \approx C(-x)^{1/2}$ ,  $a_2 \approx K$ , wenn durch  $x = 0$  die Ablösestelle festgelegt ist und  $C$  und  $K$  zwei Konstanten bezeichnen. Im Falle a) schlägt Verf. vor, als Ablösestelle denjenigen kleinsten  $x$ -Wert zu bezeichnen, an dem bei stromabwärts bewegter Wand eine Stelle  $y$  mit  $u = u_y = 0$ , bei stromaufwärts bewegter Wand eine Stelle  $y$  mit  $u = u_y = u_{yy} = 0$  auftritt und begründet anschaulich diese Definition. Die Diskussion zu dieser Definition war derart ausgehend, daß der Vorsitzende der Sitzung, J. Ackeret sie mit den Worten schloß: „Mir scheint, daß mit dem Begriff der Ablösung ein neues Symposium bestritten werden könnte“.

Persen betrachtet zwei einfache Fälle der instationären geradlinigen Bewegung einer ebenen Wand in einem inkompressiblen zähen Medium. Wird vorausgesetzt, daß einerseits allein die Geschwindigkeitskomponente in Bewegungsrichtung von Null verschieden ist und daß andererseits der Druck überall konstant bleibt, so vereinfachen sich die Navier-Stokesschen Differentialgleichungen auf die Wärmeleitungsgleichung. Verf. zeigt den Vorteil der Laplace- und Fourier-Transformation zur numerischen Behandlung der beiden Probleme.

Wuest betrachtet die stationäre Strömung eines inkompressiblen Mediums über einer unendlich ausgedehnten ebenen Wand mit periodisch verteilter Absaugung senkrecht zur Wand. Sie ergibt eine periodische (Grenzschicht-)Strömung. Verf. betrachtet die drei Fälle, daß die Absaugung a) durch in Strömungsrichtung liegende Liniensenken, b) durch quer zur Strömungsrichtung angeordnete Schlitzte endlicher Breite und c) durch eine doppeltperiodische Verteilung der Absaugung (Rechteckgitter) erfolgt. Verf. gibt Näherungslösungen der Navier-Stokesschen Differentialgleichungen für diese Probleme an (teilweise durch Linearisierung) und diskutiert sie. Dabei wird insbesondere der Fall b) näher untersucht, durch Strömungsbilder erläutert, und es wird der Fehler der Näherungen abgeschätzt.

Nikolskij untersucht (anschließend an L. Prandtl) näher die „ähnlichen“ instationären Bewegungen spiralförmiger Wirbelflächen, die sich bei einem zweidimensional umströmten Keil von der Kante ablösen und zwar für reibungsfreie inkompressible Medien mit den Hilfsmitteln der Potentialtheorie. Die Übertragung auf reibende Medien wird angedeutet.

Rachmatulin betrachtet ein Gemisch aus zwei kontinuierlichen inkompressiblen zähen Medien in stationärer und zweidimensionaler Strömung. Bei Geschwindigkeitsunterschieden zwischen den beiden Komponenten sollen antreibende bzw. bremsende Kräfte proportional zur Geschwindigkeitsdifferenz auftreten. Unter den üblichen Vernachlässigungen der Grenzschicht-Theorie ergibt sich dann ein System aus zwei Grenzschicht-Differentialgleichungen und zwei Kontinuitätsgleichungen für die vier Geschwindigkeitskomponenten der beiden Medien je parallel und senkrecht zur Wand. Nach Verf. genügen die Bewegungen von Flüssigkeiten und Gasen, die mit kleinsten Makroteilchen gesättigt sind, diesen Gleichungen. Es werden die Formeln eines v. Kármán-Pohlhausen-Verfahrens abgeleitet und auf das Beispiel eines erweiterten Rohres angewendet, numerische Resultate werden angekündigt.

Pfenniger gibt einen Kurzbericht über Absaugeversuche zur Widerstandsverringerung bei den Reynoldszahlen  $14 \cdot 10^6$  bis  $20 \cdot 10^6$ . Bei Absaugung durch 8 oder 80 Schlitzte oder 80 Lochreihen konnte eine laminare Grenzschicht selbst

beistarken Druckanstiegen (wie starken? — Anm. des Ref.) erzwungen werden, wobei bei 80 Schlitzen um etwa 25% bis 30% kleinere Absaugemengen benötigt wurden als bei 8 Schlitzen; 80 Lochreihen brauchten etwas größere Absaugemengen als 80 Schlitze (wie große? — Anm. des Ref.). Ein Film zeigte durch Sichtbarmachung der Strömung die Schwierigkeiten der Laminarhaltung bei Lochabsaugung, weil dadurch stromabwärts freie Wirbel (auch Hufeisenwirbel) angefacht wurden.

**Wortmann** betrachtet laminare stationäre Grenzschichten eines inkompressiblen Mediums mit kontinuierlicher Absaugung. — 1. Verf. gibt für den zweidimensionalen oder rotationssymmetrischen Fall eine Quadraturformel an für die Berechnung der kritischen Reynoldsschen Zahl, bis zu der Stabilität gegen kleine (instationäre) Störungen besteht. Das Vorgehen und die getroffenen Vernachlässigungen entsprechen denen bei der Walzschen Quadraturformel. — 2. Verf. zeigt, daß der beträchtliche Unterschied zwischen zwei Verfahren zur Berechnung der kritischen Reynoldszahl von K. Wieghardt und J. Pretsch erheblich reduziert wird, wenn beim Wieghardtschen Verfahren statt der Schlichtingschen Absaugprofile eine Kombination von Blasiusprofil und asymptotischem Absaugeprofil gewählt wird.

**Tani** weist zum Vortrag von K. F. Moore (siehe erste der acht Arbeiten) darauf hin, daß bei der einfachen instationären zweidimensionalen Grenzschicht eines inkompressiblen Mediums mit der Außengeschwindigkeit  $U = V - x/(T - t)$  ( $x$  = Wandkoordinate,  $t$  = Zeit,  $V$  und  $T$  sind Konstanten) nach der Transformation  $\xi = 8x/V(T - t)$ ,  $\eta = \frac{1}{2}y\sqrt{V/\nu x}$  ( $\nu$  = kinematische Zähigkeit) dasselbe Vorgehen wie bei der Howarth'schen Grenzschicht möglich ist. Die Reihenkonvergenz ist etwas besser als dort, Ablösung findet bei  $\xi = 1,20$  statt. *K. Nickel*

**Tanner, R. I.:** Hydrodynamic lubrication of ball and socket joints. Appl. Sci. Research, A 8, 45—51 (1958).

Die hydrodynamische Schmiermitteltheorie wird für ein vollumgeschlossenes Kugelgelenk angewendet. Der Kugellkörper soll sich unter konstanter Last und mit unveränderlicher Drehgeschwindigkeit in der Kugelschale bewegen. Es werden der resultierende Druck und das Reibungsmoment sowohl für eine volle, als auch für halbe Druckentwicklung an der Kugelfläche bestimmt. Diese Ergebnisse werden schließlich mit denen des als äquivalent definierten Sommerfeldschen Gleitlagers unendlicher Breite verglichen. *B. Dizioğlu.*

**Vasileva, Gh. and Al. Nica:** Investigations on the operating characteristics of journal-bearings made of various materials. Acad. Républ. popul. Roumaine, Revue Méc. appl. 3, 481—491 (1958).

**Baranoff, Alexis von:** Sur une solution exacte de l'équation d'Orr-Sommerfeld. C. r. Acad. Sci., Paris 248, 186—188 (1959).

Die Orr-Sommerfeld-Gleichung für die Stabilität einer ebenen Laminarströmung wird auf eine Volterrasche Integralgleichung zweiter Art zurückgeführt, die durch Iterationen gelöst werden kann. *J. Pretsch.*

**Rytov, S. M.:** Correlation theory of thermal fluctuations in an isotropic medium. Soviet Phys., JETP 6, 130—140 (1958), Übersetz. von Žurn. éksper. teor. Fiz. 33, 166—178 (1957).

Im Hinblick auf die Deutung der Vorgänge bei der Rayleigh'schen Lichtstreuung wird eine Spektraltheorie der thermischen Fluktuationen in einem zähen elastischen kompressiblen (festen oder flüssigen) Medium entwickelt, und zwar auf der Grundlage des „Fluktuation-Dissipations“-Theorems von Callen (dies. Zbl. 44, 412) und seinen Mitarbeitern. Die mechanischen und thermischen Parameter des Mediums können in diesem Fall eine beliebige Frequenzdissipation besitzen, die mit den Bedingungen vereinbar ist. Korrelationsfunktionen der Amplituden (Amplituden in



Fourier Raum-Zeit-Entwicklungen) werden für Spannung, Deformation, Geschwindigkeit, Temperatur und Entropiefluktuationen gefunden. Mit Hilfe dieser Funktionen sind die spektralen Intensitäten berechnet worden. *W. Wuest.*

**Batchelor, G. K.: Small-scale variation of convected quantities like temperature in turbulent fluid. I: General discussion and the case of small conductivity.** *J. Fluid Mechanics* 5, 113—134 (1959).

Wenn durch irgend einen äußeren Vorgang langwellige Schwankungen von skalaren Größen  $\theta$  wie z. B. Temperatur oder Konzentration hervorgerufen werden, nehmen sich diese in einem turbulenten Feld in kurzwellige Schwankungen um. In der vorliegenden Arbeit wird die Form des Spektrums von  $\theta$  bei großen Wellenzahlen theoretisch untersucht, wobei sowohl Konvektion als auch molekulare Dissipation  $\kappa$  berücksichtigt wird. Die Hypothesen von Kolmogoroff für kurzwellige Geschwindigkeitsschwankungen in einer turbulenten Strömung bei großen Reynoldszahlen werden auch auf kurzwellige Schwankungen einer skalaren Größe  $\theta$  übertragen. Frühere Bearbeitungen dieses Problems haben gezeigt, daß sich das Spektrum von  $\theta$  für kleine Wellenzahlen wie  $n^{-5/3}$  verhält. Es zeigt sich, daß diese Beziehung bei einer bestimmten Wellenzahl durch den dann vorherrschenden Einfluß der Wärmeleitung „abgeschnitten“ wird. Es wird gezeigt, daß die von Obukhoff (dies. Zbl. 34, 114) und Corrsin (dies. Zbl. 44, 406) aufgestellte Grenze  $n = (\varepsilon/\kappa^3)^{1/4}$  nur gültig ist, wenn die kinematische Zähigkeit sehr klein gegen die Diffusionskonstante  $\nu$  ist. Im Fall  $\nu \gg \kappa$  wird der Gültigkeitsbereich durch die Zähigkeit viel eher abgeschnitten, als der Leitfähigkeitsgrenze entsprechen würde und zwar für  $n = (\varepsilon/\nu^3)^{1/4}$ .

*W. Wuest.*

**Batchelor, G. K., I. D. Howells and A. A. Townsend: Small-scale variation of convected quantities like temperature in turbulent fluid. II: The case of large conductivity.** *J. Fluid Mechanics* 5, 134—139 (1959).

In Fortsetzung der vorstehend besprochenen Arbeit wird das  $\theta$ -Spektrum im Fall  $\kappa \gg \nu$  und im Bereich von Wellenzahlen untersucht, der zwischen der Viskositätsgrenze  $n = (\varepsilon/\nu^3)^{1/4}$  und der Leitfähigkeitsgrenze  $n = (\varepsilon/\kappa^3)^{1/4}$  liegt, wobei in diesem Bereich eine Gesetzmäßigkeit  $\sim n^{-17/3}$  gefunden wird. *W. Wuest.*

**Spalding, D. B.: Transport processes between fluids and clouds of suspended particles: some exact solutions.** *Proc. roy. Soc. London, Ser. A* 242, 430—443 (1957).

Verbrennung festen pulverförmigen Brennstoffes in Öfen, Verbrennung flüssiger Brennstoffeinspritzungen in Dieselmotoren und Gasturbinen, Kondensation von Dampf an einer Einspritzung von Wassertropfen, Absorption einer Gaskomponente in ein Gasgemisch durch Einspritzen eines lösenden Mittels, u. ä. sind Beispiele für die Prozesse, für deren theoretische Behandlung vorliegende Arbeit die Grundlagen gibt. Die in einem turbulenten Strom der vektoriellen Hauptgeschwindigkeit  $\bar{q}$  befindlichen Partikel sollen eine Eigenschaft  $p$  haben, die sich infolge der Berührung der Partikel mit dem strömenden Medium gemäß dem Gesetz  $Dp/Dt = -K \cdot P$  im Laufe der Zeit ändert ( $D/Dt$  substantielle Zeitableitung,  $K$  eine Funktion allein der lokalen Eigenschaften des strömenden Mediums,  $P$  Funktion von  $p$  allein). Sie sollen überdies so klein sein, daß sie vom Flüssigkeitsstrom ohne nennenswerte Störungen mitgetragen werden, und sie sollen am turbulenten Mischungsprozeß teilnehmen als ob sie Moleküle wären. Im stationären Zustand ist die auf die Masseneinheit der Mischung und auf die Einheitsdifferenz der Eigenschaft  $p$  bezogene Partikelanzahl  $c$  (die Partikelkonzentration) zeitlich unverändert, so daß eine Bilanz der Konzentrationsänderungen infolge molekularer Transportprozesse, Konvektion und turbulenter Diffusion zur Differentialgleichung  $-K \varrho (cP)/\partial p = \text{div}(\varepsilon \varrho \text{grad } c) - \text{div}(c\bar{q})$  führt ( $\varrho$  lokale Dichte der Mischung,  $\varepsilon$  turbulente Diffusivität). Mittels der Transformation  $cP = \varphi$ ,  $d\varphi/P = -d\theta$  geht sie in  $K \varrho d\varphi/d\theta = \text{div}(\varepsilon \varrho \text{grad } \varphi) - \text{div}(\varphi\bar{q})$  über und erweist sich in dieser Form als äquivalent mit der instationären Wärmeleitungsgleichung (wenn man  $\varphi$  als Temperatur,  $\theta$  als Zeit und  $K$  als spezi-



fische Wärme liest). Die zugehörige physikalische Randbedingung lautet  $n \delta S = (-\varepsilon \rho \text{grad } c + c q) \delta S$ , wo  $S$  eine Randfläche mit dem vektoriellen Flächenelement  $\delta S$  und  $n$  (eine gegebene Funktion von  $p$  und  $S$ ) die Anzahl der Partikel pro Einheitsdifferenz von  $p$  ist, welche die Flächeneinheit in der Zeiteinheit passieren. Im transformierten Raum lautet die Randbedingung  $n P \delta S = (-\varepsilon \rho \text{grad } \varphi + \varphi \bar{q}) \delta S$ , wo  $n P$  als bekannte Funktion von  $\theta$  anzusehen ist. — Vorhandene Lösungsmethoden und Lösungen der Wärmeleitungsgleichung werden nun benutzt, um für den Fall, daß alle injizierten Partikel identisch gleich sind, folgende Probleme in analytischer Form zu behandeln: 1. turbulenter Strom in einem langen Rohr konstanten Querschnitts, dem an einem Ende Partikel kontinuierlich injiziert werden, 2. eindimensionale Diffusion ohne Konvektion (Spezialfall von 1. mit  $\bar{q} = 0$ ), 3. Diffusion in einem Rohr endlicher Länge, 4. punktförmige kontinuierliche Partikelinjektion (mit Strömungsgeschwindigkeit) in einen gleichförmigen Strom, 5. homogener stationärer Transport. Bei 1. 2. 3. wird  $K \varepsilon \rho^2 = \text{const}$ , bei 4. wird  $K = \text{const}$  angenommen, um analytische Lösungen erhalten zu können. Da in Wirklichkeit die Variation von  $K$  nicht a priori bekannt ist, sondern durch eine Differentialgleichung gesteuert wird, welche die Konvektions-, die turbulenten Diffusions- und die molekularen Transportterme enthält und also simultan mit der Differentialgleichung für das Partikelverhalten gelöst werden muß, muß im allgemeinen Fall auf ein numerisches Verfahren zurückgegriffen werden, für das abschließend ein mit der analytischen Näherungslösung startendes Iterationsverfahren skizziert wird. Zuvor verallgemeinert man jedoch noch mit Hilfe des Superpositionsprinzips und durch Integration die analytischen Lösungen auf den Fall, daß die injizierten Partikel nicht identisch gleich sind.

H. Behrbohm.

Karlsson, Sture K. F.: An unsteady turbulent boundary layer. *J. Fluid Mechanics* 5, 622—636 (1959).

In einem Grenzschichtkanal wurde die turbulente Grenzschicht bei zeitlich harmonisch um ein konstantes Mittel schwingender Außengeschwindigkeit experimentell untersucht. Mittels Hitzdrahten wurden in der Grenzschicht die mittlere Geschwindigkeit, die Amplituden der mit der Außengeschwindigkeit phasengleichen und der um  $\frac{1}{2}\pi$  phasenverschobenen Komponente der ersten Harmonischen der Geschwindigkeit, sowie die Turbulenzintensität gemessen, wobei in dieser Intensität der Beitrag sämtlicher Oberschwingungen enthalten war. Die Schwingungsamplitude der Außengeschwindigkeit betrug bis zu 34% der mittleren Außengeschwindigkeit, die Frequenzen variierten von 0 bis 48 sec<sup>-1</sup> und die mit der Verdrängungsdicke gebildete Reynoldszahl war  $3,6 \cdot 10^3$ . Es zeigte sich, daß nichtlineare Effekte selbst bei den größten Schwingungsamplituden so klein waren, daß sie im Rahmen der Meßgenauigkeit nicht identifiziert werden konnten. Dementsprechend konnte keine merkliche Änderung des mittleren Geschwindigkeitsprofils gegenüber der stationären Strömung festgestellt werden. Wie zu erwarten, rücken mit wachsender Frequenz die Maxima der 1. Harmonischen der Geschwindigkeit immer näher an die Wand.

E. Becker.

Johnson, D. S.: Velocity and temperature fluctuation measurements in a turbulent boundary layer downstream of a step wise discontinuity in wall temperature. *J. appl. Mech.* 26, 325—336 (1959).

Kreith, Frank and David Margolis: Heat transfer and friction in turbulent vortex flow. *Appl. sci. Research, A* 8, 457—473 (1959).

Bloom, Martin H. and Adrian Pallone: Shroud tests of pressure and heat transfer over short afterbodies with separated wakes. *J. Aero-Space Sci.* 26, 626—636 662 (1959).

Green jr., Leon and Kenneth L. Nall: Experiments on porous-wall cooling and flow separation control in a supersonic nozzle. *J. Aero-Space Sci.* 26, 689—697 (1959).

Morkovin, M. V.: On supersonic wind tunnels with low free-stream disturbances.

J. appl. Mech. 26, 319—324 (1959).

Mackie, A. G.: The solution of boundary value problems for a general hodograph equation. Proc. Cambridge philos. Soc. 54, 538—553 (1958).

Bei Anwendung der allgemeinsten Hodographengleichung wird mit Hilfe von Germain's Inversionstheorem die Lösung gewisser, bei der Umströmung eines keilförmigen Profils durch eine nichtzähe kompressible Flüssigkeit vorkommender Randwertprobleme gefunden. Vorausgesetzt wird, daß die Strömungsgeschwindigkeit in keinem Punkt die Schallgeschwindigkeit übertrifft. Berechnet werden die Positionskoordinaten und der Widerstand. Die erhaltenen allgemeinen Lösungen werden für die in den Gleichungen von Čaplygin, Tricomi sowie von Tomotika und Tamada angenommenen Funktionen  $K(\sigma)$  besprochen. Die Anwendung der erhaltenen allgemeinen Theorie zu Spezialfällen wird am Helmholtzschen Beispiel der Umströmung eines Keiles dargetan.

F. Labisch.

Keune, Friedrich: Singularitätentheorie für lineare Unter- und Überschallströmung um Körper nicht mehr kleiner Streckung ohne Auftrieb. Z. angew. Math. Mech. 37, 300—301 (1957).

Es wird ein Überblick gegeben über Resultate des Verf. aus der Theorie linearisierter Umströmungsprobleme reibungs- und wirbelfreier Medien im Unter- und Überschall, die später als DVL-Bericht erscheinen sollen. Die Strömung sei durch Überlagerung einer Parallelanströmung der Geschwindigkeit  $U_\infty$  (in  $x$ -Richtung) und der Machzahl  $M_\infty$  mit einer gewissen Verteilung von räumlichen Quellelementen  $q(x', y', z') dx' dy' dz'$  über einen Raumbereich  $B$  beschrieben, dessen maximale Querausbreitung  $b_{\max}$  (senkrecht zur  $x$ -Achse) mit seiner Längsausdehnung  $l$  (in  $x$ -Richtung) in der Ungleichheitsbeziehung  $2 b_{\max} \sqrt{|1 - M_\infty^2|} < l$  steht. Durch

$$(1) \quad 2\pi\varepsilon\varphi(x, y, z) = - \iint\limits_{(G)} \frac{q(x', y', z') dx' dy' dz'}{\{(x-x')^2 + (1-M_\infty^2)[(y-y')^2 + (z-z')^2]\}^{1/2}}$$

( $G$  ein durch die charakteristischen Merkmale von Unter- und Überschallströmungen festgelegter Integrationsbereich,  $\varepsilon = 1$  für  $M_\infty > 1$ ,  $\varepsilon = 2$  für  $M_\infty < 1$ ) wird das Störgeschwindigkeitspotential dieser Strömung gegeben. Man bilde nun die Quellmomente  $(2\nu)$ -ter Ordnung  $m^{(2\nu)}$ , definiert durch

$$U_\infty m^{(2\nu)}_x(x', y, y', z, z') = q(x', y', z') [(y-y')^2 + (z-z')^2]^\nu \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots)$$

und aus ihnen durch Integration über  $B_x$  den Querschnitt  $x = \text{const}$  von  $B$ , die entsprechenden Flächenmomente

$$E^{(2\nu)}_x(x, y, z) = \iint\limits_{(B_x)} m^{(2\nu)}_x(x, y, y', z, z') dy' dz'.$$

Dann läßt sich  $\varphi(x, y, z) = \sum_{\nu=1}^N \varphi^{(2\nu)}(x, y, z)$  schreiben, wo

$$\varphi^{(2\nu)}(x, y, z) = U_\infty \omega^{(2\nu)}(x, y, z) + R^{(2\nu)}(x, y, z)$$

sich zusammensetzt aus dem Potential  $\omega^{(2\nu)}(x, y, z)$  einer  $(2\nu)$ -ten Querschnittsströmung, definiert durch

$$2\pi\omega^{(2\nu)}(x, y, z) = k_{2\nu} (M_\infty^2 - 1)^\nu \frac{\partial^{2\nu}}{\partial x^{2\nu}} \iint\limits_{B_x} m^{(2\nu)}_x(x, y, y', z, z') \log \sqrt{(y-y')^2 + (z-z')^2} dy' dz'$$

[ $k_{2\nu} = 1/(2^{2\nu}(\nu!)^2)$ ], und dem Potential  $R^{(2\nu)}(x, y, z)$  eines  $(2\nu)$ -ten Raumeinflusses, definiert durch

$$2\pi\varepsilon R^{(2\nu)}(x, y, z) = k_{2\nu} (M_\infty^2 - 1)^\nu \frac{\partial^{2\nu+1}}{\partial x^{2\nu+1}} \left\{ \frac{\varepsilon}{2} \left[ \log \frac{|M_\infty^2 - 1|}{4} - K_{2\nu} \right] E^{(2\nu)}(x, y, z) - \int_0^x E^{(2\nu)}_x(x', y, z) \log(x - x') dx' + (\varepsilon - 1) \int_x^l E^{(2\nu)}_x(x', y, z) \log(x' - x) dx' \right\}.$$

Die  $K_2$ , sind Konstante, von denen bisher  $K_0 = 0$ ,  $K_1 = 2$ ,  $K_2 = 3$ ,  $K_3 = 1/13$  ermittelt wurden. — Für  $v = 0$  erhält man die bekannte Theorie für Körper kleiner Streckung.

H. Behrbohm.

**Keune, Friedrich:** Reihentwicklung des Geschwindigkeitspotentials der linearen Unter- und Überschallströmung für Körper nicht mehr kleiner Streckung. Z. Flugwiss. 5, 243—247 (1957).

Für das im obigen Referat in (1) gegebene Quellpotential wird ein Integrationsformalismus entwickelt, der die mathematische Begründung der dort angegebenen  $q$ -Aufspaltung ermöglicht. Die Methode ist bei Unter- und Überschallströmungen im Prinzip gleich, in Einzelheiten aber durch die charakteristischen Unterschiede der Integrationsgrenzen verschieden.

H. Behrbohm.

**Spreiter, John R.:** Aerodynamics of wings and bodies at transonic speeds. J. Aero-Space Sci. 26, 465—486 (1959).

Beim vorliegenden Aufsatz handelt es sich um eine Zusammenfassung der verschiedenen theoretischen Ergebnisse auf dem Gebiete schallnaher Strömungen um Profile und Rotationskörper. Verf., der selbst an den Fortschritten auf diesem Gebiete beteiligt ist, behandelt alle praktisch wichtigen Methoden. Nach Aufstellung der Grundgleichungen für schallnahe Strömungen kleiner Störung werden die Ähnlichkeitsgesetze und das Äquivalenzgesetz behandelt. Dann folgen die Hodographenmethode und die Iterationsverfahren, die Integralgleichungsmethode, eine Methode der lokalen Linearisierung, die parabolische Theorie für ebene und achsensymmetrische Strömung, Windkanaleffekte und -Korrekturen. Vergleiche mit Experimenten geben dem Leser die Möglichkeit zu eigenem Urteil. Ein reiches Literaturverzeichnis macht die Arbeit nicht nur für den Außenstehenden, sondern auch für den Fachmann zu einem wichtigen Behelf.

K. Oswatitsch.

**Carafoli, F. et M. Ionescu:** Sur une théorie unitaire de l'aile supersonique en écoulement homogène d'ordre supérieur. Z. angew. Math. Mech. 37, 297—298 (1957).

Kurzes Résumé der im folgenden Referat besprochenen Arbeit.

H. Behrbohm.

**Carafoli, E. et M. Ionescu:** Écoulements coniques d'ordre supérieur autour des ailes triangulaires minces ou à épaisseur symétrique. Acad. Républ. popul. Roumaine, Revue Méc. appl. 2, Nr. 1, 5—27 (1957).

Wirbelfreie Überschallfelder, deren Geschwindigkeitspotential  $\varphi(x_1, x_2, x_3)$  (im Rahmen der linearisierten Theorie kleiner Störungen) eine homogene Funktion  $n$ -ter Ordnung ihrer drei Variablen ist, spielen z. B. in der Überschalltheorie dünner dreieckiger Flügel mit polynomialer lokaler Neigungsverteilung ihrer Oberfläche eine Rolle und sind bereits von mehreren Autoren mehr oder minder eingehend und auf verschiedenen Wegen behandelt worden (P. Germain, P. Lagerström, M. A. Heaslet und H. Lomax, G. N. Lance, u. a.). Sie erfahren hier eine allgemeine zusammenfassende Darstellung, deren Grundgedanke der folgende ist. Die aus den Störgeschwindigkeitskomponenten  $u, v, w$  gebildeten Verhältnisse  $u/x_1^{n-1}$ ,  $v/x_1^{n-1}$ ,  $w/x_1^{n-1}$  sind homogen von nullter Ordnung und können zufolge Euler's Satz über homogene Funktionen in der Ebene  $x_3 = 0$  als homogene Linearkombinationen gewisser  $n$ -ter Ableitungen von  $\varphi$  geschrieben werden. Jede dieser  $n$ -ten Ableitungen wird als homogene Funktion nullter Ordnung Funktion von  $y = x_2/x_1$ ,  $z = x_3/x_1$  allein. Von  $y = r \sin \theta$ ,  $z = r \cos \theta$  geht man mittels A. Busemanns Radienttransformation  $r \sqrt{M^2 - 1} = 2\rho/(1 + \rho^2)$  zu  $\eta = \rho \cos \theta$ ,  $\zeta = \rho \sin \theta$  über. In diesen Variablen werden die  $n$ -ten Ableitungen von  $\varphi$  auf  $x_3 = 0$  harmonische Funktionen und also Realteile analytischer Funktionen von  $\xi = \eta + i\zeta$ , oder auch von  $x = y + iz = 2\xi/[B(1 + \xi^2)]$ . Von diesen analytischen Funktionen genügt es, eine einzige zu kennen, denn mit Hilfe der Kompatibilitätsbeziehungen, die zum Ausdruck bringen, daß es sich um  $n$ -te Ableitungen ein und derselben Funktion  $\varphi$  handelt, können alle anderen bestimmt werden. — Es genügt offenbar, das strömungsphysikalische Rand-



wertproblem mit von  $(n - 1)$ -ter Ordnung homogener Aufwindvorschrift auf einem vom Kegeligkeitszentrum ausgehenden Winkelbereich der  $x_1, x_2$ -Ebene zu lösen. Da sich zufolge dieser Randbedingung der Imaginärteil der gesuchten analytischen Funktion in der  $x$ -Ebene als konstant längs der Flügelspur erweist, kann diese Flügelspur als Stromlinie einer fiktiven, durch die analytische Funktion definierten hydrodynamischen Strömung der  $x$ -Ebene angesehen werden. Es läßt sich dann leicht die Natur und die Lage der Singularitäten dieser Funktion herausphilosophieren und damit die allgemeine Form der Lösung (in evtl. einer weiteren, durch konforme Abbildung zu gewinnenden Ebene) angeben. Zum Schluß bleibt eine Konstantenbestimmung zu erledigen, bei der sich zeigt, daß die Anzahl der zur Verfügung stehenden Gleichungen jeweils gerade gleich ist der Anzahl der zu bestimmenden Konstanten ( $2n + 1$  für den Fall des dünnen tragenden Dreiecksflügels mit Unterschallvorderkanten,  $3n$  für den tragenden Dreiecksflügel mit einer Überschallvorderkante,  $4n - 1$  für den Fall des nichttragenden Flügels geringer Dicke oder des tragenden dünnen Flügels mit zwei Überschallvorderkanten). — Es wird in der Arbeit verschwiegen, es sei hier aber betont, daß gerade bei dieser Konstantenbestimmung für größere Werte von  $n$  ein beträchtlicher Arbeitsaufwand für die numerische Durchführung eines konkreten Falles erforderlich ist.

*H. Behrbohm.*

**Ehlers, F. Edward:** The method of characteristics for isoenergetic supersonic flows adapted to high-speed digital computers. J. Soc. industr. appl. Math. 7, 85—100 (1959).

Die Arbeit enthält eine ausführliche Darstellung der Charakteristikenmethode zur numerischen Berechnung ebener sowie achsensymmetrischer räumlicher stationärer Überschallströmungen. Die Strömung wird als isoenergetisch vorausgesetzt, d. h. die Stautemperatur soll auf allen Stromlinien gleich sein. Außerdem beschränkt sich die Untersuchung auf vollkommene Gase mit konstanten spezifischen Wärmen  $c_p$  und  $c_v$ . Es werden sowohl isentropische, also stoßfreie, wie auch nichtisentropische Strömungen mit Verdichtungsstößen, wie sie am Kopf eines hinreichend spitzen Drehkörpers oder Profils auftreten, besprochen. Wie üblich werden die Richtungs- und Verträglichkeitsbedingungen durch Differenzengleichungen ersetzt, die dann durch ein iteratives Verfahren unter Benützung der Anfangs- und Randbedingungen (feste Begrenzung, freie Oberfläche) und mit Hinzunahme der Stoßbedingungen numerisch gelöst werden. Die im Titel der Arbeit in Aussicht gestellte „Anpassung an digitale Rechenanlagen“ besteht lediglich darin, daß die Gleichungen, in denen zunächst trigonometrische Funktionen des Machwinkels  $\mu$  und des Neigungswinkels  $\theta$  der Stromlinien auftreten, durch Einführung der neuen Veränderlichen  $\beta = \cot \mu$  und  $\zeta = \tan \theta$  so umgeformt werden, daß nur noch rationale Funktionen auftreten. Dadurch wird das Rechenprogramm etwas einfacher und die Rechenzeit etwas kürzer, obwohl allerdings bei der Ausgabe der Resultate doch wieder auf  $\mu$  bzw. die Mach-Zahl und  $\theta$  zurücktransformiert werden muß. Das benützte Iterationsverfahren (vgl. z. B. R. Sauer: Einführung in die theoretische Gasdynamik, S. 150, dies. Zbl. 42, 195) ist linear konvergent und hat den Nachteil, daß bei achsensymmetrischen räumlichen Strömungen in der Umgebung der Symmetrieachse das Rechenprogramm geändert werden muß. Neuere noch nicht veröffentlichte Untersuchungen von G. Seegmüller zeigen, daß ein auf der Newton-Methode für die Auflösung von Gleichungen beruhendes, quadratisch konvergierendes Iterationsverfahren keine Änderung des Programms in der Umgebung der Symmetrieachse erfordert, also erheblich vorteilhafter ist. Als Beispiel wird der Entwurf des Überschallteiles einer Laval-Düse kurz diskutiert.

*R. Sauer.*

**Honda, M.:** A theoretical investigation of the interaction between shock waves and boundary layers. J. Aero-Space Sci. 25, 667—678 (1958).

Die abgelöste laminare Grenzschicht hinter einem Verdichtungsstoß wird mit Hilfe des Impuls- und Energiesatzes berechnet. Bei der Übertragung des gleichen

Verfahrens auf turbulente Grenzschichten ergeben sich Schwierigkeiten, die dadurch umgangen werden, daß die Grenzschicht in einen inneren zähen und einen äußeren reibungslosen Bereich aufgespalten wird. Das Geschwindigkeitsfeld der inneren Grenzschicht wird dann durch die Geschwindigkeit am inneren Rand der reibungslosen Zone bestimmt. Die Ergebnisse der Näherungsrechnung stehen in guter Übereinstimmung zu Messungen.

W. Wuest.

**Belocerovskij, O. M.:** Berechnung der Umströmung eines Kreiszylinders mit abgelöster Stoßwelle. *Vyšislit. Mat.* 3, 149—185 (1958) [Russisch].

Das gleichzeitige Auftreten von Unter- und Überschallströmungen und die unbekannte Form und Lage der abgelösten Stoßwelle sind die Hauptgründe der in den Untersuchungen der Umströmung von Körpern mit abgelöster Stoßwelle auftretenden Schwierigkeiten. Deshalb werden gewöhnlich nur angenäherte Aufgaben gelöst. Die Anwendung von elektronischen Rechenautomaten erlaubt es, hinreichend genaue Lösungen der streng gestellten Aufgabe zu erhalten. In dieser Arbeit werden Berechnungsformeln und Ergebnisse von Berechnungen für den Fall der Umströmung eines Kreiszylinders gegeben. Die allgemeine Theorie wurde in einer vorgehenden Arbeit des Verf. (s. dies. Zbl. 82, 191) für den Fall der Umströmung eines beliebigen, ebenen, eine Symmetrieachse besitzenden Körpers gegeben. Numerische Berechnungen wurden mit Hilfe eines durch Dorodnizyn entwickelten Rechenverfahrens durchgeführt. Die erhaltenen Ergebnisse sind in den beigefügten Tafeln wiedergegeben.

F. Labisch.

**Rogers, M. H.:** Similarity flows behind strong shock waves. *Quart. J. Mech. appl. Math.* 11, 411—422 (1958).

Untersucht wird die Strömung eines reibungslosen kompressiblen Gases bei der Ausbreitung einer ebenen, zylindrischen oder kugelförmigen Stoßwelle in ein ruhendes Gas hinein. Die Stoßwelle sei unendlich stark, d. h. der Druck und damit die innere Energie des Gases vor der Stoßwelle werden vernachlässigt. Die Gesamtenergie der Strömung hinter der Stoßwelle soll sich nach  $E = E_0 t^s$  ( $s > 0$ ) mit der Zeit  $t$  ändern. Das kann dadurch erreicht werden, daß von innen her auf die Strömung ein Druck von einer sich zeitlich ausdehnenden Fläche (Ebene, Zylinder oder Kugel) ausgeübt wird. Die Strömung, welche demnach außen von der Stoßwelle und innen von der sich ausbreitenden Fläche begrenzt wird, ist für alle Zeitpunkte ähnlich. Im Sonderfall  $s = 0$  ergibt sich die gewöhnliche Stoßwelle. Als wichtiges Ergebnis stellt sich heraus, daß der Anteil der kinetischen Energie an der Gesamtenergie (kinetische Energie plus innere Energie) mit  $s$  zunimmt. Während für  $s = 0$  dieser Anteil nur etwa 20% beträgt, wächst er asymptotisch bis auf 50%, d. h. für große  $s$  teilt sich die Energie zur Hälfte in kinetische und innere Energie auf.

K. Gersten.

**Levey, H. C.:** The thickness of cylindrical shocks and the PLK method. *Quart. appl. Math.* 17, 77—93 (1959).

Bei der zweidimensionalen Quell- oder Senkenströmung eines reibungslosen kompressiblen Gases kann die Lösung außerhalb des Schalldurchgangskreises entweder Unterschall oder Überschall sein, wobei die Geschwindigkeit im Unendlichen entweder gegen Null oder gegen die Vakuumgeschwindigkeit strebt. Bei Berücksichtigung von Zähigkeit und Wärmeleitung verschwindet diese Mehrdeutigkeit. Wie Verf. in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 57, 420) gezeigt hat, ist die Quellströmung außerhalb des Schalldurchgangskreises zunächst Überschall, geht dann aber in einem Verdichtungsstoß auf Unterschall über. Wenn die mit der Quellstärke und der Zähigkeit gebildete Reynoldszahl gegen  $\infty$  strebt, wird die Stoßwelle unendlich dünn, für endliche Reynoldszahl hat dagegen der Stoß eine endliche Dicke der Größenordnung  $Re^{-1} S^{-1} \log(Re S^3)$ , wobei  $S$  die Stoßstärke bezeichnet. In der vorliegenden Arbeit wird das gleiche Ergebnis auch für die Senkenströmung erhalten entgegen den Voraussagen, die sich durch Anwendung des von Lighthill



entwickelten PLK-Verfahrens ergeben haben. Es wird gezeigt, daß dieses Verfahren bei Problemen der vorliegenden Art versagt, bei welchen ein kleiner Parameter mit den höchsten Ableitungen verknüpft ist. *W. Wuest.*

**Whitham, G. B.: A new approach to problems of shock dynamics. II: Three-dimensional problems.** *J. Fluid Mechanics* 5, 369—386 (1959).

In einer vorhergehenden Untersuchung (dies. Zbl. 78, 403) hat Verf. eine Näherungstheorie der Stoßwellendynamik entwickelt, die in der vorliegenden Arbeit auf dreidimensionale Probleme ausgedehnt wird. Er führt dabei Strahlen ein, die Orthogonalkurven zu den aufeinanderfolgenden Stellen der Stoßfront sind. Bei einer durch derartige Strahlen begrenzten Stoßwellenröhre wird angenommen, daß die Stoßstärke  $M$  und der Röhrenquerschnitt  $A$  miteinander eindeutig durch die „Chisnell-Funktion“  $M(A)$  verknüpft sind. Für die Brechung einer ebenen Stoßwelle durch ein Hindernis gelten genau dieselben Differentialgleichungen und Randbedingungen wie für die stationäre Überschallströmung hinter diesem Hindernis, lediglich mit einer bestimmten Wahl der Dichte-Geschwindigkeitsbeziehungen. Die aufeinanderfolgenden Lagen der Stoßfront entsprechen den Äquipotentialflächen der Überschallströmung. Diskontinuitäten in der Neigung und Stärke der Stoßfront („Stoß-Stoß“) entsprechen stationären schiefen Stößen beim Überschallproblem. Im zweiten Teil der Arbeit wird die Theorie auf die Brechung einer ebenen Stoßfront durch einen Kegel angewandt. Im dritten Teil wird eine Theorie kleiner Störungen auf die Brechung einer ebenen Stoßfront durch einen schlanken achsensymmetrischen Körper allgemeiner Form sowie auf die Stabilität einer ebenen Stoßwelle angewandt. Mit der gleichen Methode können auch zahlreiche weitere Probleme behandelt werden, auf die abschließend kurz hingewiesen wird. *W. Wuest.*

**Kapur, J. N.: Superposability in magnetohydrodynamics.** *Appl. sci. Research, A* 8, 198—208 (1959).

The equations of magnetohydrodynamics governing the velocity  $\vec{q}$  and the magnetic field  $\vec{H}$  in a fluid conductor present problems of considerable mathematical complexity. The complexity arises mainly from the non-linearity of the equations. For the Navier-Stokes equations, several devices have been introduced for studying these non-linear equations. The notion of additivity or superposability is one such device that has received attention during recent years. In the present paper, the author has extended this concept to the more general case of hydromagnetics. He obtains the conditions for superposability of two hydromagnetic motions and also the conditions for a given flow to be self-superposable. Two-dimensional and axially symmetric flows are examined from the point of view of superposability. The results for ordinary viscous fluids for two-dimensional flows, axially symmetric flows with poloidal components only, and axially symmetrical flows (with toroidal components as well) follow as particular cases of this results. For hydrostatic equilibrium of magnetic stars there is only one non-linear term, viz.  $\text{curl } \vec{H} \times \vec{H}$ , and the systems in which this vanishes have been studied by Chandrasekhar as the so-called force-free fields. The author finds that in this case force-free fields are the same as self-superposable fields as defined by himself. Moreover, there is a generalisation of these fields for the hydrodynamical situation if  $\vec{q}$  is not zero, but parallel to  $\vec{H}$ . In fact for self-superposable fields, if  $\text{curl } \vec{H} \times \vec{H}$  is zero, then  $\text{curl } \vec{q} \times \vec{q}$  has to vanish or be a gradient of a scalar function. For  $\vec{q} = 0$  again, the decay of the magnetic field is found to be governed by the diffusion equation, and this has been used to estimate the period of decay of the earth's magnetic field and also for a sun-spot magnetic field. For magnetohydrodynamical situations also the same equation holds provided the field is self-superposable.

*Dan Gh. Ionescu.*



**Dricot, G. et P. Ledoux:** Remarque sur la théorie des oscillations d'une masse fluide incompressible en présence d'un champ magnétique. *Bull. Soc. roy. Sci. Liège* 28, 115—121 (1959).

Prendendo spunto da un lavoro di Schwarzschild [*Ann. d'Astrophys.* 12, 148 (1949)], nel quale, trascurando il campo gravitazionale, si cercava di spiegare la forte variabilità del campo magnetico osservato per alcune stelle mediante la mutua azione fra campo magnetico e oscillazioni della materia, si studia il moto di una massa fluida, non viscosa, omogenea, incompressibile e di conducibilità elettrica infinita, oscillante sotto l'azione della propria gravità e di un campo magnetico  $H$ . Supponendo piccola l'ampiezza delle oscillazioni, si linearizzano le corrispondenti equazioni e, quale corretta condizione al contorno, si impone che sulla superficie esterna si annulli la variazione lagrangiana della pressione (anziché la corrispondente variazione euleriana): si giunge così al risultato che, anche se si trascura il campo gravitazionale, la frequenza delle oscillazioni risulta determinata da un termine dipendente da  $H$  e da uno dipendente dalla gravitazione, che è preponderante rispetto al primo.

*R. Nardini.*

**Achiezer (Akhiezer), A. I. and A. G. Sitenko:** Theory of excitation of hydro-magnetic waves. *Soviet Phys., JETP* 8, 82—85 (1959), Übersetz. von *Žurn. éksp. teor. Fiz.* 35, 116—120 (1958).

Verff. untersuchen die Anregungsmöglichkeiten von hydromagnetischen Wellen durch veränderliche äußere Ströme. Für eine leitende Flüssigkeit in einem konstanten Magnetfeld werden die Äquivalentstromstärken ausgerechnet, die den gleichen Effekt erzeugen wie eine mechanische Anregung vorgegebener Rotationsgeschwindigkeit. Dämpfung der Wellen durch endliche Leitfähigkeit und Viskosität werden berechnet.

*H. Rother.*

**Kato, Yusuke and Tosiya Taniuti:** Hydromagnetic plane steady flow in compressible ionized gases. *Progress theor. Phys.* 21, 606—612 (1959).

Das Verhalten ebener stationärer, isentropischer magnetohydrodynamischer Strömungen in einem kompressiblen Plasma unendlicher Leitfähigkeit wird untersucht für den Fall, daß Strömung und Magnetfeld in derselben Ebene liegen. Es wird gezeigt, daß Stoßwellen (Hyperbolizitätsbedingung) auch für Machzahlen  $< 1$  existieren können. Für den Fall  $\xi \sim v$  wird gezeigt, daß auch die strenge Gültigkeit des Bernoullischen Gesetzes nicht eine wirbelfreie Strömung bedingt.

*H. Rother.*

● **Jungelaus, G.:** Laminare Grenzschichten in der Magnetohydrodynamik. (Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt e. V. Ber. Nr. 85.) Köln und Opladen: Westdeutscher Verlag 1959. 25 S. DM 8,20.

In dieser Arbeit werden laminare Grenzschichten bei Strömungen elektrisch leitender inkompressibler Flüssigkeiten unter dem Einfluß von Magnetfeldern behandelt. Es werden die Voraussetzungen untersucht, unter denen der Druck senkrecht konstant ist, so daß eine Grenzschichttheorie im üblichen Sinne möglich ist. Die Grenzschichtgleichung ist:

(\*) 
$$u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \hat{v} \frac{\partial u}{\partial \hat{\eta}} = u_{\infty} \frac{\partial u_{\infty}}{\partial \xi} + \partial^2 u / \partial \hat{\eta}^2 + N(u_{\infty} - u) h_{\eta}^2$$
  
( $\vec{V}$  Strömungsgeschwindigkeit,  $\vec{V}_{\infty}$  Geschwindigkeit außerhalb der Grenzschicht,  $\vec{H}$  magnetische Feldstärke,  $(x, y, z)$  rechtwinklige Koordinaten,  $\vec{V}_0$  Bezugsgeschwindigkeit,  $L$  Bezugslänge,  $H_0$  Bezugsgröße der magnetischen Feldstärke,  $\rho$  Dichte,  $\mu$  Permeabilität,  $\nu$  kinematische Zähigkeit,  $\sigma$  elektrische Leitfähigkeit,  $R$  Reynoldssche Zahl,  $\lambda = \rho V_0 / \mu^2 H_0^2 \sigma$ ,  $N = L/\lambda$ ,  $\xi = x/L$ ,  $\eta = y/L$ ,  $\hat{\eta} = \sqrt{R} \eta$ ,  $u = V_x/V_0$ ,  $u_{\infty} = V_{x\infty}/V_0$ ,  $\hat{v} = \sqrt{R} v$ ). Es lassen sich drei Bereiche unterscheiden: 1.  $N \ll 1$  — gewöhnliche Grenzschichttheorie; 2.  $N \sim 1$  — die vollständige Gleichung (\*) ist zu lösen; 3.  $N \gg 1$  — die Trägheitsglieder in (\*) können vernachlässigt werden. Für sehr starke Magnetfelder ( $N \gg 1$ ) ergibt sich eine besonders einfache Lösung

der Grenzschiebtgleichung. Für den allgemeinen Fall beliebiger Stärke des Magnetfeldes ( $N \sim 1$ ) werden die Bedingungen für ähnliche Lösungen aufgestellt, d. h. die Bedingungen, unter denen es möglich ist, die Gleichungen (\*) und (\*\*)  $\partial u / \partial \xi + \partial \hat{v} / \partial \hat{\eta} = 0$  auf eine einzige gewöhnliche Differentialgleichung zurückzuführen. Einige ähnliche Lösungen werden explizit angegeben. *Dan Gh. Ionescu.*

**Mitchner, M.:** Magnetohydrodynamic flow in a shock tube. *Phys. Fluids* 2, 62—71 (1959).

Die Stoßmachzahl  $M$  hängt beim klassischen Membran-Stoßrohr implizit-analytisch ab von den beiden Adiabatenexponenten ( $\gamma_1, \gamma_4$ ) und den Verhältnissen der Drücke ( $p_4/p_1$ ) und Schallgeschwindigkeiten ( $a_4/a_1$ ). Bei homogenen transversalen Magnetfeldern ( $B_1, B_4$ ) und vollkommener elektrischer Leitfähigkeit kommen dazu noch  $\lambda_1$  und  $\lambda_4$ , wo  $\lambda = B^2/8\pi p$ . Zur Berechnung der Verdünnungswelle wird eine Verallgemeinerung der Riemannschen Invarianten eingeführt. Diskutiert wird der Einfluß von  $p_4/p_1, \lambda_1$  und  $\lambda_4$  auf  $M$  bei festen  $\gamma_1, \gamma_4$  und  $a_4/a_1$ , insbesondere für Grenz- und Sonderfälle ( $\lambda_1 = 0; \lambda_4 = 0; \lambda_4 \gg 1; p_4/p_1 = \infty$ ). Zum quantitativen Vergleich werden drei experimentelle Arbeiten herangezogen, bei denen jedoch die obigen Voraussetzungen nur in sehr grober Näherung erfüllt waren. *F. Wecken.*

**Nardini, Renato:** Sui fronti d'onda nella magneto-elasticità. *Rend. Sem. mat. Univ. Padova* 28, 225—243 (1958).

Nel presente lavoro si propone di indagare, mediante il metodo delle caratteristiche relative ai sistemi di equazioni differenziali, sull'esistenza di fronti d'onda di natura magnetoelastica, valutandone la corrispondente velocità di propagazione. Si introducono le equazioni generali del problema, dedotte dall'abbinamento delle equazioni di Maxwell per i mezzi in moto con l'equazione delle oscillazioni elastiche, nella quale si tenga conto anche della forza ponderomotrice che, in presenza di un campo magnetico, agisce su un elemento di corrente elettrica. Dalle dette equazioni si rileva subito che, nel caso di conducibilità elettrica finita, non esistono fronti d'onda di mutua influenza, ma solo i noti fronti d'onda di tipo elastico (condensazione o distorsione) e l'abituale fronte d'onda elettromagnetico. Si passa allora al caso dell'infinita conducibilità: le corrispondenti equazioni si possono linearizzare nell'ipotesi che tanto la velocità  $\vec{v}$  delle particelle del mezzo, quanto il campo magnetico indotto risultino sufficientemente piccoli; se ne può dedurre un'unica equazione vettoriale nella sola velocità  $\vec{v}$ . Dopo avere ricavato le corrispondenti equazioni scalari relative alle condizioni di compatibilità dinamica, si dimostra che sono possibili tre valori per la velocità di propagazione di un fronte d'onda, inteso quale superficie di discontinuità per le derivate seconde delle grandezze scalari del problema; uno di tali valori ha forma particolarmente semplice e corrisponde alla sovrapposizione di fenomeni di distorsione e fenomeni idromagnetici; gli altri due valori manifestano, in forma più complessa, mutua influenza fra fenomeni elettromagnetici e fenomeni elastici, sia di condensazione che di distorsione; i detti tre valori, esclusi casi particolari in cui due di essi (o, eccezionalmente, tutti e tre) coincidono, sono generalmente distinti e corrispondono alle velocità di fase dei tre modi relativi ad onde sinusoidali messe in evidenza da Baños nel caso dell'infinita conducibilità, da lui trattato marginalmente come caso limite [*Phys. Review*, II. Ser. 104, 300—305 (1956)]; qui, invece dato che, come si è detto prima, sotto l'attuale punto di vista, il caso della conducibilità finita non presenta interesse, si tratta direttamente ed estesamente il caso limite, fornendo occasionalmente qualche maggiore dettaglio applicabile anche ai risultati già conseguiti da Baños. Per mettere in evidenza dei casi particolari in cui è possibile realizzare praticamente i tre tipi di onde ricavati in via teoretica, si passa a trattare due casi di onde piane: onde che si propagano in direzione ortogonale al campo magnetico primario e che danno luogo a due tipi misti (uno di compressione ed uno di distorsione) e ad uno puramente



elastico (di distorsione) ed onde che si propagano parallelamente al campo magnetico primario e che danno luogo ad un solo tipo misto (di distorsione) e ad un tipo puramente elastico (di compressione); nei detti casi è possibile ottenere la soluzione completa per le equazioni scalari del problema (relative alle componenti della velocità), che assumono l'aspetto dell'equazione delle corde vibranti. Si studiano poi casi particolari di onde a divergenza nulla e a rotazione nulla, ciascuno dei quali dà luogo ad un tipo di onde miste, riguardante le componenti della velocità normali al campo magnetico primario, e ad uno di onde puramente elastiche, relativo alle componenti della velocità parallele a quello; in entrambi i casi si accenna a soluzioni particolari del problema che mostrano la concreta possibilità di realizzare i tipi suddetti di onde. Si indica infine come, dopo aver calcolato la velocità  $\vec{v}$ , si può calcolare il campo elettrico  $e$ , a meno di un inessenziale termine statico, il campo magnetico; entrambi i campi mantengono lo stesso carattere di propagazione rilevato per la velocità, mentre, com'è noto, in un mezzo di conducibilità elettrica infinita i fenomeni puramente elettromagnetici non possono essere altro che statici.

*Dan Gh. Ionescu.*

**Pai, S. I.: Shock wave propagation in an infinitely electrically conductive gas with transverse magnetic field and gravitation.** Z. angew. Math. Mech. **39**, 40—49 (1959).

Si studia il moto unidimensionale prodotto da una forte onda d'urto (generata dal moto di un corpo) in un gas dotato di infinita conducibilità elettrica e soggetto alla gravità e a un campo magnetico trasversale rispetto al moto. Dopo avere accennato brevemente alla trattazione del problema dal punto di vista euleriano, lo si affronta dal punto di vista lagrangiano, ottenendone la soluzione mediante uno sviluppo in serie di potenze del tempo  $t$  e dell'ascissa iniziale  $s$  della particella, limitandosi a piccoli valori di entrambe le variabili. I relativi coefficienti vengono calcolati nel caso particolare in cui sono costanti la temperatura e il campo magnetico trasversale: confrontando con i valori ottenuti in assenza del campo magnetico, si riscontra che la presenza di tale campo fa aumentare la velocità dell'onda d'urto e, a parità di moto del corpo che la provoca, è più ampia la regione in cui l'onda stessa fa sentire il suo effetto. Al di là dell'intervallo di validità dello sviluppo in serie, si ricorre a un procedimento di integrazione numerica; di entrambi i procedimenti si fornisce un criterio di controllo dell'errore.

*R. Nardini.*

**Germain, Paul: Sur la structure de certaines ondes de choc dans un fluide conducteur en présence d'un champ magnétique.** C. r. Acad. Sci., Paris **248**, 1929—1931 (1959).

Ci si riferisce allo studio di certi moti rettilinei stazionari, paralleli all'asse  $x$ , nei quali le grandezze dipendono solo dalla coordinata  $x$ , mentre l'induzione magnetica è normale al detto asse; l'equazione di stato del fluido è supposta soggetta alle note condizioni di H. Weyl. Affrontando anzitutto il caso in cui i coefficienti di viscosità (idrodinamica  $m$  e magnetica  $\eta$ ) e il coefficiente di conducibilità termica  $\lambda$  sono nulli, si dimostra la possibilità di un'onda d'urto che separa due stati costanti e che generalizza la teoria di Weyl relativa al caso in cui manca il campo elettromagnetico. Quando invece  $m$ ,  $\eta$   $\lambda$  e sono diversi da zero, si può dimostrare l'esistenza e l'unicità di un'onda d'urto in condizioni di ampia generalità (in particolare senza restrizioni che riguardano i detti coefficienti).

*R. Nardini.*

**Clark jr., Edward L. and Donald Earl Ordway: An experimental study of jet-flap compressor blades.** J. Aero-Space Sci. **26**, 698—702, 738 (1959).

**Barglăzan, Aurel, Iosif Preda, Mircea Popoviciu et Octavian Popa: Nouvelles formes de diffuseurs-aspirateurs pour les turbines hydrauliques.** Bul. sti. tehn. Inst. politehn. Timișoara, n. Ser. **2** (16), Nr. 1, 17—29, français. und russ. Zusammenfassg. **29** (1957) [Rumänisch].



**Das. Arabindo:** Untersuchungen über den Einfluß von Grenzschichtzäunen auf die aerodynamischen Eigenschaften von Pfeil- und Deltaflügeln. *Z. Flugwiss.* 7, 227—242 (1959) = DFL-Bericht Nr. 110 der Deutschen Forschungsanstalt für Luftfahrt e. V., Braunschweig 1959. DM 5,—.

Die vorteilhaften Eigenschaften von Pfeilflügeln bei hohen Unterschallgeschwindigkeiten werden z. T. durch die erhöhte Abreißgefahr am Außenflügel und das hierdurch verursachte instabile Kippmoment bei großen Anstellwinkeln kompensiert. Durch einen Grenzschichtzaun kann nun das Abreißverhalten am Außenflügel günstig beeinflusst werden. Allerdings entsteht am Ort des Zauns ein Auftriebsseinbruch. Die Ursachen hierfür und die Wirkungsweise des Zaunes überhaupt werden in der vorliegenden, ausführlichen Arbeit experimentell geklärt. Im Windkanal wurden an Pfeil- und Deltaflügeln die Strömungen auf der Saugseite durch ein Anstrichverfahren sichtbar gemacht, außerdem wurden Dreikomponenten-Kraftmessungen, Druckverteilungs-, Nachlauf- und Abwindmessungen (nach der Fadengittermethode) durchgeführt. Die Zaunform und die Lage des Zaunes auf dem Flügel wurden hierbei variiert. Während der Zaun bei kleinen Anstellwinkeln die aerodynamischen Eigenschaften nicht wesentlich verbessert, ist er bei großen Anstellwinkeln bei Pfeilflügeln sehr wirksam, dagegen bei Deltaflügeln praktisch unwirksam. Der Gesamtauftrieb wird nicht wesentlich beeinflusst, dagegen sehr das Kippmoment. Zwei Zäune sind nicht wirksamer als ein einziger, richtig placierter Zaun. Weiterhin wurde die Auftriebsverteilung an einem Pfeilflügel mit Zaun nach dem Truckenbrodt'schen Tragflächenverfahren unter einfachen Annahmen über die lokale Wirkung des Zauns berechnet und in recht guter Übereinstimmung mit den Messungen befunden.

*E. Becker.*

**Miele, Angelo:** Flight mechanics and variational problems of a linear type. *J. Aero-Space Sci.* 25, 581—590 (1958).

Several new problems of applied mathematics have arisen in the analysis of trajectories of high-speed aircraft and missiles which cannot be handled by the use of the methods of performance analysis. These problems fall under the domain of the calculus of variations represented as the problems of linear type. The characteristic of these problems is that the functional forms to be extremized, the differential equations of constraints, and the eventual isoperimetric conditions only involve the first power of the derivatives of the unknown functions. For these problems the Legendre-Clebsch condition fails to yield any information on the extremal nature of the extremal arcs; moreover, the Weierstrassian function is zero along a major portion of the Eulerian solution. Using a new technique based on Green's theorem, these difficulties are overcome. First, one treats the linear problems of the simplest type,

namely, a functional  $J = \int_{x_1}^{x_2} (\Phi + y'\Psi) dx$ , where  $\Phi$  and  $\Psi$  are given functions of the  $x$  and  $y$ , and  $y' = dy/dx$ . The solution of the Euler's differential equation of the calculus of variations is  $\Psi_x - \Phi_y = 0$  and shows that this problem is a degenerate variational problem. This solution represents an equation in finite terms. If the coordinates of the end points (1 and 2) are consistent with this equation then it represents the extremal arc associated with the variational problem, on the contrary, the variational problem has no solution. A more important type of the linear problem occurs in the case when the arc  $y = y(x)$  is consistent with a non-holonomic constraint of the form  $y' + f(x, y, z) = 0$ ,  $z_1 \leq z \leq z_2$ . The new variable  $z$  is represented as  $z = z(p)$ , where  $p$  is a parameter having the following properties: (a)  $-\infty \leq p \leq p_1$ ,  $z = z_1$ ,  $dz/dp = z' = 0$ ,  $z'' = 0$ ; (b)  $p_2 \leq p \leq +\infty$ ,  $z = z_2$ ,  $z' = 0$ ,  $z'' = 0$ ; (c)  $p_1 < p < p_2$ ,  $z' \neq 0$ . As a further step the problem involving a nonholonomic and an isoperimetric constraint is considered. Several physical problems are introduced: a) involving a nonholonomic constraint (burning program for the maximum range of a rocket-powered aircraft in level flight, burning program for the maximum endu-

range of a rocket-powered aircraft in level flight, burning program for the maximum increase in altitude of a rocket in vertical flight — zero drag and quadratic drag law, brachistocronic climbing technique for a turbojet powered aircraft, and a degenerate case — burning program extremizing the time of flight for a rocket in vertical flight — zero drag), b) involving both a nonholonomic constraint and an isoperimetric constraint (burning program maximizing the range of a rocket-powered aircraft for given time-level flight, brachistocronic burning program of a rocket in vertical flight for given altitude increase — quadratic drag law, brachistocronic climbing maneuver of a turbojet powered aircraft for given horizontal distance), c) application of Green's theorem (maximum increase in altitude for a rocket in vertical flight — zero drag, maximum range of a rocket-powered aircraft in level flight, brachistocronic burning program of a rocket in vertical flight for given altitude rise — quadratic drag law). The author observes that this new technique is of limited interest as far as the calculus of variations is concerned, because it only applies to linear problems. Nevertheless, as far as the mechanics of flight is concerned, the use of Green's theorem is rather important, in view of the frequent occurrence of linear problems in the path analysis of turbojet and rocket-powered vehicles. [See A. Miele, *Jet Propulsion* 28, 10, 675—684 (1958)].

*D. Rašković.*

**Carstoiu, John:** On a minimum-time flight path of a jet aircraft. *J. aeronaut. Sci.* 24, 704—706 (1957).

Für den zeitoptimalen Flug eines Strahlflugzeugs werden unter Beschränkung auf Bewegungen in einer vertikalen Ebene die Euler-Lagrangeschen Differentialgleichungen des zugehörigen anholonomen Variationsproblems angegeben. Die durch den Brennstoffverbrauch bedingte Gewichtsvariabilität, die Veränderlichkeit des Motorschubs (bei fester Gashebelstellung) mit Höhe und Machzahl und die Machabhängigkeit der aerodynamischen Beiwerte des Widerstandes und Auftriebs werden ähnlich wie vom Ref. (s. dies. Zbl. 65, 393) berücksichtigt. — "As the time  $t$  is precisely the variable to be minimized, one has to choose some other variable as an independent one". Verf. wählt daher die Flughöhe als unabhängige Variable. Hiergegen ist zweierlei einzuwenden. Zunächst stimmt die zitierte Motivierung nicht; man hat nur die Begriffe laufende Bahnzeit und totale Flugzeit fein säuberlich zu unterscheiden und das Problem parameterinvariant zu formulieren (siehe des Ref. Arbeit, dies. Zbl. 58, 179), und  $t$  kann wohl als unabhängige Variable verwendet werden. Überdies gibt es keine andere mit Sicherheit monotone Variable als  $t$  oder die mit ihr verwandte Bogenlänge der Flugbahn. In manchen Fällen dürfte die Flughöhe äußerst ungeeignet sein, ist es doch bekannt, daß mit großem Schubüberschuß im Überschallflug versehene Interzeptorflugzeuge — besonders wenn sie in bezug auf den transsonischen Widerstandsanstieg nicht optimiert sind — optimale Steigzeiten nur dadurch erreichen können, daß sie vom anfänglichen Unterschallsteigen durch einen zwischengeschalteten Gleitflug in geeigneter Höhe in die schließliche Überschallsteigbahn übergehen. Die Flughöhe ist also keinesfalls monoton längs der Bahn, und bei flachen relativen Maxima und Minima der Bahn geht die Genauigkeit der numerischen Rechnung in der Umgebung solcher Stellen verloren.

*H. Behrbohm.*

**Tipei (Tipej), N.:** Instationäre Bewegung eines Flugzeuges in der Horizontalebene. *Acad. Républ. popul. Roumaine, Revue Méc. appl.* 3, 199—213 (1958) [Russisch].

Verf. stellt die Bewegungsgleichungen für den Kurvenflug in einer horizontalen Ebene, d. h. ohne Veränderung der Flughöhe auf. Dabei wird angenommen, daß die Kurve „sauber“ geflogen wird, d. h. die Resultierende aus Eigengewicht und Zentrifugalkraft stets in die Symmetrieebene des Flugzeuges fällt. Betrachtet werden nur die Gleichgewichtsbedingungen für die Kräfte; die Gleichgewichtsbedingungen für die Momente werden durch geeignete Steuerbewegungen als erfüllt angesehen.



Als Triebwerk wird ein Luftschraubentriebwerk angenommen. Untersucht werden folgende Sonderfälle: Kurve mit konstantem Anstellwinkel und veränderlicher Fluggeschwindigkeit, beschleunigte Bewegung auf einer Kreisbahn, Kurve mit konstanter Querneigung, Kurve mit konstanter Beschleunigung in Bahnrichtung. Kurve mit einer zeitabhängigen, vorgegebenen Querneigung. *G. Bock.*

**Dun, Min-Dé:** On the stability of elastic plates in a supersonic stream. *Soviet Phys., Doklady* 3, 479—483 (1959). Übersetz. von *Doklady Akad. Nauk SSSR* 120, 726 (1958).

The starting point is the linearized integro-differential equation for the deflection function of a vibrating elastic plate of width  $a$  and small thickness  $h$ , moving with a supersonic velocity. The task is to investigate the stability phenomena. The frequency is expressed in terms of the Strouhal number. The aerodynamic pressure on the surface of the plate is obtained from Cauchy-Lagrange equation for the case of a vibrating wing of infinite span with the condition that the elastic plate and the gaseous medium in the immediate vicinity of their contact surface vibrate together. The chosen form of the deflection function is inserted into the expression for the aerodynamic force. This leads to a system of four equations. In one of the steps of the procedure of solving them, there is applied a contour integration consisting of a circle and a segment of the straight line. The determination of the constants of integration from the boundary conditions leads to the characteristic equation whose form obviously depends upon the type of supporting the edges. The conditions for the stability are given by the magnitude of the integral derived on the base of the residue theorem. In the case of low frequency vibrations with  $M^2 \gg 1$ , the aerodynamic pressure is given by expression identical to that one obtained from the linear piston theory. The type of the integro-differential equation, used in the present work, appears in some other cases of supersonic flow like: a single plate of infinite span, a multiple-span plate with supports of arbitrary type, etc.

*M. Z. v. Krzywoblocki.*

**Emmons, Howard W.:** Combustion — an aeronautical science. *J. Aero-Space Sci.* 25, 730—741 (1958).

Die wissenschaftlichen Grundlagen der Verbrennungsvorgänge in den Brennkammern von Strahl- und Raketentriebwerken werden kurz dargelegt und die Grenzen aufgezeigt, die einem vollen Verständnis der Vorgänge entgegenstehen. In die Untersuchung werden sowohl die chemischen als auch die hydrodynamischen Vorgänge einbezogen. Schließlich werden die dimensionslosen Parameter besprochen, die von Einfluß sein können. *W. Wuest.*

**Nachbar, W. and L. Green jr.:** Analysis of a simplified model of solid propellant resonant burning. *J. Aero-Space Sci.* 26, 518—526 (1959).

Als Energiequelle für selbsterregte akustische Schwingungen der Pulvergase in der Brennkammer einer Feststoffrakete kommt wohl nur der Pulverabbrand selbst in Frage, jedoch ist der Mechanismus dieser periodischen Energieabgabe noch weitgehend unbekannt. In der vorliegenden Untersuchung wird eine beachtenswerte Theorie dieser Erscheinung gegeben, und zwar wird ein Modell zugrunde gelegt, bei dem die Pulvergase parallel zur Oberfläche des unverbrannten Pulvers und von diesem durch eine dünne Übergangsschicht getrennt abströmen. Mit plausiblen Annahmen über den Einfluß der Strömungs- bzw. der Abbrandgeschwindigkeit auf die Dicke der Übergangsschicht und damit auf den Wärmetransport durch diese Schicht hindurch reduziert sich das Problem im wesentlichen auf die Wärmeleitungsgleichung für das feste Pulver in Verbindung mit einer Randbedingung, welche die Kontinuität des Wärmefflusses an der Pulveroberfläche feststellt. Der Ansatz kleiner sinusförmiger Störungen der Pulvertemperatur und der Abbrandgeschwindigkeit führt hier auf ein zweifaches Eigenwertproblem, und zwar existiert unter der Voraussetzung, daß die Modellkonstanten einer gewissen Größenbeziehung genügen, eine



und nur eine von Null verschiedene reelle Störungsfrequenz  $\omega^*$ , die jedoch nur dann auch eine Lösung der gesuchten Art definiert, wenn die Laufzeit  $\tau$  für die Umwandlung des Aggregatzustandes einer diskreten Folge  $\tau_n(\omega^*)$  angehört. Nach dieser Theorie wird Resonanz vor allem durch große Reaktionsgeschwindigkeiten und hohe Flammentemperaturen begünstigt, ein Ergebnis, das sich mit der Erfahrung deckt. Auch hinsichtlich anderer Folgerungen aus dieser Theorie hat sich nach Ansicht der Verf. bislang noch kein Widerspruch zum Experiment ergeben, wenn auch bemerkt wird, daß infolge der Linearisierung einzelne Phänomene der instabilen Pulververbrennung noch nicht erklärt werden können.

H. Stümke.

**Guañ Din-chua (Kuan Ting-hua): Diffraction of surface sound waves at semi-infinite impedance tubes and rods.** Soviet Phys., Doklady 4, 121—124 (1959), Übersetz. von Doklady Akad. Nauk SSSR 124, 559—562 (1959).

Es wird die strenge Lösung der Diffraktionserscheinungen von Schallwellen hergeleitet, die sich an einem Rohr, das nur nach einer Richtung ins Unendliche ausläuft, gegen die Öffnung hin ausbreiten. Die für die Lösung angewandte Methode fußt auf dem Verfahren von Wiener-Hopf. Mathematisch erfordert die Aufgabe, daß es möglich ist, die beiden Integralgleichungen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i w z} \cdot F(w) \cdot dw = -A \cdot e^{-i h z} \quad (z < 0),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i w z} \cdot v \cdot \Psi(w) \cdot F(w) \cdot dw = 0 \quad (z > 0), \quad (v = \sqrt{k^2 - w^2}, \operatorname{Im} w > 0)$$

mit der unbekannten Funktion  $F(w)$  aufzulösen. Hierin ist die Funktion  $\Psi$  regulär, strebt für  $|w| \rightarrow \infty$  gegen die Einheit und hat in dem Streifen  $-k_0 \leq \operatorname{Im} v \leq k_0 < \operatorname{Im} h$  keine Nullstellen. Für das Feld innerhalb des Rohres kann die streng gültige Lösung in Form einer Reihenentwicklung mit Hilfe des Residuensatzes hergeleitet werden. Das Feld in großen Entfernungen ist mittels der Sattelpunktmethode berechenbar. Die Diffraktion der Wellen an einem Stabe wird nach der Methode der unendlich vielen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten näherungsweise gelöst.

H. Buchholz.

**Miles, John W.: Free surface oscillations in a rotating liquid.** Phys. Fluids 2, 297—305 (1959).

In einem vertikalen Kreiszylinder rotiere eine reibungslose Flüssigkeit mit freier Oberfläche wie ein starrer Körper. Verf. untersucht die harmonischen Schwingungen dieser Flüssigkeit in linearer Näherung, wobei im Gegensatz zu früheren Arbeiten über dieses Thema nicht mehr die Flachwasser-Vernachlässigungen vorausgesetzt werden. Es zeigt sich, daß dann die Flüssigkeitsbewegung relativ zum rotierenden System nicht wie bei flachem Wasser wirbelfrei bleibt. Weiter wird gezeigt, daß sich bei einem tiefen, flüssigkeitsgefüllten Zylinder die Rotation in einer Aufspaltung der Frequenzpaare der nichtrotierenden Flüssigkeit bemerkbar macht. Außerdem treten neue Eigenschwingungen auf, die kein Analogon in der nichtrotierenden Flüssigkeit haben. Bei diesen Eigenschwingungen klingt außerdem die Bewegung nicht exponentiell mit der Tiefe ab. Verf. wendet die Ergebnisse auf die erzwungenen Transversalschwingungen eines zylindrischen Tanks an.

E. Becker.

**Roseau, Maurice: Nouvelles recherches sur la théorie des ondes liquides de gravité en profondeur variable.** J. Math. pur. appl., IX. Sér. 38 (offert en hommage à M. Fréchet) 25—59 (1959).

Mit funktionentheoretischen Methoden wird für Wasserwellen, die sich parallel zur Strandlinie einer im Winkel  $\alpha$  geneigten Böschung bewegen, die Existenz und das Verhalten an der Strandlinie untersucht. Als entscheidend erweist sich der Wert einer dimensionslosen Wellenzahl  $k$ . Frühere Untersuchungen des Verf. über den Fall  $k < 1$  werden ergänzt (Publ. sci. techn. Ministère de l'Air, Paris 1952). All-

gemein gibt es zu jedem  $k > 1$  zwei Lösungen, die sich am Strand wie  $r^{-\pi/x}$  verhalten; ist aber  $k = 1/\sin(n\alpha)$  mit ungeradem  $n$ , so gibt es eine am Strand beschränkte Lösung, und für gerades  $n$  gibt es eine Lösung mit logarithmischer Singularität.

*K. Eggers.*

**Broecker, E.: Vermischung von Flüssigkeits- oder Gasströmen bei kleiner Gesamtdruckänderung.** Forsch. Gebiete Ingenieurwes. **24**, 169—177 (1958); **25**, 17—25 (1959).

Das Vermischen parallel gerichteter Flüssigkeits- oder Gasströme verschiedener Geschwindigkeit ergibt bei abgegrenztem Mischraum im allgemeinen einen Unterschied der Druckkräfte an den Endflächen des Vermischungsgebietes, der mit den Kräften des äußeren Systems im Gleichgewicht stehen muß. Für den allgemeinen Fall, daß die Teilströme verschiedene Dichte haben, lassen sich geschlossene Lösungen angeben, deren Geltungsbereich durch die Änderung des Gesamtdrucks beim Vermischen gekennzeichnet ist. Näherungsgleichungen und graphische Lösungen ermöglichen ein schnelles Abschätzen des Wirkungsgrades und des Energieaufwandes von Strahlapparaten. Die experimentellen Untersuchungen mit zylindrischem Mischrohr liefern die Mischlänge als Funktion des Druckverhältnisses. Das divergente Mischrohr erzeugt stets kleinere, das konvergente Mischrohr z. T. größere Druckverhältnisse als das zylindrische Mischrohr. Bei genügend großem Unterschied von Freistrom- und Mischrohrquerschnitt nimmt danach die Druckzahl etwa linear mit der Volumzahl ab.

*W. Wuest.*

**Escande, Léopold: Surpression à la base d'une chambre d'équilibre à étranglement.** C. r. Acad. Sci., Paris **248**, 1733—1737 (1959).

On considère une cheminée d'équilibre à étranglement, non déversante ou comportant un seuil déversant, et ayant une longueur pratiquement infinie. Lors d'une fermeture instantanée, la plus forte surpression correspond, soit à l'instant initial, soit à l'instant où le plan d'eau atteint sa cote maximum. Discussion des divers cas possibles.

*Dan Gh. Ionescu.*

**Escande, Léopold et Henri Godines: Étranglement rationnel pour chambres d'équilibre déversantes.** C. r. Acad. Sci., Paris **248**, 1893—1895 (1959).

Faisant suite à un travail antérieur, (voir le Réf. précédent), cette Note contient des abaques donnant, pour une surpression déterminée, l'étranglement le plus efficace, ainsi que le débit maximum déversant et le volume total déversé.

*Dan Gh. Ionescu.*

**Escande, Léopold: Calcul des aquedues des bassins de Radoub.** C. r. Acad. Sci. Paris **248**, 2539—2541 (1959).

Un aqueduc  $A_n B$  prenant l'eau dans la mer, en  $A_n$ , alimente le bassin par son extrémité  $B$  et par des dérivations latérales. On donne des formules permettant le calcul des débits pénétrant dans le bassin par les dérivations latérales, ainsi que le débit total.

*Dan Gh. Ionescu.*

**Jardin, Hubert, Sébastien Gerber et Jean Nougaro: Sur la similitude du phénomène de ressaut en canal horizontal.** C. r. Acad. Sci., Paris **248**, 2553—2554 (1959).

Si l'on considère un ressaut formé en canal horizontal par un exhaussement  $a$  du radier du canal, on peut considérer comme paramètres du phénomène la longueur  $L$  du bassin et la hauteur  $a$ . Les AA. ont réalisé des expériences sur des bassins répondant aux caractéristiques suivantes:  $L = 189$  cm,  $a = 3$  cm;  $L = 154$  cm,  $a = 6$  et 4 cm;  $L = 118$  cm,  $a = 4,3$  et 2 cm. Les résultats montrent une concordance générale et vérifient, par conséquent, les lois de la similitude avec une erreur inférieure à 2%. On peut donc préciser que le phénomène du ressaut provoqué par un exhaussement du radier suit les lois de similitude. Il est donc possible d'étudier rigoureusement ce type d'écoulement sur modèle réduit.

*Dan Gh. Ionescu.*

**Wobus, Gerhard: Zur Praxis der Tosbeckenbemessung.** Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden **8** (1958/59), 707—716 (1959).

Harris, Colin: Correlation of sedimentation-rates by dimensionless groups. *Nature* 183, 530—531 (1959).

Die Sedimentationsgeschwindigkeit einer Suspension kann bei passender dimensionsloser Auftragung durch eine universelle Kurve in Abhängigkeit von der Blakezahl dargestellt werden. Die Blakezahl ist eine modifizierte Reynoldszahl, bei der die charakteristische Länge durch das Verhältnis von Volumen zu Oberfläche der Partikel bestimmt ist.

W. Wuest.

Gheorghita, St. I.: Flows in harmonically nonhomogeneous porous media. *Bull. math. Soc. Sci. math. phys. R. P. R., n. Sér.* 2 (50), 19—26 (1958).

Beim Studium der stationären, als praktisch horizontal verlaufend vorausgesetzten Strömung einer Flüssigkeit in einem nichthomogenen, isotropen porösen Medium der Durchlässigkeit  $k(x, y)$  ist eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung vom elliptischen Typus für den Druck  $p$  in der Flüssigkeit zu lösen. Wie Salechov bzw. Nasyrov gezeigt haben, vereinfacht sich diese Aufgabe, wenn  $\sqrt{k}$  eine harmonische Funktion des Ortes ist bzw. der Helmholtz-Gleichung  $\Delta\sqrt{k} + \alpha^2\sqrt{k} = 0$  genügt. In diesen Fällen wird das Medium „harmonisch-nichthomogen“ bzw. „Helmholtz-nichthomogen“ genannt. Es ist dann eine Funktion  $\Phi = p/\sqrt{k}$  zu finden, die harmonisch ist bzw. ebenfalls der Helmholtz-Gleichung genügt. In der vorliegenden Arbeit werden die in Frage kommenden Randbedingungen für  $\Phi$  formuliert und Lösungsmethoden angegeben. Als Anwendungen werden der eindimensionale Fall bei dem  $\sqrt{k}$  abschnittsweise eine lineare Funktion des Ortes ist, und der ebene Fall bei dem  $\sqrt{k}$  abschnittsweise konstant ist bzw. logarithmisch von  $r$  abhängt, untersucht.

K. Desoyer.

Gheorghita, St. I.: A three-dimensional motion of the artesian waters. *Arch. Mech. stosow.* 10, 607—613, russ. Zusammenfassg. 613 (1958).

In this paper, the author considers a three-dimensional incompressible motion of Artesian waters admitting an analytical solution, in the case of both steady and unsteady motions. Assume a porous medium extended to infinity and limited by the following three surfaces in a Cartesian coordinate system with the axis directed vertically upwards: 1.  $S_1: z = 0, x < 0$ ; 2.  $S_2: x^2 + y^2 + z^2 - 2za + a^2 = R^2, x < 0, (a > R)$ ; 3.  $S_3: x^2 + y^2 - 2za > R^2 - a^2, x = 0$ . The surface  $S_1$  is in contact with an unlimited basin which contains a heavy fluid, the surface  $S_2$  is part of a surface of a well through which fluid is extracted from the basin, and  $S_3$  is impervious. The porous medium is assumed homogeneous and isotropic and is characterized by the filtration coefficient  $k$ . In order that no free surface should form in the porous medium, the level of the fluid in contact with  $S_1$  must not descend during the motion below the plane  $x = 0$ , the same condition having to be considered for the fluid in contact with  $S_2$ . It is assumed that the level of the free fluid in contact with  $S_1$  is always above the level of the free fluid in contact with  $S_2$ . The problem of determining the motion consists in finding the potential  $\varphi$  of the filtration velocity, from which one can derive the velocity and pressure in every point in the medium, as also the discharge of the fluid passing through  $S_1$  and  $S_2$ . This function  $\varphi$  is harmonic in the domain occupied by the porous medium, and in the case of the usual hypotheses of the underground hydro- and gas dynamics it will have to be constant on  $S_1$  and  $S_2$ , and its normal derivative should vanish on  $S_3$ . Taking  $\varphi$  as equal to zero on  $S_1$ , one arrives at the following mixed boundary problem: Let a harmonic function  $\varphi$  be determined, regular in the domain  $D$  limited by the surface  $S_i$ , ( $i = 1, 2, 3$ ), and bearing in mind that  $\varphi = 0$  on  $S_1$ ,  $\varphi = kH$  on  $S_2$ ,  $\partial\varphi/\partial n = 0$  on  $S_3$ . By introducing bi-spherical coordinates, the problem is solved for the steady and unsteady motion. The results are applied to a problem of the impact theory on perfect incompressible fluids.

Dan Gh. Ionescu.



Carrier, G. F.: The mixing of ground water and sea water in permeable subsoils. *Fluid Mechanics* 4, 479—488 (1958).

The subterranean mixing in permeable media of sea water and ground water studied. A physical model for the mixing process is introduced. The analysis is carried to the point where the determination of the salinity distribution of the ground water in a given subsoil requires only the solution of an elementary linear ordinary differential equation.

*Dan Gh. Ionescu.*

Mustafaev, V. V.: Verdrängung des Erdöls durch Gas in einem porösen Medium. *Akad. Nauk Azerbajdž. SSR, Doklady* 15, 787—790, russ. Zusammenfassg. 790 (1959) [Azerbajdžanisch].

## Elektrodynamik. Optik:

Bopp, Fritz: Bemerkungen zur Konforminvarianz der Elektrodynamik und der Grundgleichungen der Dynamik. *Ann. der Physik*, VIII. F. 4, 96—102 (1959).

Rappel de l'invariance de la théorie électromagnétique par transformation conforme [Cunningham et Bateman, (1910)]. Extension à l'équation de Galilée-Newton relativiste, où la masse est transformée comme une fréquence.

*O. Costa de Beauregard.*

Collins, W. D.: On the solution of some axisymmetric boundary value problems by means of integral equations. I: Some electrostatic and hydrodynamic problems for a spherical cap. *Quart. J. Mech. appl. Math.* 12, 232—241 (1959).

Verf. behandelt Randwertprobleme der Elektrostatik und Hydrodynamik für eine dünne Kugelkappe. Betrachtet werden: Kappe auf konstantem elektrischen Potential, geerdete Kappe im homogenen elektrischen Felde, Kappe im Strömungsfelde einer idealen Flüssigkeit, langsame stationäre Drehung der Kappe in einer viskosen Flüssigkeit.

*G. Kelbg.*

Freud, Géza: Über das Thomsonsche Prinzip. *Publ. math. Inst. Hungar. Acad. Sci.* 3, 21—24, russ. Zusammenfassg. 24 (1958).

Die Bestimmung der Stromverteilung in Leitern, in welchen Strom und Spannung nicht-linear zusammenhängen, erlangt immer größere Bedeutung für die praktische Elektrotechnik. Dabei ist die Spannung oft eine Potenz der Stromstärke. Wenn das Stromlinienbild bereits in guter Näherung bekannt ist, so kann folgende leichte Verallgemeinerung des Thomsonschen Prinzips zur angenäherten Berechnung der Stromverteilung nützlich sein (Anwendungen sollen in einer Arbeit von J. Rinagel gegeben werden): Die idealen Leiter  $K_1, \dots, K_n$  liegen an festen Spannungen und sind eingebettet in ein homogenes Medium; in diesem besteht zwischen zulässigen Größen  $i$  (Stromdichte) und  $E$  (elektrischer Feldstärke) das Potenzgesetz  $E = \alpha i^{\beta-1} i$ , wo  $i$  den Betrag des Vektors  $i$  bezeichnet und  $\alpha, \beta$  positive Konstanten sind. Die tatsächlich auftretenden Größen seien  $i_0, E_0$ . Falls die zulässigen Größen so eingeschränkt werden, daß  $i$  und  $i_0$  stets die gleichen Quellen und Senken besitzen und in jedem Punkt parallel und gleichgerichtet sind, so wird das räumliche Integral der Verlustleistung  $W = \frac{1}{2} \int E i d\tau$  für  $i = i_0, E = E_0$  zum Minimum.

*H.-J. Hoehnke.*

Morozov, A. I.: Interaction between a moving current-carrying wire and a conducting wall. *Soviet Phys., JETP* 4, 920—921 (1957), Übersetz. von *Žurn. éksp. teor. Fiz.* 31, 1079—1080 (1956).

Verf. untersucht die Wechselwirkung, die beim Bewegen eines geraden stromdurchflossenen Drahtes auftritt, der sich in der Nähe eines Leiters mit ebener Oberfläche befindet. Die Kräfte, die durch den induzierten Leitfähigkeits- und Verschiebungs-Strom hervorgerufen werden, werden diskutiert.

*G. Kelbg.*

**Abdel-Messih, Moheb Aziz:** Zeros and poles of output voltage of 3-terminal potentiometer networks. *Z. angew. Math. Phys.* **10**, 207—215 (1959).

Die Arbeit liefert einen Beitrag zur Theorie der Netzwerke aus Festwiderständen und gemeinsam betätigten Potentiometern, wie sie als Funktionsgeneratoren für Analogrechner verwendet werden. Die Übertragungsfunktion eines solchen Netzwerkes ist eine rationale Funktion der gemeinsamen Einstellung aller Regelwiderstände. Bezeichnet man diese Einstellung mit  $x$ , wobei  $0 \leq x \leq 1$  gelten soll, und macht die Substitution  $x = 1/(1 + y)$ , so hat das Netzwerk als Funktion von  $y$  die gleichen Eigenschaften wie ein entsprechendes aus Widerständen, Kondensatoren und nicht miteinander gekoppelten Spulen aufgebautes Netzwerk als Funktion der Frequenz. Die bekannten Sätze der Vierpoltheorie über die mögliche Verteilung von Nullstellen und Polen der Übertragungsfunktion und des Eingangswiderstandes in der komplexen Frequenzebene liefern dann unmittelbar eine Aussage über die entsprechende Verteilung in der komplexen  $x$ -Ebene. *G. Bosse.*

**Stojanović, Ilija:** Der Einfluß der Gruppengeschwindigkeit auf die Verzerrung eines frequenz-modulierten Signals. *Publ. Fac. Électrotechn. Univ. Belgrade, Sér. Télécommun. Électron.* **Nr. 10**, 1—13 (1959) [Serbo-kroatisch].

**Milanković, Lj.:** Eine Näherungsformel für die Zeitkonstante der Aufladung des Stoßspannungs-Generatoren. *Publ. Fac. Électrotechn. Univ. Belgrade, Sér. Énerget.* **Nr. 9**, 1—13, deutsche Zusammenfassung. 14 (1959) [Serbo-kroatisch].

Für Stoßspannungs-Generatoren nach Marxscher Vielfachschaltung wird eine Näherungsformel für die Zeitkonstante der Spannung an der letzten Stufe des Stoßgenerators angegeben, die für die Aufladezeit des Generators maßgebend ist. Es werden zuerst die Zeitkonstanten für die Generatoren mit 1, 2, 3, 4 und 5 Stufen bestimmt, unter Vernachlässigung der Glieder, in welchen die symbolische Veränderliche (Beschreibung der elektrischen Größen durch komplexe Variable. Die Red.) beim Übergang von symbolischer auf exakte Lösung in höheren Potenzen vorkommt. Deshalb erhält man nur Näherungslösungen. Durch Vergleich dieser fünf Zeitkonstanten wird eine Formel entwickelt, die für beliebige Stufenzahl gültig ist. Das wird mathematisch begründet. Am Ende wird die ausgeführte Formel mit anderen bekannten Näherungsformeln verglichen und ihre Abweichungen bestimmt. Nach der Zusammenfassung des Autors.

**Milanković, Lj.:** Die Bedingungen für die Phasenumkehr beim Leiterbruch. *Publ. Fac. Électrotechn. Univ. Belgrade, Sér. Énerget.* **Nr. 10**, 1—5, deutsche Zusammenfassung. 6 (1959) [Serbo-kroatisch].

Es werden die Bedingungen gesucht, für welche die Mitlaufkomponente des Stromes bei einem Leiterbruch Null ist. Dann werden die bestimmten Verhältnisse zwischen Null- und Gegenlaufkomponente des Scheinwiderstandes auf beiden Seiten des Bruches bestimmt. Dieses Verhältnis ist ähnlich jenem in Kreisen mit gesättigten Eisendrosseln. Weiter werden die Strom- und Spannungskomponenten am Ort des Leiterbruches berechnet.

Nach der Zusammenfassung des Autors.

**Hellgren, Gösta:** On the principles and angular accuracy of monopulse radar. *Svenska Aeroplan A. B., Techn. Notes* **42**, 46 p. (1959).

Der Aufsatz berichtet über die allgemeinen Prinzipien eines eindimensionalen, winkelmessenden Einzelpulsradargeräts. Im eindimensionalen Falle besteht der Zweck des Radars darin, den Richtungswinkel in der Ebene des Ziels zu bestimmen. Es interessiert dabei die allgemeine Beziehung für die Größe des auszustoßenden Signals bei einem oder bei mehreren Zielen. Die dafür maßgebenden Formeln werden hergeleitet. Ferner wird unterschieden zwischen einem Monopulsradar, in dem die Amplituden oder die Phasenlagen miteinander verglichen werden. Die Unterschiede zwischen beiden Typen werden formelmäßig erfaßt, und beide Fälle werden eingehend diskutiert. Bei mehr als einem Ziel interessiert natürlich auch die Trennschärfe der Geräte, d. h. also die Frage, bei welchen Winkelabständen das Gerät noch zwei verschiedene Ziele unterscheiden kann. Andere der Fragen, die alle auch in der Sprache der Formeln beantwortet werden, betreffen den Anteil des Empfangsgeräts und des Zielflimmerns an Meßfehlern. Der Umfang der Arbeit beträgt im Textteil 30 Seiten. Die Schalt- und die Kurvenbilder umfassen weitere 16 Seiten.

*H. Buchholz.*



**Hauser, Walter:** Variational principles for guided electromagnetic waves in anisotropic materials. *Quart. appl. Math.* **16**, 259—272 (1958).

Verf. entwickelt in der vorliegenden Arbeit eine allgemeine Methode, um Näherungslösungen für Ausbreitungsprobleme in Wellen- und Hohlleitern zu erhalten. Letztere können teilweise von Materie erfüllt sein, die gewisse elektromagnetische Eigenschaften besitzen. Es wird ein passender Greenscher Tensor eingeführt, mit dessen Hilfe eine formale Lösung des Problems in Form einer Integraldarstellung angegeben wird. Diese gestattet dann, ein Variationsprinzip aufzustellen, welches zur Lösung des Problems herangezogen werden kann. *P. Urban.*

**Pokrovskij (Pokrovskii), V., F. Ulinič (Ulinich) and S. Savvinyeh (Savvinykh):** Local reflection in waveguides of variable cross section. *Soviet Phys., Doklady* **3**, 580—583 (1959), Übersetz. von *Doklady Akad. Nauk SSSR* **120**, 504 (1958).

Einfachheitshalber wird das folgende ebene elektrodynamische Problem behandelt: In einem rechtwinkligen  $(x, y, z)$ -Koordinatensystem zeigt der Wellenleiter in Richtung der  $z$ -Achse. Das Feld ist von der  $x$ -Koordinate unabhängig. Die Begrenzung des Wellenleiters ist durch eine Gleichung der Form  $y = \pm f(\alpha z)$  gegeben, wo  $\alpha$  ein kleiner Parameter ist. Für  $z \rightarrow \pm \infty$  nähert sich  $f$  den Grenzen  $\pm 1$ . Die Differenz  $f_+ - f_-$  ist nicht klein. Vermöge der Gleichungen

$$(1) \quad y = \eta f(\alpha z), \quad \frac{\alpha^2 y^2}{2} + \int_0^z \frac{f(\alpha z)}{f'(\alpha z)} dz = \int_0^\zeta \frac{f(\alpha \zeta)}{f'(\alpha \zeta)} d\zeta$$

wird ein orthogonales  $(\eta, \zeta)$ -Koordinatensystem eingeführt, in welchem die Linien  $\eta = \pm 1$  die Leiterbegrenzung darstellen und  $\zeta$  nahezu mit  $z$  übereinstimmt. Die Gleichungen (1) werden bis zu Termen in  $\alpha^3$  gelöst und gestatten eine Transformation des ebenen Problems  $\Delta U + k^2 U = 0$  mit der Grenzbedingung  $U|_S = 0$  bzw.  $\partial U / \partial n|_S = 0$ . Der Lösungsweg für das transformierte Problem ist eine Kombination der *WKB*-Methode und der gewöhnlichen Störungsmethode. Die Resultate zeigen, daß lokale Reflexion und Streuung wesentlich davon abhängen, wie „glatt“ die Begrenzungskurve an einer fixierten Stelle  $\zeta = \zeta_0$  ist. Die angegebene Methode kann auf Wellenleiter mit ähnlichen Querschnitten erweitert und beim Auftreten von Umkehrpunkten (Querschnitte mit kritischen Dimensionen für eine gegebene Welle) benutzt werden. — Keine Literaturangaben. *H.-J. Hoehnke.*

**Bladel, Jean van:** Normal modes methods for boundary-excited wave guides. *Z. angew. Math. Phys.* **9a**, 193—202 (1958).

Das elektromagnetische Feld in dem von einer geschlossenen Fläche  $S$  berandeten räumlichen Gebiet ist eindeutig bestimmt durch die Stromdichte  $\bar{J}$  im Innern und die tangential elektrische Feldkomponente  $\bar{E}_{tang}$  an der Oberfläche  $S$ . Diese Komponente verschwindet an idealleitenden Wänden und ist von Null verschieden auf der Fläche einer Öffnung, die den Innenraum mit dem Außenraum koppelt. Explizite Formeln für das Hohlraumfeld in Abhängigkeit von der „räumlichen Anregung“  $\bar{J}$  und der „Grenzflächenanregung“  $\bar{E}_{tang}$  können 1. mittels der dyadischen Greenschen Funktion und 2. nach der Methode der orthogonalen Eigenlösungen erhalten werden. Beide Wege sind im wesentlichen äquivalent, da die dyadische Greensche Funktion nach den orthogonalen Eigenlösungen des Hohlraums entwickelt werden kann. Verf. löst das (bisher wenig untersuchte) Grenzflächenanregungs-Problem aus methodischen und praktischen Gründen nach der zweiten Methode und behandelt insbesondere den Fall des unendlich langen Rechteckhohlrohrs, das von einem Spalt geschnitten wird, der mit der longitudinalen Leiterachse einen Winkel  $\theta$  bildet. Der Spezialfall  $\theta = 0$  wurde vom Verf. bereits früher diskutiert (dies. Zbl. **81**, 422). *H.-J. Hoehnke.*

**Breitenhuber, L.:** Zur Abstrahlung kreiszylindrischer Hohlleiter bei schräger Lage in einem metallischen Schirm. *Z. Phys.* **155**, 441—452 (1959).



Mittels des vektoriellen Huyghensschen Prinzips wird die Strahlung eines schräg in einen unendlich ausgedehnten metallischen Schirm einmündenden Hohlleiters für  $E$ - und  $H$ -Wellen berechnet. Der Reflexionskoeffizient geht nicht in die Winkelverteilung ein, und so ist er auch nicht berücksichtigt worden. Für die Einfallswinkel  $0^\circ$ ,  $30^\circ$  und  $60^\circ$  werden die Strahlungsdiagramme in der  $E$ - und  $H$ -Ebene wiedergegeben, wenn es sich um eine  $TE_{11}$ -Welle handelt und der Durchmesser des Hohlleiters gleich  $3\lambda/4$  Vakuumwellenlängen ist. H. Buchholz.

**Ledinegg, E.:** Zur Theorie des Impulsdurchganges in einem  $2n$ -Pol-Hohlraumsystem. Acta phys. Austr. 12, 196—204 (1958).

Als Fortsetzung zweier Arbeiten [Arch. elektr. Übertragung 9, 363—368 (1955) und dies. Zbl. 78, 185] zeigt Verf., daß die Anwendung des  $2n$ -Pol-Formalismus auf eine beliebige em-Wellen-Schaltung möglich ist, wobei eine schwache Kopplung der einzelnen Hohlräume vorausgesetzt wird; damit kann die Impulsübertragung durch ein Hohlraumsystem explizit erfaßt werden. Die Koeffizienten der Übertragungsmatrix werden durch Energieterme beschrieben, die sich aus den Feldverteilungen der ungekoppelten Resonatoren ergeben. Die Elemente der Übertragungsmatrix lassen sich über eine Fourier-Transformation aus den Elementen der Leitwert- bzw. der Widerstandsmatrix gewinnen. Als Anwendungsbeispiel gibt Verf. ein Hohlraumsystem an, dem durch  $r$  Zuleitungen Spannungsimpulse  $U_i(t)$  aufgeprägt werden und für das die Stromimpulse an den  $(n-r)$ -Ausgängen, die mit beliebigen komplexen Widerständen  $\Re$ , abgeschlossen sind, ermittelt werden sollen. H. Schließmann.

**Favre, Henry:** Etude théorique de l'influence des réflexions intérieures sur la marche d'un rayon lumineux traversant une lame transparente soumise à des forces agissant dans son plan moyen. Ingenieur-Arch. 28, Festschrift Rich. Grammel 39—52 (1959).

Diese Untersuchung verfolgt das Ziel, die durch die inneren Reflexionen bedingten Fehler bei der Bestimmung der Hauptspannungsdifferenz bzw. der einzelnen Hauptspannungen in einer planparallelen Scheibe abzuschätzen. Herrscht in der Scheibe ein ebener Spannungszustand, so erfährt das auf die Oberfläche auftreffende linear polarisierte Licht eine Aufteilung in zwei Lichtanteile. Ein Bruchteil wird reflektiert, und der größere Lichtanteil tritt in die Scheibe ein, wobei dieses Licht wegen der Spannungsdoppelbrechung in zwei senkrecht zueinander, linear polarisierte Lichtkomponenten aufgespalten wird. Diese Lichtkomponenten schwingen dabei jeweils in Richtung der Hauptspannungen und haben wegen der verschiedenen Brechungsindizes unterschiedliche Phasengeschwindigkeiten. An der hinteren Grenzfläche findet nun eine ähnliche Energieaufteilung statt. Ein Teil erfährt hier eine innere Reflexion, und der überwiegende Teil tritt in das optisch dünnere Medium über, wobei die beiden Lichtkomponenten in ihren Phasen gegeneinander verschoben sind. Diese inneren Reflexionen wiederholen sich nun, so daß nach jedem Hin- und Hergang zwischen den beiden Grenzflächen weitere Lichtanteile die hintere Fläche verlassen. Die resultierende Lichtintensität hinter der Scheibe setzt sich aus unendlich vielen Lichtanteilen zusammen, wobei die Anteile mit zunehmender optischer Weglänge ständig abnehmende Beiträge liefern. Im einzelnen wird für den Fall senkrechter Inzidenz berechnet, welchen Einfluß die inneren Reflexionen auf die Phasen der beiden resultierenden Schwingungen hinter der Scheibe und auf die Intensitäten haben. In Anlehnung an das vom Verf. benutzte Mach-Zehnder-Interferometer zur Bestimmung der einzelnen Hauptspannungen werden die Differenzen der Phasen ( $\Delta_1$  und  $\Delta_2$ ) der jeweiligen resultierenden, in einer Ebene liegenden Schwingungen einmal mit und zum anderen ohne Belastung angegeben. Desgleichen wird die Phasendifferenz ( $\Delta_3$ ) zwischen den beiden Schwingungen berechnet. Zwischen diesen meßbaren Phasendifferenzen und den aus den Hauptspannungen berechenbaren Phasendifferenzen ( $\delta_1$ ,  $\delta_2$ , und  $\delta_3$ ) besteht nun ein Unterschied, der gemäß der Neumannschen Theorie die inneren Reflexionen nicht berücksichtigt

worden sind. Diese Unterschiede — Fehler — werden im folgenden für die einzelnen Schwingungen abgeschätzt. Die Größtfehler bei Verwendung des Kunststoffes „Allite“ CR 39 und des Werkstoffes Glas sind in allen Fällen etwa  $0,013 \lambda$ , und die mittleren Fehler liegen etwa bei  $0,003 \lambda$  ( $\lambda$  = Wellenlänge). Bei der Messung mit dem Mach-Zehnder-Interferometer ergaben sich größere Fehler, die demzufolge nicht nur auf der Wirkung der inneren Reflexionen beruhen, sondern auch auf eine schlechte Planparallelität der Scheibe zurückzuführen sind. Weiterhin wird abgeschätzt, welchen Einfluß die Intensitäten der Teilstrahlen bei der Messung von  $\delta_3$  mittels eines Kompensators haben, und wird gezeigt, daß bei gekreuzten Polarisatoren die Kurven verschwindender Intensität (Isochromaten) nicht mehr mit den Kurven  $\Delta_3 = 0, \pm \lambda, \pm 2\lambda, \dots$  zusammenfallen. Abschließend wird die Möglichkeit aufgezeigt, wie man mittels einer photometrischen Methode die einzelnen Hauptspannungen bestimmen kann. Dazu belastet man die Scheibe und registriert die sich bei zunehmender Last ergebenden kleinen Lichtschwankungen der beiden Strahlen hinter der Scheibe. Aus der Anzahl der Lichtschwankungen lassen sich schließlich die Hauptspannungen errechnen.

*H. Schwieger.*

**Bartkowski, Zygmunt:** Zur Berechnung des Körte-Spiegels. *Z. angew. Math. Mech.* 39, 325—326 (1959).

**Weibel, Erich S.:** Stable orbits of charged particles in an oscillating electromagnetic field. *Phys. Review*, II. Ser. 114, 18—21 (1959).

Study of orbits in a field of the cylindrical wave guide driven in the  $TE_{01}$ -mode. The radial components of the Lorentz force acting on the particle is never positive regardless of its charge. One might expect from this that the particle can be confined to a volume surrounding the axis of the wave guide. This would certainly be true if the attracting force were time independent. However, since the force is oscillating, it is conceivable that energy is imparted to the particle on each cycle, causing it to follow an ever-widening orbit until it escapes. The question then arises under what conditions the particle will be stably bound to the axis; that is, under what conditions the coordinate  $r(t)$  of the particle will remain bounded for all times ( $t$ ). The analysis of the particle orbits by the method of the average potential (which is a first approximation and leads to a differential-equation for the perturbation of the orbits) or by another method (reduction of the equations of motion to a Mathieu equation, if the behavior of small solutions  $r(t)$  is known) gives sufficient conditions. An exact stability criterion is still lacking. Moreover, the question of stable or unstable confinement of plasma is considered.

*H.-J. Hoehnke.*

**Veksler, V. I.:** Über die Streuwirkung eines Drahtnetzes auf geladene Teilchen. *Doklady Akad. Nauk Uzb. SSR* 1959, Nr. 7, 10—13 (1959) [Russisch].

Verf. untersucht die Bewegung elektrisch geladener Teilchen in einem verzögernden elektrostatischen Felde. Die Teilchen fliegen in der  $x$ -Richtung durch ein in der  $y/z$ -Ebene liegendes, auf einem konstanten verzögernden Potential gehaltenes Drahtgitter. Dieses besteht aus einer großen Anzahl parallel zur  $z$ -Achse in gleichen Abständen von einander gespannter Drähte. Nach dem Durchgang durch das Gitter hat die Bewegung der Teilchen eine größere oder geringere Komponente in der  $y$ -Richtung erhalten, je nachdem, wie weit das Teilchen beim Durchgang von der Mitte des Zwischenraumes zwischen zwei Drähten entfernt war. Außerdem hängt die Ablenkung von der kinetischen Energie der Teilchen und von den Abmessungen des Gitters ab. Verf. stellt die Differentialgleichungen der Bewegung auf, integriert sie näherungsweise, berechnet den Winkel, den die Asymptote der Bahn des Teilchens hinter dem Gitter mit der  $x$ -Achse bildet, und stellt das Ergebnis durch eine Kurvenschar dar. Ferner bemerkt er, daß man die Ablenkung unter Umständen erheblich vermindern kann, wenn man vor dem Hauptgitter ein eben solches, dazu paralleles Hilfsgitter anbringt. Die zweckmäßigsten Werte für den Ort und das Potential dieses Hilfsgitters werden angegeben.

*G. Günther.*



Ewald, H.: Öffnungsfehlerfreie Kugulkondensatoren. Z. Naturforsch. 14a, 680—681 (1959).

Die früher von Ewald und Liebl (dies. Zbl. 78, 188) abgeleiteten Ausdrücke für die Bildfehlerkoeffizienten von Toroidkondensatoren werden auf den Fall spezialisiert, daß die Nullpotentialfläche zwischen den Elektroden eine Kugelfläche ist. Durch zylindrisches Abdrehen der Eintritts- und Austrittsstirnfläche oder beider läßt sich erreichen, daß die l. c. eingeführten Öffnungsfehlerkoeffizienten  $F_{11}$  und  $F_{33}$  beide gleichzeitig verschwinden. F. Lenz.

Pucker, N.: Zur Theorie des Ionenstrahls in elektrostatischen Feldern mit Berücksichtigung der Raumladung. Acta phys. Austr. 12, 474—491 (1959).

Die paraxiale Bahngleichung wird zunächst unter Vernachlässigung der Raumladung für den Fall einer Zweielektroden-Rohrlinse gelöst, wobei das Linsenfeld durch ein abgeschnittenes homogenes Feld angenähert wird. Durch eine Störungsrechnung wird untersucht, wie diese zunächst unter Vernachlässigung von Raumladungserscheinungen berechnete Lösung durch die Eigenraumladung des Bündels modifiziert wird. Wegen der Voraussetzung homozentrischen Strahlenverlaufs im Bündel versagt das Störungsverfahren in der Umgebung des Brennpunktes, in welchem die Stromdichte der 0. Näherung über alle Grenzen wächst. F. Lenz.

Mihăilă, A.: Das Synchrotron mit intensiver Fokussierung. Automatica și Electronica 3, 136—140 (1959) [Rumänisch].

Miller, M. A.: On the focusing of charged particle beams by high-frequency fields. Soviet Phys., Doklady 3, 322—324 (1958), Übersetz. von Doklady Akad. Nauk SSSR 119, 478—480 (1958).

Daß die Bündelung geladener Teilchen in hochfrequenten Wechselfeldern möglich ist, folgt bereits daraus, daß es zeitlich konstante, aber räumlich periodische Felder mit Bündelungseigenschaften gibt. Man braucht diese nämlich nur durch Übergang zu einem gleichförmig bewegten Koordinatensystem zu hochfrequenten Wechselfeldern zu machen. Es gibt aber auch andere hochfrequente Felder mit Bündelungseigenschaften, die nicht durch Wechsel des Bezugssystems in statische überführt werden können. Eine Bedingung dafür, daß ein Feld  $\vec{E}(\vec{r})e^{i\omega t}$  und  $\vec{H}(\vec{r})e^{i\omega t}$  alle Bahnen in einem Bündel geladener Teilchen auf einen Zylinder von vorgegebenem Radius beschränkt, wird mitgeteilt. Das Beispiel der Bündelung längs einer geradlinigen Achse durch eine transversal-elektrische Welle  $TE_{10}$  in einem kreiszylindrischen Wellenleiter mit ideal leitenden Wänden wird behandelt. Eine Erweiterung auf andere transversal-elektrische Moden  $TE_{nm}$  und transversal-magnetische  $TM_{nm}$  ist möglich, ebenso auf den Fall, daß das Wechselfeld von Anteilen verschiedener Frequenzen gebildet wird. Grundsätzlich kommen außer fortschreitenden Wellen auch stehende in Frage. F. Lenz.

Kulikovskij (Kulikovskii), A. G.: On motions with homogenous deformation in magneto-hydrodynamics. Soviet Phys., Doklady 3, 507—509 (1959), Übersetz. von Doklady Akad. Nauk SSSR 120, 984 (1958).

The author indicates a class of solutions of equations of magneto-hydrodynamics in a medium of infinite electrical conductivity. The Lagrangian description of motion is used with the following additional equations and conditions: continuity, adiabaticity and the condition that the magnetic lines of force flow with the fluid (i. e., they are frozen in). The Lagrangian equations are combined with the classical equations of motion in continuum containing the stress tensor. The resultant equation is linear in  $x_j^0$  (coordinates of a particle at  $t = 0$ ). In addition, the author superimposes a special requirement, namely, that the terms containing the stress tensor remain linear in  $x_j^0$  for an arbitrary affine deformation of the medium. A few particular cases are discussed: (a) when  $\varrho_0 \neq \text{const}$ ; then the magnetic lines of force are straight lines; (b) when  $\varrho_0 = \text{const}$ , two subcases are possible (the magnetic



lines of force are straight lines or not). The second subcase requires that the magnetic field strength for  $t = 0$  is a linear function of  $x_z^0$ . The author points out that it is possible to examine other forces; stresses depending on the deformation tensor and the rate of deformation tensor do not have direct effect on the motion, provided they do not depend upon the temperature (through the energy equation). Thus when the coefficients of viscosity and heat conductivity are constant, the viscous and the heat phenomena do not affect the motion. The Joule heat also does not affect the motion. Thus, when the initial density at  $t = 0$ , the coefficients of viscosity, thermal conductivity and electrical conductivity are constant, then the family of solutions obtained in the present paper refers to the flow of a viscous, heat conducting gas of a finite electrical conductivity. Remark of the referee: In a compressible fluid the influence of the variable coefficients of viscosity and heat conductivity is in certain types of flow of a very high order. Thus for practical purposes one may attempt to generalize the results of the present paper.

*M. Z. v. Krzywoblocki.*

**Chopra, K. P.:** Induction drag. *Indian J. Phys.* **31** (40), 332—333 (1957).

Zusatz zur Arbeit, die in dies. Zbl. **73**, 223 referiert ist. Es werden die Ausdrücke der alten Arbeit neu hergeleitet für den Fall endlicher Leitfähigkeit der Kugel. *W. Klose.*

**Ron, A.:** Penetration of a magnetic field into a one dimensional plasma. *Nuovo Cimento*, X. Ser. **10**, 844—853 (1958).

Das Eindringen eines äußeren Magnetfeldes in ein kompressibles, magneto-hydrodynamisches Hochtemperaturplasma wird berechnet. Die Leitfähigkeit wird proportional der Dichte angenommen. Nur im Fall eines langsam veränderlichen Magnetfeldes gelingt durch Transformation der magnetohydrodynamischen Gleichungen auf ein mit dem Plasma mitbewegtes Koordinatensystem die Lösung mit einer einfachen Bestimmungsgleichung, die nur das Magnetfeld als unabhängige Variable erhält.

*H. Rother.*

**Newcomb, William A.:** Motion of magnetic lines of force. *Ann. of Phys.* **3**, 347—385 (1958).

In general, a conducting fluid in a magnetic field will not move relative to the lines of force. In the case of a magnetohydrodynamic wave, this implies that the lines of force oscillate like stretched strings, with a tension derived from the electromagnetic stress tensor, and with a mass per unit length derived from the density of the fluid, which is stuck to the lines. If the fluid is a plasma, and if the frequency of oscillation of the magnetic field is small compared to any of the particle gyro-frequencies, then the particles move with the drift velocity  $\vec{v}_p = (\vec{E} \times \vec{H})/H^2$ , so that the lines of force must also move with this velocity. In some situations, however, the particles do not move with the field. Plasma oscillations, both of the electronic and of the ionic types, in an external magnetic field, are examples of such situations. It is therefore of interest to investigate the general relationships which hold between the motions of the lines of force and of the particles. One can, however, ask for the verifiable consequences of ascribing a certain velocity  $\vec{v}$  to the magnetic lines of force. These include the following: 1. The magnetic flux through any cycle is constant, where a cycle is defined as a closed curve, every point of which moves with velocity  $\vec{v}$ . 2. If a line of force  $l$ , moving with velocity  $\vec{v}$ , coincides with a line of force at some instant  $t_0$ , it will also coincide with some line of force at every subsequent time  $t$ . In other words, if  $l$  is initially tangent to  $\vec{H}$ , it will, in the course of its motion, remain tangent to  $\vec{H}$ . A velocity is said to be flux-preserving if it satisfies 1., line-preserving if it satisfies 2. It is permissible to ascribe a velocity  $\vec{v}$  to the lines of force if and only if  $\nabla \times (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{H})$  vanishes identically. It is always possible to choose a  $\vec{v}$  satisfying this relation, although it is not generally possible to do this

uniquely. To say that a certain velocity  $\vec{v}$  is permissible means that all the verifiable consequences of ascribing this velocity to the lines of force are valid, i. e., that  $\vec{v}$  is flux-preserving. In the case of the particle drift velocity the condition for flux-preservation reduces to  $\nabla \times [\vec{H}(\vec{E} \cdot \vec{H})/H^2] = 0$ . Even if  $\vec{v}_p$  is not flux-preserving, there may be some closed curves moving with velocity  $\vec{v}_p$  which have constant flux. A semiexhaustive enumeration of such curves is given for a general electromagnetic field. Among these curves are those which lie in a surface everywhere perpendicular to  $\vec{H}$ , if this surface is independent of time. A family of such surfaces will exist if and only if  $\vec{H} \cdot \nabla \times \vec{H}$  and  $\vec{H} \times \vec{H}$  both vanish identically. A velocity may be line-preserving without being flux-preserving, but not vice versa. The necessary and sufficient condition for line-preservation is that  $\vec{H} \times [\nabla \times (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{H})]$  should vanish identically. The motion of the lines of force in a plasma is related only to the transverse motion of the charged particles. The latter is separable from the longitudinal motion if and only if  $\vec{v}_p$  is line-preserving. A necessary and sufficient condition is also given for the separability of only one component of the transverse motion. The concept of a line of force is not relativistically covariant, because each point of a line of force has the same time coordinate. A curve in space-time which appears as a line of force in one frame of reference will therefore not be a line of force in another frame of reference. However, a moving line of force will trace out a two-dimensional surface in space-time, and it may be that this surface will intersect every space-like hyperplane in a line of force. In that case the surface will appear as the path of a moving line of force in every frame of reference, thus defining a moving line of force as a covariant concept. It is shown that a family of such surfaces exists if and only if  $\vec{E} \cdot \vec{H}$  vanishes identically, in which case they will be generated by lines of force moving with the particle drift velocity  $\vec{v}_p$ .

Dan Gh. Ionescu.

Löcherer, Karl-Heinz: Bemerkung zu der Arbeit „Über die wahrscheinlichkeitstheoretische Behandlung der Anodenstromschwankungen von Elektronenröhren“. Acta phys. Acad. Sci. Hungar. 8, 361—362 (1958).

Zu der Theorie des Schroteffekts von L. Takács (dies. Zbl. 78, 188) wird bemerkt, daß sie Raumladungserscheinungen nur teilweise erfaßt, weil die Schwankungen der elektrostatischen Abstoßung zwischen den einzelnen Geschwindigkeitsgruppen der Elektronen nicht berücksichtigt worden sind. Im besonderen kommt die von Schottky und Spenke gefundene Raumladungsschwächung des Schrottrauschens bei niederen Frequenzen nicht heraus.

E. Breitenberger.

### Relativitätstheorie:

• Tonnelat, Marie-Antoinette: Les principes de la théorie électromagnétique et de la relativité. Paris: Masson et Cie., Éditeurs 1959. 394 p. 5.000 fr.

Das vorliegende Lehrbuch der Relativitätstheorie wendet sich an Physikstudenten, die nicht speziell auf dem Gebiet der Feldtheorie arbeiten. — Fast zwei Drittel des Buches sind der Darstellung der speziellen Relativitätstheorie gewidmet. Im ersten Teil wird in drei Kapiteln die klassische Maxwell-Lorentzsche Elektrodynamik behandelt. Der zweite Teil enthält dann die Erörterung der eigentlichen speziellen Relativitätstheorie. Verf. beginnt ihn mit einem historischen Überblick über die Entwicklung der Elektrodynamik bewegter Körper bis zu Einsteins klassischer gleichnamiger Arbeit. Die anschließenden Kapitel behandeln die Prinzipien der speziellen Relativitätstheorie in drei- und in vierdimensionaler Form und ferner die relativistische Kinematik und Dynamik. Das folgende 8. Kapitel enthält die vier-



dimensionale Form der Elektrodynamik und in einem abschließenden Paragraphen auch die Grundlagen der nichtlinearen Elektrodynamik von Mie und Born-Infeld. Den Beschluß bildet eine Diskussion der experimentellen Fakten. — Die allgemeine Relativitätstheorie wird im dritten Teil des Buches behandelt. Verf. gibt zunächst wieder einen historischen Überblick über die Entwicklung der Gravitationstheorie von Newton bis Einstein. Ihm schließt sich die Darstellung der Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie an. Das 12. Kapitel behandelt die Einsteinsche Näherungsmethode, insbesondere die linearisierte Theorie der Gravitationswellen und das allgemein-relativistische Zweikörperproblem in Newtonischer Näherung. Ferner werden in ihm die strengen Lösungen des Einkörperproblems hergeleitet, also die Schwarzschildsche und die Reissnersche Lösung (der Autor heißt „Reissner“ und nicht „Rassner“ wie p. 314 gedruckt steht). Der dritte Teil schließt mit einem Überblick über die dualistischen und die unitären Theorien des gekoppelten Gravitations- und elektromagnetischen Feldes. — Der Anhang bringt einen knappen, aber pädagogisch geschickten Abriß des Tensorkalküls. *H. Treder.*

**Kalitzin, N. St.: Verallgemeinerung der Grundformel der relativistischen Mechanik für einige praktisch wichtige Nichtinertialsysteme.** Nuovo Cimento, X. Ser. 13, 173—185 (1959).

Since the well-known equations of motion of relativistic mechanics:

$$(*) \quad F_{\mu} = d(m v_{\mu} [1 - (v/c)^2]^{-1/2})/dt, \quad (\mu = 1, \dots, 4),$$

are valid only in inertial systems, the author endeavours to find a suitable generalization with a view to practical applications to the theory of rocket engines (in which it is to be noted that neither the earth nor a rocket are inertial systems). The precise generalization furnished by the general theory of relativity is, in the author's opinion, too cumbersome for practical needs. He therefore introduces his so-called "non-relativistic" systems, consisting of two coordinate frames  $K$  and  $K^1$ , of which only the latter is an inertial system and whose relative velocities and accelerations (including rotation) are so small that classical kinematics (e. g. the theorem of Coriolis) is applicable. The motion of a particle moving with high velocity relative to  $K$  or  $K^1$  is studied, the equation (\*) being applied in the inertial frame  $K^1$ . By means of the above-mentioned classical techniques the equations of motion in the non-inertial system  $K$  are derived. The left-hand side of (\*) is now replaced by  $F_{\mu} + S_{f\mu} + S_{k\mu} + S_{c\mu}$ , where  $S_{f\mu}$  results from the acceleration of  $K$  relative to  $K^1$ ,  $S_{c\mu}$  represents a type of Coriolis force, while  $S_{k\mu}$  is a new inertial term which appears only in the case of high velocities. — These results are checked from the point of view of the general theory of relativity. A suitable line-element is introduced in terms of cylindrical coordinates, and the equations of motion are evaluated. By means of relevant approximations the author establishes the required consistency. — The paper concludes with an application to the theory of rockets, in which the velocity of the rocket is regarded as "non-relativistic", while the velocity of the ejected particles is of a "relativistic" order of magnitude. *H. Rund.*

**Zăgănescu, M.: Hodographe du mouvement du point matériel dans la mécanique relativiste.** Lucrările ști. Inst. Ped. Timișoara, Mat.-Fiz. 1958, 195—200, français. und russ. Zusammenfassg. 200 [1959] [Rumänisch].

On considère le mouvement bidimensionnel et on déduit l'équation de l'hodographe des équations du mouvement du point matériel. Cette équation est du type Ricatti. Si les composantes de la force sont constantes, le hodographe représente une equidistante du plan de Lobatschewski. Französische Zusammenfassung

**Infeld, L.: The Lagrangian with higher order derivatives and the mechanical spin of a particle.** Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 5, 979—983 (1957).

Verf. bemerkt, daß eine relativistische Dynamik mit einer verallgemeinerten Lagrange-Funktion, die außer von den Koordinaten  $x^{\nu}$  auch von deren ersten und zweiten Ableitungen nach der Eigenzeit  $dx^{\nu}/d\tau$  und  $d^2 x^{\nu}/d\tau^2$  abhängt, die Be-



wegung von Partikeln mit Spin beschreibt. Speziell wird die Lagrange-Funktion  $L = m + f(Q)$  mit  $Q = \text{const } (d^2 x^\alpha/d\tau^2) (d^2 x^\alpha/d\tau^2)$  eingeführt und die aus ihr und der Nebenbedingung  $(dx^\alpha/d\tau) (dx^\alpha/d\tau) = -1$  folgenden Bewegungsgleichungen hergeleitet. Verf. zeigt, daß den speziellen Ansätzen für  $f(Q)$  jeweils spezielle Teilchenstrukturen entsprechen. *H. Treder.*

**Infeld, L.: The Lagrangian as a function only of co-ordinates and the mechanical spin of a particle.** Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 5, 985—989 (1957).

Verf. zeigt, daß Bewegungsgleichungen für Teilchen mit Spin, die zu denen der verallgemeinerten Dynamik mit höheren zeitlichen Ableitungen (s. das vorstehende Referat) analog sind, auch aus einer nur von  $x^\nu$  abhängigen Lagrange-Funktion hergeleitet werden können. Hierbei wird die zeitliche Konstanz des Momentenvektors  $P^\nu$  und seine Nichtparallelität zu  $dx^\nu/d\tau$  bereits bei der Aufstellung der Lagrange-Funktion berücksichtigt und für diese der Ansatz  $L = m + f(S)$  mit  $S = \text{const } (x_\alpha P_\beta - P_\alpha x_\beta)^2$  gemacht. *H. Treder.*

**Infeld, L.: On variational principles in relativistic dynamics.** Max-Planck-Festschrift 1958, 115—127 (1959).

Die speziell-relativistischen Bewegungsgleichungen eines (strukturlosen) Punktteilchens folgen aus Lagrange-Funktionen von der Form  $L = L(x_\mu, dx_\mu/ds)$ , die für ein Teilchen mit endlicher Ruhmasse unter der Nebenbedingung  $(dx_\mu/ds) \cdot (dx_\mu/ds) + 1 = 0$  zu variieren sind. Verf. zeigt, daß der Lagrangesche Multiplikator  $\lambda$  die Bedeutung der Ruhmasse besitzt und daß  $\lambda = \left[ \partial L / \partial \left( \frac{dx_\nu}{ds} \right) \right] (dx_\nu/ds) - L$  folgt. — Für  $L$  werden speziell die Ansätze  $L = -m - \varphi$  und  $L = -m + e A_\nu dx_\nu/ds$  gemacht und somit die Bewegung in einem skalaren und im elektromagnetischen Feld behandelt. Im ersteren Fall ist die Ruhmasse des Teilchens keine Konstante, sondern gemäß  $\lambda = m + \varphi$  eine Funktion des äußeren Feldes, wie zuerst von Werle (dies. Zbl. 53, 163) gezeigt worden ist. Weiter gibt Verf. die zu den gewählten Lagrange-Funktionen gehörenden Hamiltonschen Funktionen und die entsprechenden Jakobischen partellen Differentialgleichungen an. — Für die Bewegung ruhmasseloser Teilchen verliert die Nebenbedingung ihren Sinn. Verf. zeigt, daß sie durch die Nebenbedingung  $(dx_\mu/dt) (dx_\mu/dt) = 0$  ersetzt werden kann. *H. Treder.*

**Pham Mau Quan: Inductions électromagnétiques dans un milieu anisotrope relativiste.** C. r. Acad. Sci., Paris 245, 1782—1785 (1957).

Ohne irgend einen Hinweis auf frühere Untersuchungen [z. B. H. Minkowski, Math. Ann. 68, 472—525 (1910), L. Mandelstam und J. Tamm, Math. Ann. 95, 154—160 (1925); G. Marx, dies. Zbl. 52, 441; J. I. Horváth und J. Gyulai, Acta Phys. Chem., Szeged 2, 39 (1956); 3, 33 (1957)] beschäftigt sich Verf. mit der Entwicklung der relativistischen Elektrodynamik in bewegten anisotropen bzw. isotropen Dielektrika. Die Komponenten des elektrischen Tensors ( $\epsilon_\beta^\alpha$ ) und des magnetischen Permeabilitätstensors ( $\mu_\beta^\alpha$ ) des Dielektrikums werden in der Form  $\epsilon_\beta^\alpha = \epsilon \delta_\beta^\alpha + e_\beta^\alpha$ ,  $\mu_\beta^\alpha = \mu \delta_\beta^\alpha + m_\beta^\alpha$  zerlegt und die Viererstromstärke wird in der Form  $J_\beta = \delta u_\beta + \sigma_\beta^\alpha H_{\alpha\gamma} u^\gamma$  angegeben (wo  $\delta$  und  $\sigma_\beta^\alpha$  die entsprechenden Komponenten des Leitfähigkeitstensors des Dielektrikums,  $H_{\alpha\gamma}$  den von den Intensitätsgrößen  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{B}$  aufgebauten Feldtensor des elektromagnetischen Feldes und  $u^\gamma$  die Vierergeschwindigkeit des Dielektrikums bezeichnet). Dann werden die kovarianten Materialgleichungen zwischen den Komponenten  $G_{\alpha\beta}$  des von den Quantitätsgrößen  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{H}$  aufgebauten, sog. Erregungstensors und des Feldtensors  $H_{\alpha\beta}$ , sowie die relativistischen Maxwellschen Feldgleichungen diskutiert. *J. I. Horváth.*

**Crupi, Giovanni: Sulla velocità di gruppo nei conduttori in moto.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 25, 280—283 (1958).

Scopo della nota è di generalizzare mediante l'uso della equazione risolvente delle equazioni di Minkowski dell'elettrodinamica dei corpi in moto una relazione

fra la velocità di gruppo e la velocità di fase delle onde elettromagnetiche stabilita per i corpi in quiete da R. Nardini (cfr. questo Zbl. 78, 417). *G. Lampariello.*

● **Fock, V.:** *The theory of space time and gravitation.* Transl. from the russian by N. Kemmer. New York-London-Paris-Los Angeles: Pergamon Press 1959. XVIII, 411 p. \$ 15,00.

Das hier in englischer Übersetzung vorliegende, zuerst 1955 in Moskau erschienene Werk über die Einsteinsche Gravitationstheorie ist weit mehr als ein "high level"-Lehrbuch. Es hat vielmehr in zahlreichen Abschnitten den Charakter einer tiefgehenden Monographie über aktuelle Forschungsgebiete der Gravitationstheorie. — Der Aufbau des Werkes ergibt sich zwanglos aus des Verf. Deutung der allgemeinen Relativitätstheorie Einsteins als der geometrischen Theorie des Gravitationsfeldes; Verf. möchte folgerichtig den Ausdruck „Relativitätstheorie“ auf die „spezielle Relativitätstheorie“ beschränkt wissen. — In den beiden einleitenden Kapiteln stellt Verf. die spezielle Relativitätstheorie in ihrer drei- und vierdimensionalen Form dar und gibt im dritten Kapitel eine Einführung in den Tensorkalkül. Das vierte Kapitel behandelt die spezielle Relativitätstheorie in krummlinigen Koordinaten und auch in gegebenen nicht-ebenen Räumen. Dem Ref. erscheinen hierbei die Untersuchungen des Verf. über den Zusammenhang der integralen Erhaltungssätze mit den Isometriegruppen der Raum-Zeit-Welt auf pp. 163—167 im Zusammenhang mit den Ausführungen auf pp. 326—334 und 337—341 als besonders wichtig. Das Resultat des Verf., daß ohne Verwendung von Einsteins Gravitationsgleichungen die Zahl der integralen Erhaltungssätze gleich der Zahl der Isometriegruppen ist, bei Gültigkeit der Einsteinschen Gleichungen die Existenz der 10 integralen Erhaltungssätze hingegen nur von der Ebenheit des Raums im räumlich Endlichen, d. h. von der Erfüllung der galileischen Grenzbedingungen abhängt, dürfte diesen wiederholt diskutierten Fragenkomplex völlig klären. — Im fünften Kapitel werden die Grundlagen der Gravitationstheorie explizit entwickelt. Verf. behandelt hier auch ausführlich die physikalische Bedeutung der Grenzbedingungen. Weiter gibt er eine tiefgehende Analyse des Einsteinschen Äquivalenzprinzips. Der letzte Paragraph des fünften Kapitels enthält eine originelle Diskussion der allgemein-relativistischen Auflösung des Uhrenparadoxons. — Als einzige strenge Lösung wird die Schwarzschildsche Metrik hergeleitet, da Verf. die physikalisch wesentlichen Ergebnisse der Gravitationstheorie aus der expliziten Behandlung der Näherungslösungen der Einstein-Gleichungen erwartet. Dementsprechend ist das folgende sechste Kapitel, das dem — vom Verf. ja selbst wesentlich geförderten —  $n$ -Körperproblem (und somit den relativistischen Bewegungsgleichungen) gewidmet ist, besonders umfangreich. Es stellt für sich allein eine kleine Monographie dar. Verf. gibt hier die explizite Form der Bewegungsgleichungen in relativistischer Näherung nebst der dazugehörigen Lagrange-Funktion an, und zwar unter sehr allgemeinen Voraussetzungen über die innere Struktur der Körper. Das Kapitel enthält auch einen Paragraphen, in dem die Bedeutung der harmonischen Koordinatenbedingung für die Herleitung der Bewegungs- aus den Feldgleichungen ausführlich diskutiert wird. Im abschließenden siebenten Kapitel werden die gewonnenen Näherungslösungen der Einsteinschen Feldgleichungen näher untersucht. Insbesondere diskutiert Verf. diejenigen Terme der retardierten Näherungslösungen, die einem Fernfeld entsprechen und somit eine von den Feldquellen emittierte Gravitationsstrahlung repräsentieren. Es wird gezeigt, daß die Näherungslösungen mit Fernfeld konvergieren, wenn die Emission der Gravitationsstrahlung nur eine endliche Zeit andauert. Mit diesen Untersuchungen verbindet Verf. eine Analyse der natürlichen Randbedingungen für die Einsteinschen Gravitationsgleichungen. Verf. spricht aus, daß die Mehrzahl der physikalischen Probleme der Gravitationstheorie keinem Cauchyschen Anfangswertproblem entsprechen, die natürliche Aufgabenstellung hier vielmehr die Vorgabe von Grenzbedingungen im räumlich Unendlichen zusammen mit einer verallgemeinerten Sommerfeldschen Aus-



strahlungsbedingung ist. Aus dieser Auffassung ergibt sich dann sofort die besondere Bedeutung der harmonischen Koordinatensysteme, deren physikalische Eindeutigkeit vom Verf. pp. 346—352 neu bewiesen wird. Der Anhang enthält die Beweise für einige tensoranalytische Beziehungen. — Das Buch ist in einer seinem hervorragenden Inhalt würdigen Ausstattung erschienen. *H. Treder.*

**Kalitzin, N. St.:** Über die Bewegung der rotierenden Satelliten und Doppelsterne nach der Einsteinschen Gravitationstheorie. *Nuovo Cimento*, X. Ser. 11, 178—185, ital. Zusammenfassg. 185 (1959).

In a recent paper (this Zbl. 80, 217) the author had evaluated the advance of the perihelion of a satellite of negligible mass under the influence of the gravitational field of a rotating central body, his method being based on a Lagrangian which had been introduced by V. A. Fok (The theory of space time and gravitation, Moscow (1955) p. 358 et seq.). By means of an extension of this procedure the motion of a rotating satellite with finite mass about a rotating central body is considered [again up to terms in  $(v/c)^2$ ]. This problem is of importance with regard to the theory of double stars. It is assumed that the mass-distributions of each of the rotating bodies possess spherical symmetry, and that the radii of the two bodies are small as compared with the distance between their centres. The author's final expression for the advance of the periastron consists of a sum of three terms, of which the first is the counterpart of the expression found by Einstein for the advance of the perihelion, while the second corresponds to that evaluated by Lense and Thirring [Phys. Z. 19, 156—163 (1918)], which had been discussed in detail in the author's above-mentioned paper. The third term furnishes a new additional effect on the advance of the periastron, being the sum of two terms, each of which consists of the product of the mass of one body and the specific angular momentum of the other. [Rev.: see also W. Tulczyjew, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. math. astron. phys. 6, 645—651 (1958)]. *H. Rund.*

**Dirac, P. A.M.:** Fixation of coordinates in the Hamiltonian theory of gravitation. *Phys. Review*, II. Ser. 114, 924—930 (1959).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 80, 414—415) hat Verf. eine Vereinfachung der kanonischen Form der Gravitationstheorie Einsteins dadurch erreicht, daß er die Anfangsmannigfaltigkeit als eine Hyperfläche  $x^0 = \text{const}$  wählte und dann die  $g_{\mu 0}$  nebst den zu ihnen kanonisch konjugierten Impulsen  $p^{\mu 0}$  aus dem Hamilton-Formalismus eliminierte. Die zu den dann gültigen „ $\Phi$ -Gleichungen“  $p^{\mu 0} \approx 0$  gehörenden „ $\chi$ -Gleichungen“  $\mathfrak{S}_L \approx 0$ ,  $\mathfrak{S}_s \approx 0$  ( $s = 1, 2, 3$ ) drücken die Unabhängigkeit von einer Deformation der Anfangsmannigfaltigkeit und von einer Transformation des dreidimensionalen Koordinatensystems auf ihr aus. Quantentheoretisch führen die  $\chi$ -Gleichungen zu zusätzlichen Forderungen an die Wellenfunktion  $\psi$ , die zu der Schrödinger-Gleichung hinzukommen. — Zur Eliminierung dieser „constraints“ fixiert Verf. nun die Hyperfläche  $x^0 = \text{const}$  und das Koordinatensystem auf ihr mit Hilfe von 4 geeigneten Koordinatenbedingungen. Die Poisson-Klammern der Koordinatenbedingungen mit den alten  $\chi$ -Gleichungen verschwinden jedoch nicht. Somit enthielte die Theorie quantentheoretisch unbrauchbare Bedingungen „von zweiter Art“. Verf. zeigt jedoch, daß diejenige Koordinatenbedingung, die zur Fixierung der Hyperfläche  $x^0 = \text{const}$  führt, auf die Aussage zurückgeführt werden kann, daß einer der 6 kanonischen Impulse verschwindet, wobei dann  $\mathfrak{S}_L = 0$  zur Eliminierung der kanonisch konjugierten Koordinate führt. Die Zahl der Freiheiten wird so auf 5 vermindert. Hierbei ist  $\mathfrak{S}_L = 0$  die allgemein-relativistische Verallgemeinerung der Poissonschen Gleichung für das Newtonsche Potential, in die als Quelle auch die Energie des Gravitationsfeldes selbst eingeht. — Diejenigen 3 Koordinatenbedingungen, die das Koordinatensystem auf  $x^0 = \text{const}$  fixieren, führen zu keiner Verminderung der Freiheitsgrade. Mit Hilfe einer vom Verf. früher (dies. Zbl. 36, 141) entwickelten Methode ist es jedoch möglich, die Poisson-Klammern so umzudefinieren, daß gemäß den neuen



Poisson-Klammern sowohl die Gleichungen  $\mathfrak{H}_s = 0$  als auch die Koordinatenbedingungen stark erfüllt werden. Verf. zeigt, daß die Koordinatenbedingungen so wählbar sind, daß die Umdefinition der Poisson-Klammern nichts an den Vertauschungsrelationen für Variable ändert, die nicht von den Feldgrößen des Gravitationsfeldes abhängen. — Der mit Hilfe der neuen Poisson-Klammern entwickelte kanonische Formalismus enthält keine "constraints" mehr. In der Hamilton-Funktion entfallen alle mit der Variation der Anfangsmannigfaltigkeit und der Veränderung des dreidimensionalen Koordinatensystems zusammenhängenden Terme, so daß nur der Hauptteil übrigbleibt. Die Hamilton-Dichte dieses Hauptteils ist gleich der Quelldichte des verallgemeinerten Newtonschen Potentials. — Zur Konsistenz der Behandlung reicht es demnach aus,  $\mathfrak{H}_L = 0$  aufzulösen und dann die  $g_{ik}$  auf der Anfangsmannigfaltigkeit den 3 Koordinatenbedingungen zu unterwerfen. In der quantisierten Einsteinschen Theorie ist somit die Schrödinger-Gleichung die einzige Bedingung, die die Wellenfunktion  $\psi$  erfüllen muß.  $\psi$  ist im Fall des reinen Gravitationsfeldes eine Funktion der 5 übriggebliebenen kanonischen Koordinaten desselben;  $\psi$  ist aber nur in einem Bereich erklärt, in dem die Koordinatenbedingungen erfüllt sind. Wird ein dynamischer Operator auf  $\psi$  angewandt, so liegt auch die neue Wellenfunktion in demselben Koordinatenbereich des Gravitationsfeldes.

H. Treder.

Chambers, L. G.: Solution of the Hund gravitational equations. Canadian J. Phys. 37, 433—437 (1959).

Im Anschluß an eine Arbeit von Kaempffer [Canadian J. Phys. 36, 151—159 (1958)] über die Hundsche Gravitationstheorie, die im Zusammenhang mit der Realisierung des Machschen Programms der Maxwell'schen Theorie nachgebaut wurde, werden Lösungen dieser Theorie untersucht. Insbesondere wird auf das stationäre Weltmodell und auf die Analogie zur Wheelerschen Geonentheorie eingegangen.

E. Schmutzer.

Higgs, P. W.: Quadratic Lagrangians and general relativity. Nuovo Cimento, X. Ser. 11, 816—820 (1959).

Im Anschluß an Stephensons drei Sätze von Gravitationsfeldgleichungen, erhalten aus Lagrangefunktionen, die im Christoffeltensor quadratisch sind (dies. Zbl. 81, 220) wird gezeigt, daß zwei dieser Sätze den quellenfreien Einsteinschen Gleichungen mit einem willkürlichen kosmologischen Term äquivalent sind.

E. Schmutzer.

Fichtengol'c (Fikhtengol'ts), I. G.: On coordinate conditions in Einstein's gravitation theory. Soviet Phys., JETP 35 (8), 1018—1023 (1959), Übersetz. von Žurn. éksp. teor. Fiz. 35, 1457—1465 (1958).

Ausgehend von den allgemeinen Gleichungen, die eine (keine zweiten und höheren Ableitungen enthaltende) Lagrangedichte  $\mathfrak{L}$  bei Kovarianz der zugehörigen Feldgleichungen erfüllen muß, erhält Verf. notwendige und hinreichende Bedingungen für die Invarianz von  $\mathfrak{L}$  für ein Tensorfeld gegenüber linearen und beliebigen infinitesimalen Koordinatentransformationen. Für das  $\mathfrak{L}$  der allgemeinen Relativitätstheorie gibt Verf. diese (Koordinaten-) Bedingungen explizit an und erörtert die Beziehungen zwischen ihnen und den zugehörigen —  $\mathfrak{L}$  invariant lassenden — Koordinatentransformationen in Spezialfällen (Invarianz gegen Zeittransformationen bei stationären Feldern, de Dondersche Koordinatenbedingung).

D. Geißler.

Rayner, Charles Beresford: Sur une solution des équations intérieures d'Einstein pour un mouvement de groupe. C. r. Acad. Sci., Paris 248, 2725—2727 (1959).

Ein beliebiger zeitartiger Vektor  $\xi^\alpha$  im  $V_4$  der allgemeinen Relativitätstheorie soll den Gleichungen von Killing:  $\xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha} = 0$  und den durch Elimination des Spannungstensors entstehenden Einsteinschen Gleichungen:  $G_\beta^\alpha \xi^\beta - \rho \xi^\alpha = 0$  ( $G_{\alpha\beta}$  = Einstein-Tensor) im Inneren eines Mediums mit der Dichte  $\rho$  gehorchen.

Verf. findet eine explizite Form für die allgemeine Lösung dieses Gleichungssystems in einem (lokalen) Koordinatensystem, in dem von  $\xi^*$  nur die Zeitkomponente nicht verschwindet.

*D. Geißler.*

**Rayner, Charles Beresford:** Mouvement rigide en relativité générale. C. r. Acad. Sci., Paris **248**, 929—932 (1959).

Für eine bewegte Flüssigkeit, die die Starrheitsbedingungen von Rosen (dies. Zbl. **33**, 92) erfüllt, werden aus den Einsteinschen Feldgleichungen Beziehungen zwischen dem Geschwindigkeitsvektor, daraus gebildeten Größen und der Ruhmassendichte hergeleitet. Aus ihnen ergibt sich insbesondere, daß die Ruhmassendichte und der Betrag des Rotationsgeschwindigkeitsvektors der Flüssigkeit längs der Weltlinien ihrer Teilchen konstant bleiben.

*A. Papapetrou.*

**Kawabe, R.:** A remark on the paradox of Einstein, Podolsky and Rosen. Nuovo Cimento, X. Ser. **13**, 448—450 (1959).

**Darwin, Charles:** The gravity field of a particle. Proc. roy. Soc. London, Ser. A **249**, 180—194 (1959).

Es wird die Bewegung von Probeteilchen im Schwarzschildfeld betrachtet und gezeigt, daß es bei hyperbelartiger Bahn kein Perihel innerhalb von  $r = 3m$  und bei ellipsenartiger Bahn keines innerhalb von  $r = 4m$  geben kann. Die im Endlichen verbleibenden Bahnen werden bezüglich ihrer Stabilität untersucht. Ferner wird gezeigt, daß jeder Lichtstrahl eingefangen wird, wenn sein anfänglicher asymptotischer Abstand nicht größer als  $3\sqrt{3}m$  ist.

*H.-G. Schöpf.*

**Wagh, R. V.:** On some isotropic solutions for the case of fluid sphere in relativity. J. Univ. Bombay, n. Ser. **26**, Nr. 5 (43), 16—19 (1958).

Considerando l'elemento lineare della forma

$$ds^2 = -F(r, t) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + H(r, t) dt^2$$

l'A. ricerca le soluzioni delle equazioni del campo in relatività imponendo la condizione di isotropia per il caso della sfera fluida che si traduce in un'equazione del tipo  $x^2 y / d\sigma^2 + \psi(\sigma) y^2 = 0$  (la  $\psi(\sigma)$  è una funzione arbitraria di  $\sigma$ ),  $\sigma = r^2$ ,  $y = F^{-1/2}$ . Tra le soluzioni particolari di quest'equazione che presentano interesse, l'A. ne indica due. — La prima si ha quando  $\psi(\sigma) = -\sigma$ , nel qual caso è  $y = (m \pm \sigma)^{-2}$ ,  $F = (m \pm \sigma)^4$ , da cui si deducono le espressioni per  $H$ , per la pressione  $p$ , per la densità  $P$  e per l'energia della sfera fluida. La seconda soluzione si ha quando  $\psi = -e^{m \pm \sigma}$  nel qual caso si trova  $y = e^{-(m \pm \sigma)}$ . L'A. osserva infine che la condizione di isotropia può essere scritta anche nella forma

$$4 F_{122}/F_1 - 2 F_{22}/F - 12 F_{12} F_2/F F_1 + 9 F_2^2/F^2 = 0$$

essendo

$$F_1 = \partial F / \partial t, F_2 = \partial F / \partial \sigma, F_{12} = \partial^2 F / \partial t \partial \sigma, \dots$$

Questa ammette le soluzioni  $F = e^{\sigma(t) + \psi(\sigma)}$ ,  $F = \{\Phi(t) - a\sigma\}^4$ , che corrispondono alle soluzioni dianzi indicate.

*G. Lampariello.*

**Fourès-Bruhat, Yvonne:** Conditions de continuité et équations de choc. C. r. Acad. Sci., Paris **248**, 1782—1784 (1959).

Verf. behandelt im Anschluß an Taub (dies. Zbl. **77**, 421) allgemein-relativistisch die Diskontinuitäten der ersten Ableitungen an nichtisotropen Hyperflächen: Aus der Bianchi-Identität und den Maxwell'schen Gleichungen werden die lokalen Sprungbedingungen für eine ladungstragende Flüssigkeit hergeleitet.

*H. Tredner.*

**Stanjukovič (Staniukovich), K. P.:** On the motion of bodies at high velocities in a weak gravitational field. Soviet Phys., Doklady **3**, 558—561 (1959), Übersetz. von Doklady Akad. Nauk SSSR **120**, 277 (1958).

Verf. untersucht adiabatische Bewegungen mit Zentralsymmetrie für Gase, bei denen absolute Temperatur und innerer Druck verschwinden und deren Teilchen sich annähernd mit Lichtgeschwindigkeit bewegen. Das als schwach vorausgesetzte Eigengravitationsfeld wird durch ein skalares Potential beschrieben, während



elektromagnetische Kräfte vernachlässigt werden. Für den kugelsymmetrischen Fall werden die Bewegungsgleichungen integriert und die verschiedenen Bewegungstypen diskutiert. *D. Geißler.*

Schöpf, Hans-Georg: Zum Problem der Energie des Gravitationsfeldes. *Ann. der Physik.* VIII. F. 5, 1—3 (1959).

Für ein spezielles Feld von Gravitationswellen wird ohne Benutzung eines speziellen Ansatzes für den Affintensor  $t_{\mu}^{\nu}$  gezeigt, daß keine Gravitationsenergie vorhanden ist. *Zusammenfassg. des Autors.*

Geissler, D., A. Papapetrou und H. Treder: Die Gravitationsstrahlung eines zeitweilig nichtstationären Systems. *Ann. der Physik*, VIII. F. 2, 344—350 (1959).

Ein periodisch von der Zeit abhängiges System emittiert nach Einstein und Eddington Gravitationsstrahlung, die mit einer Strömung von Gravitationsenergie verbunden ist. In die Rechnung Einsteins geht der Pseudotensor der Energie-Impuls-Dichte des Gravitationsfeldes ein; man kann daher nicht unmittelbar erkennen, daß sich die Energieströmung nicht wegtransformieren läßt, das Resultat also insbesondere unabhängig von der von Einstein verwendeten Hilbertschen Koordinatenbedingung ist. Im folgenden zeigen Verf., daß die Gravitationsstrahlung eines während eines endlichen Zeitraums periodisch von der Zeit abhängigen Systems kovariant ist. *L. Infeld.*

Petzold, Joachim: Die radialsymmetrische Lösung für skalare, masselose Mesonen in der projektiven Relativitätstheorie. *Z. Naturforsch.* 14a, 205—207 (1959).

Ausgehend von einem 4-dimensionalen Variationsprinzip werden im Sinne der projektiven Relativitätstheorie Feldgleichungen für das metrische Feld, das skalare Feld und das Feld der variablen Gravitationszahl hergeleitet. Es wird eine vollständige, radialsymmetrische statische Lösung der Feldgleichungen gefunden, die masselosen skalaren Mesonen zugeordnet wird. Die Gesamtenergie der Felder divergiert. Im Zusammenhang damit wird geschlossen, daß keine singularitätenfreie Lösung existiert. Die Struktur der Lösung wird ausführlich diskutiert. *E. Schmutzer.*

Schmutzer, Ernst: Speziell-relativistische Auswertung einer Variante der projektiven Relativitätstheorie. *Z. Naturforsch.* 14a, 486—488 (1959).

Unter Vernachlässigung der Gravitationsgleichungen und des Gravitationsfeldes erhält der Verf. aus den Feldgleichungen der projektiven Relativitätstheorie solche einer nichtlinearen Elektrodynamik mit Vakuum polarisation. Diese Feldgleichungen werden für den kugelsymmetrischen elektrostatischen Fall gelöst. *H. Treder.*

Takasu, Tsurusaburo: Ein Seitenstück der Relativitätstheorie als eine erweiterte Laguerresche Geometrie. *Proc. Japan Acad.* 35, 65—70 (1959).

Eine Geometrisierung der Physik und die Theorie des Verf. (dies. Zbl. 67, 205) läßt sich auf zwei Weisen aufbauen: (1) auf Grund des Prinzips der kleinsten Wirkung in der sog. Summenmannigfaltigkeit (d. h. Raum-Zeitwelt + Impuls-Potentialfeld), dessen Lösungen die Bahnen der freien Partikel sind, und (2) auf Grund des in dieser Arbeit vorgeschlagenen Prinzips der kleinsten Arbeit in der neuen Summenmannigfaltigkeit: Raum-Zeitwelt + Feld von Kraft-(Zeitgradient des Potentials), dessen Lösungen die Kraftlinien sind. Früher wurde vom Verf. die Methode (1) benutzt, in der vorliegenden Arbeit wird die Methode (2) durchgeführt. Endlich wird die Methode (2) im Falle von zwei Beispielen erläutert. *J. I. Horváth.*

Takeno, Hyôitirô: On geometric properties of some plane wave solutions in general relativity. I. Tensor, n. Ser. 9, 76—93 (1959).

Verf. diskutiert die geometrischen Eigenschaften der von ihm in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 83, 429) hergeleiteten ebenen Wellenlösungen der Einsteinschen bzw. Einstein-Maxwellschen Feldgleichungen. Insbesondere wird gezeigt, daß sowohl das elektromagnetische Feld als auch das Gravitationsfeld Nullfelder im Sinne



von Synge (Relativity: The Special Theory, dies. Zbl. **71**, 218) und Lichnerowicz [C. r. Acad. Sci., Paris **246**, 893—896 (1958)] sind. Für den Fall des reinen Gravitationsfeldes ist der Riemann-Tensor demnach vom zweiten Petrowschen Typ mit den Eigenwerten Null.

H. Treder.

Sharp, David: Variational principle for geometrodynamics. Phys. Review Lett. **3**, 108—110 (1959).

In gewisser Analogie zu den Gedanken von Rainich, Misner und Wheeler hinsichtlich einer einheitlichen Feldtheorie von Gravitation und Elektromagnetismus schlägt Verf. ein Variationsprinzip vor, um daraus gewisse Feldgleichungen herzuleiten. Die Deduktion der restlichen Feldgleichungen wird auf das Problem der Auffindung eines Superpotentials für den metrischen Tensor zurückgeführt. Dabei wird die Stationarität des Wirkungsintegrals in bezug auf willkürliche Variationen des metrischen Tensors und des Integrationsweges gefordert.

E. Schmutzer.

Treder, H.: Zum Aufsatz von S. I. Husain "On unified field theory of gravitation and electromagnetism". Tensor, n. Ser. **7**, 128—129 (1957).

Es wird die Ableitung der Feldgleichungen der einheitlichen Feldtheorie von Husain (dies. Zbl. **72**, 440) wegen der Nicht-berücksichtigung des Gliedes  $\sqrt{-g} F^{kl} F_{kl}$  der Lagrangeschen Funktion kritisiert. Diese Kritik ist zutreffend, da die Nicht-berücksichtigung des elektromagnetischen Feldes bei der Herleitung der Feldgleichungen in der genannten Arbeit nicht vollkommen und ausführlich erläutert wurde, was zu einem Mißverständnis führen konnte. [Wir möchten bemerken, daß sich S. I. Husain in der späteren Arbeit: "Thesis on unified field theories of relativity" (Delhi 1957) auch mit den vom Verf. in der referierten Arbeit vorgeschlagenen Ergänzungen beschäftigt hat].

J. I. Horváth.

Ikeda, Mineo: On tensorial concomitants of a non-symmetric tensor  $g_{\mu\nu}$ . II. Tensor, n. Ser. **7**, 117—127 (1957).

Die Untersuchung, die vom Verf. und Abe (dies. Zbl. **77**, 150) durchgeführt wurde, wird in dieser Arbeit für Pseudo-Tensoren verallgemeinert, und die Resultate werden im Falle der nicht-symmetrischen einheitlichen Feldtheorie von Einstein (The meaning of relativity, dies. Zbl. **50**, 212) und Bonnor (dies. Zbl. **56**, 440) angewandt. Die Pseudo-Tensoren transformieren sich gleichartig, wie die Tensoren, nur wird ihre Transformationsformel mit dem Faktor  $\tau = \Delta/|\Delta|$  multipliziert, wo  $\Delta$  die Transformationsdeterminante  $[\det(\partial x'^\mu/\partial x^\nu)]$  bedeutet. Es wurden weiterhin die sog.  $\Delta$ -Dichten von Ordnung  $\omega$  eingeführt, in deren Fall  $\tau = \Delta |\Delta|^{-\omega-1}$  ist. Diese Definition der sog.  $\Delta$ -Dichten ist, im Falle von geraden  $\omega$ , von ihrer Schoutenschen Definition (J. A. Schouten, Ricci-Calculus, dies. Zbl. **57**, 378) verschieden. Die angegebenen 4 Hilfssätze und 17 Sätze entsprechen mutatis mutandis den in der ersten Arbeit diskutierten Sätzen. Endlich wird darauf hingewiesen, daß sich die wichtigste (schiefsymmetrische) Größe von zweiter Ordnung des elektromagnetischen Feldes entweder als Pseudo-Tensor, oder als Tensor darstellen läßt.

J. I. Horváth.

Robinson, I.: A solution of the Maxwell-Einstein equations. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. math. astron. phys. **7**, 351—352 (1959).

This note presents a spherically symmetrical solution of the gravitational and electromagnetic field equations for empty space.

Aus der Einleitung.

Anderson, James L.: Factor sequences in quantized general relativity. Phys. Review, II. Ser. **114**, 1182—1184 (1959).

In der Hamiltonschen Form der Einsteinschen Gravitationstheorie verschwinden entsprechend der Konsistenz der Theorie die Poissonklammern der — gemäß Dirac (dies. Zbl. **80**, 414, 415) definierten — „constraints zweiter Art“  $\mathfrak{H}_L$  und  $\mathfrak{H}_\nu$  schwach. Verf. bemerkt nun, daß das Verschwinden der Poissonklammern der klassischen Theorie allein noch nicht die Vertauschbarkeit der Operatoren  $\mathfrak{H}_L$  und  $\mathfrak{H}_\nu$  der quantisierten Theorie garantiert, sondern diese Vertauschbarkeit noch von der Reihen-

folge der Feldoperatoren  $g_{ab}$  und  $p^{ab}$  in  $\mathfrak{S}_L$  und  $\mathfrak{S}_v$  abhängt. Durch die Forderung der Vertauschbarkeit wird die Form von  $\mathfrak{S}_v$  bis auf Äquivalenzen eindeutig bestimmt; hingegen ist dies bei  $\mathfrak{S}_L$  nicht der Fall, da dieser Operator quadratisch in  $p^{ab}$  ist.

*H. Treder.*

**Lichnerowicz, André:** Sur un procédé de quantification du champ de gravitation. C. r. Acad. Sci., Paris **247**, 433—436 (1958).

**Droz-Vincent, Philippe:** Une méthode de quantification en théorie unitaire pentadimensionnelle. C. r. Acad. Sci., Paris **248**, 1790—1792 (1959).

**Gulmanelli, P. and E. Montaldi:** Gravitational forces and quantum field theory. Nuovo Cimento, X. Ser. **5**, 1716—1721 (1957).

The Gamow-Teller hypothesis, according to which an exchange of neutrino pairs could give rise to a gravitational type potential between nucleons, is re-examined. By introducing a new boson field it is shown that this guess cannot be valid at least in the frame of the usual linear field theories.

Zusammenfassg. der Autoren.

**Kronsbein, John and Erich A. Farber:** Time retardation in static and stationary spherical and elliptic spaces. Phys. Review, II. Ser. **115**, 763—764 (1959).

Verff. diskutieren das „Uhren-Paradoxon“ in sphärischen oder elliptischen Räumen, die durch die kosmologischen Gravitationsgleichungen Einsteins bestimmt sind und deren Metrik statisch oder stationär ist.

*H. Treder.*

**Arcidiacono, Giuseppe:** La relatività di Fantappiè. Collect. Math. **10**, 85—124 (1958).

L'oggetto di questa interessante Memoria è l'esposizione di una teoria dei modelli di Universo fondata su idee che furono proposte da L. Fantappiè nel 1954 nella sua teoria della relatività finale. Il concetto di legge fisica e il concetto di Universo intero come un sistema ordinato e quindi governato da leggi hanno permesso al Fantappiè di dimostrare che il gruppo di Lorentz é caso limite di un nuovo gruppo, posto in evidenza dal Fantappiè. — Ne segue che il modello di Universo di Minkowski può essere perfezionato in quello di de Sitter cui corrisponde una nuova teoria di relatività. Utilizzando opportunamente la teoria dei gruppi, si ottiene non soltanto un perfezionamento della teoria della relatività speciale, ma si vede anche la possibilità di costruire tutta una serie di modelli di Universo tra i quali si potrà scegliere quello che più si approssima all'Universo fisico reale. La Memoria comincia con uno studio sistematico del concetto di eguaglianza che sta a base della nozione di legge fisica.

*G. Lampariello.*

**Neyman, Jerzy and Elizabeth L. Scott:** Statistical approach to problems of cosmology. J. roy. statist. Soc., Ser. B **20**, 1—43 (1958).

Diese Zusammenarbeit eines Statistikers mit einem Astronomen (bzw. einer Astronomin) besteht seit Jahren, sehr zum Vorteil der Kosmologie. Es geht darum, die „Fleckigkeit“ der Verteilung der Galaxien im Raum — sichtbar in Gestalt von Haufenbildung auf den photographischen Platten der Durchmusterungen — mit Hilfe eines hypothetischen Zufallsmechanismus zu reproduzieren. Die Erwartung dabei ist, daß eine statistische Analyse entscheiden kann, welche von den beiden kosmologischen Theorien über den Zustand des Universums — statisch/stationär oder expandierend — der Wirklichkeit besser entspricht. Wenn die Dichte der Haufen im Raum mit der Entfernung von uns wächst, dann expandiert und entwickelt sich das Universum, wenn die Dichte dagegen konstant bleibt, ist das Universum statisch oder stationär. Die Idee ist einfach genug, erfordert aber einen enormen Rechenaufwand. Das letzte Kapitel stellt die theoretischen Folgerungen der empirischen Beziehung zwischen Radialgeschwindigkeit und Entfernung (nach Hoyle und Sandage) gegenüber; diese deutet auf eine Verzögerung der Expansion hin — mit dem Schluß, daß die Expansion vor einer Milliarde Jahren rascher erfolgte als heute. Das wäre der Hinweis dafür, daß wir in einem evolutionären und nicht in einem stationären Universum leben.

*W. Strohmeier.*

## Quantentheorie:

Sirokov (Shirokov), Ju. M. (Ju. M.): A group-theoretical consideration of the basis of relativistic quantum mechanics. IV: Space reflections in quantum theory. Soviet Phys., JETP 7, 493—498 (1958), Übersetz. von Žurn. éksper. teor. Fiz. 34 717—724 (1958).

Klassifizierung und Diskussion aller irreduziblen Darstellungen der inhomogenen Lorentzgruppe mit Einschluß der Raumspiegelung. *G. Grawert.*

Białynicki-Birula, I.: A new approach to time reflection. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 5, 805—807 (1957).

Verf. zeigt, daß die Grundgleichungen der Quantentheorie erhalten bleiben wenn man mit  $t$  in  $-t$  auch  $\hbar$  in  $-\hbar$  überführt. *G. Grawert.*

Touschek, B.: A note on the Pauli transformation. Nuovo Cimento, X. Ser. 13, 394—404 (1959).

Verf. studiert Theorien mit Teilchen vom Spin  $\frac{1}{2}$  und diskutiert besonders die Eigenschaften, die aus der Invarianz der Theoriebeisogenannten  $\gamma_5$ -Transformationen folgen. Diese Transformationen können schematisch in folgender Weise dargestellt werden  $\psi \rightarrow \exp[i\alpha\gamma_5]\psi$ . Verf. zeigt, daß jeder Zustand einer solchen Theorie entweder die Masse Null haben oder so entartet sein muß, daß zwei asymptotische Spinoren konstruiert werden können, die sich bei einer Pauli-Transformation (Pauli, dies. Zbl. 77, 431) in verschiedener Weise transformieren. Diese Überlegungen sind insbesondere für allgemeine Theorien der Elementarteilchen von Interesse.

*G. Källén.*

Maslov, V. P.: Degeneration on passing from a discrete spectrum to a continuous one and transition from quantum mechanics to classical mechanics. Doklady Akad. Nauk SSSR 114, 957—960 (1957) [Russisch].

Allgemeine mathematische Sätze für eine Folge selbstadjungierter, positiver Operatoren mit diskretem Spektrum, die gegen einen selbstadjungierten Operator mit kontinuierlichem Spektrum stark konvergieren. Anwendung auf den Grenzübergang  $\hbar \rightarrow 0$  in der Quantenmechanik. *G. Grawert.*

Rjazanov (Riazanov), G. V.: Quantum-mechanical probabilities as sums over paths. Soviet Phys., JETP 35 (8), 85—93 (1959), Übersetz. von Žurn. éksper. teor. Fiz. 35, 121—131 (1958).

In this paper, which is mainly inspired to the "Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics" of Feynman [Reviews modern Phys. 20, 367—387 (1948)], the author asserts that the whole structure of the nonrelativistic quantum mechanics can be based only on a single principle, which gives directly the probability  $W(a)$  (not the amplitude) for finding a given value  $a$  for the physical quantity  $a\{x(t)\}$  depending on the path  $x(t)$ . The principle is formulated as follows:

$$W(a) = \int_a \cos(S/\hbar) d\Gamma, \quad (1)$$

where  $\int_a d\Gamma$  denotes the integral over all paths for which  $a\{x(t)\} = a$  and  $S$  is the change of the classical action along the path. The meaning of principle (1) and its connection with the conventional formulation are illustrated. However, no general proof of the equivalence of the present formulation to the usual one is given.

*A. Loinger.*

Uhlmann, A.: Schema einer Quantenmechanik mit indefiniter Metrik. Nuclear Phys. 9, 588—595 (1959).

R. Ascoli und E. Minardi (dies. Zbl. 84, 444) untersuchten einige allgemeine Eigenschaften von Quantentheorien, die einen linearen komplexen Raum mit indefiniter Metrik benützen. Der Ausgangspunkt dieser Arbeit war der Begriff des physikalischen Zustandes zu einer gegebenen Zeit, unter dem eine



Situation angedeutet ist, die von physikalischen Messungen völlig bestimmt ist. Weiter wird angenommen, daß jedem physikalischen Zustand eine Richtung in einem vorgegebenen linearen komplexen Raum entspreche. In der vorliegenden Arbeit werden dieselben Theorien untersucht, doch geht man einzig vom Begriff des vorgegebenen komplexen Raumes mit indefiniter Metrik aus. So bleibt eine Willkürlichkeit im weiteren Aufbau der Theorie, insbesondere im Zusammenhang zwischen dem Raum der physikalischen Zustände und dem vorgegebenen linearen komplexen Raum. Eine solche Willkürlichkeit wird in der Arbeit besonders durchgesehen. In der Arbeit werden auch einige einfache allgemeine Eigenschaften von linearen komplexen Räumen mit indefiniter Metrik angegeben und bewiesen.

*R. Ascoli.*

**Uhlmann, A.: Untersuchungen über Quantentheorien mit indefiniter Metrik.** Nuclear Phys. 12, 103—116 (1959).

Der Zusammenhang zwischen einer Arbeit von R. Ascoli und E. Minardi (dies. Zbl. 84, 444) und der vorstehend referierten Arbeit desselben Verf. wird besonders betrachtet. Die Struktur der ersten Auffassung wird auch weiter untersucht.

*R. Ascoli.*

**Takabayasi, T.: Relativistic particle with internal rotational structure.** Nuovo Cimento, X. Ser. 13, 532—553 (1959).

Généralisation de la théorie de Weyssenhoff étudiée en termes tensoriels, puis spinoriels (le „mouvement interne“ est décrit par la rotation d'un 4 èdre lorentzien). Le spineur obéit à une équation du 3<sup>ème</sup> ordre analogue à celle proposée par ailleurs par W. Heisenberg. On escompte que la quantification du modèle pourra fournir 1. une classification des particules, 2. un spectre de masses. Noter que dans ce travail (analogue à ceux de Bohm, Vigier et alii) le „4-espace interne“ est pseudo-euclidien, et non euclidien comme chez Salam, d'Espagnat, Prentki.

*O. Costa de Beauregard.*

**Keller, Joseph B.: Corrected Bohr-Sommerfeld quantum conditions for nonseparable systems.** Ann. of Phys. 4, 180—188 (1958).

Es wird versucht, die Quantenbedingungen der älteren korrespondenzmäßigen Bohr-Sommerfeldschen Quantentheorie zu Kriterien zu erweitern, die entscheiden lassen, ob die Quantenzahlen ganz oder halbzahlig sind. Diese Kriterien, deren Zusammenhang mit den Ergebnissen der Quantenmechanik nicht ohne weiteres evident ist, werden auch für nicht separable Systeme aufgestellt.

*F. Schlögl.*

**Altmann, S. L.: Equivalent functions: hybrids and Wannier functions.** Proc. Cambridge philos. Soc. 54, 197—206 (1958).

In the quantum-mechanical treatment of problems in crystal and molecular physics it has been found convenient to introduce classes of functions with special symmetry properties: hybrids [Pauling, L., Proc. Nat. Acad. Sci. USA 14, 359 (1928)], equivalent orbitals (Lennard-Jones, this Zbl. 33, 38), Wannier functions (Wannier, G., this Zbl. 17, 236) and orthogonal orbitals [Löwdin, P.-O., Phys. Rev. 81, 365 (1950)]. The author demonstrates their relations in an elegant manner by means of a unified treatment.  $G$  is the group of operations on the configuration space of the system which leave the Hamiltonian functions invariant. If  $G$  is represented by a set  $\{Gr\}$  of operators on a function space, a set of functions  $\{\varphi(n)\}$  is said to be equivalent under  $G$  if for each  $r, m$  there is an  $n$  such that  $Gr \varphi(m) = \varphi(n)$ . A formula is derived which enables us to write down a set equivalent under  $G$  given a set spanning a representation of  $G$  and the character table of  $G$ . The formula is applied to some specific cases.

*K. T. Lewis.*

**Bernardes, N.: Potential energy matrix elements between non-overlapping wave functions.** Nuovo Cimento, X. Ser. 11, 628—634 (1959).

Es werden für zwei Teilchen, die sich in kugelsymmetrischen Zuständen mit verschiedenen Zentren befinden, die Matricelemente eines nur vom gegenseitigen

Abstand abhängigen Potentials in dem Falle berechnet, daß keine Überlappung auftritt. Es wird eine Reihenentwicklung für sie angegeben. Als spezielles Beispiel werden Erwartungswerte eines Van der Waalschen Attraktionspotentials berechnet.  
*F. Schlögl.*

**Pac, Pong Y.: On the transformation properties of the Dirac equation.** Progress theor. Phys. **21**, 640—652 (1959).

Es werden zwei Arten von dreidimensionalen Rotationsgruppen betrachtet, die „Helizitätsgruppe“ und die „Pseudohelizitäts-Gruppe“, welche den Hamilton-Operator der Dirac-Gleichung invariant lassen. Damit wird ein Satz von unitären Transformationen konstruiert, die die Foldy-Wouthuysen-Tani-Transformation und die Cini-Toushek-Transformation als Spezialfälle enthalten und eine Verallgemeinerung und gemeinsame Behandlung dieser beiden Transformationen gestatten. Schließlich wird die  $V$ - $A$ -Form der Wechselwirkung vom Standpunkt der Rotations-Gruppen aus diskutiert.  
*K.J. Biebl.*

**Rojanski, V.: Q-number modification of the Lorentz rotations.** Phys. Review. II. Ser. **114**, 634—635 (1959).

Das Glied  $\varrho_3 m c^2$  in der Diracgleichung (in Diracs Schreibweise) wird durch  $(\varrho_3 a + \pi_3 \varrho_3 b_1 + \pi_1 b_2) m c^2$  ersetzt, wobei  $a, b_1, b_2$  von Null verschiedene Konstanten und  $\pi_1, \pi_3$  mit  $\varrho'$  und  $\sigma'$  kommutierende Quadratwurzeln von Eins sind. Letztere können mit  $8 \times 8$ -Matrizen realisiert werden. Die resultierende achtkomponentige Gleichung stellt nicht eine Verallgemeinerung der Diracgleichung dar, da sie nicht mehr ganz Lorentzinvariant ist; sie zerstört auch die Beziehung zwischen Spin und magnetischem Moment. Die neue Gleichung erlaubt aber Lorentzähnliche Transformationen.  
*A. O. Barut.*

**Tarasov, Ju. A. (Ju. A.): Bound states in positronium.** Soviet Phys., JETP **6**, 542—544 (1958), Übersetz. von Žurn. éksp. teor. Fiz. **33**, 706—709 (1957).

Die gebundenen Zustände eines Elektron-Positronpaares werden in der ersten nichtadiabatischen Näherung der Bethe-Salpeter-Gleichung untersucht. Dabei stellt sich heraus, daß die Pole des Photonpropagators für die gebundenen Zustände von Bedeutung sind. Dieselbe Methode soll zur Untersuchung gebundener Nukleon-Antinukleonzustände verwendet werden.  
*M. E. Mayer.*

**Moe, Mildred and David S. Saxon: Variational methods in scattering problems.** Phys. Review, II. Ser. **111**, 950—957 (1958).

Es werden Modifikationen des Hulthen-Kohnschen Variationsprinzips angegeben, um die Variationsverfahren besser ausnützen zu können. Dabei wird gezeigt, daß eine größere Anzahl stationärer Ausdrücke auftreten, welche eine größere Freiheit in der Wahl der Variationsprinzipie gestatten als es bisher der Fall war. Auch werden einige Kriterien für die Auswahl der speziellen Formen angegeben.  
*P. Urban.*

**Brenig, W. und R. Haag: Allgemeine Quantentheorie der Stoßprozesse.** Fortschr. Phys. **7**, 183—242 (1959).

A review of the general theory of scattering. 1: Scattering. The concepts of strong and weak convergence in Hilbert space are defined; it is shown that asymptotically the solutions of Schrödinger's equation with a potential converge strongly to free solutions. The  $S$ -matrix is defined in terms of "in" and "out" states in the Heisenberg picture. In the interaction picture, integral equations for scattering and bound states are derived. The exact meaning of "adiabatic switching on" is given. A brief account of the calculation of stationary states, and the formal explicit solution is presented. 2: General Collision Processes. The new difficulties which appear when particles are produced or absorbed are illustrated by examples from nuclear physics, static meson theory and field theory. Collision theory is formulated without recourse to the free Hamiltonian; the completeness of the in and out states and the unitarity of  $S$  are discussed. Transformation and invariance



in the theory are defined. Integral equations generalizing those of § 1 are derived. Renormalisation is considered in a model theory. It is remarked that in field theory the asymptotic convergence is weak. 3: Interpretation of the  $S$ -matrix. It is shown how to derive probabilities for physical processes from the  $S$ -matrix. The phase-shift for large angular momenta is given in terms of the effective range. The motion of wave packets is discussed. 4: Resonance Theory. The connection between resonance and metastable states is shown. The theory of resonance in terms of complex energy is given; this is generalized to collisions with many channels. It is shown how the existence of a resonance and the resonance width depend on the effective range. 5: Low Energy Approximation. The  $1/v$  law for exothermic reactions is derived; the scattering length approximation with the effective range correction is found. 6: Analytic Properties of the  $S$ -matrix. The solution of Schrödinger's equation with local and non-local potential is discussed as a regular function of the energy. Dispersion relations for the forward scattering amplitude are given, and generalized to non-zero momentum transfer. Analytic continuation into the unphysical region is made using Legendre polynomials. *R. F. Streater.*

**Faddeev, L. D.: Dispersion relations in non-relativistic scattering theory.** Soviet Phys., JETP 35 (8), 299—303 (1959), Übersetz. von Žurn. éksp. teor. Fiz. 35, 433—439 (1958).

It is proposed that dispersion relations for the amplitude for potential scattering be proved from the analytic properties of the Green's function for the total Hamiltonian. The relations obtained by Wong and Khuri are proved rigorously for a class of local potentials. The causality principle is equivalent to a sufficient but not necessary condition on the potential, and is not required in the proof. A unitary  $S$ -matrix depends on more parameters than does a potential, and the condition on the  $S$ -matrix that it is derivable from a potential gives rise to dispersion relations for the  $S$ -matrix elements. *R. F. Streater.*

**Faddeev, L. D.: On the relation between the  $S$ -matrix and potential for the one-dimensional Schrödinger operator.** Soviet Phys., Doklady 3, 747—751 (1959), Übersetz. von Doklady Akad. Nauk SSSR 121, 63—66 (1958).

Es wird eine Beziehung zwischen der  $S$ -Matrix und dem Potential hergeleitet, wobei die eindimensionale Schrödinger-Gleichung zugrunde gelegt wird. *P. Urban.*

**Chew, G. F. and F. E. Low: Unstable particles as targets in scattering experiments.** Phys. Review, II. Ser. 113, 1640—1648 (1959).

Zur Analyse von Streuexperimenten, bei denen die Streufolien als aus nicht-stabilen Teilchen bestehend vorausgesetzt werden können, werden allgemeine Betrachtungen über die Streuung eines Teilchens  $A$  an einem Teilchen  $B$  nach dem Reaktionstypus:  $A + B \rightarrow 3$  oder mehrere Teilchen, durchgeführt. Zur Berechnung des Streuquerschnittes für die Streuung eines Teilchens  $A$  an einem in  $B$  enthaltenen virtuellen Teilchen wird die  $S$ -Matrix Theorie herangezogen, wobei plausible Annahmen über die Lage und die Residuen der Pole der  $S$ -Matrix gemacht werden. Die allgemeinen Überlegungen werden an dem Beispiel  $n + d \rightarrow n + n + p$  illustriert. *Th. Seel.*

**Ciulli, Sorin et Jan Fischer: Sur la théorie des opérateurs angulaires.** C. r. Acad. Sci., Paris 249, 1090—1092 (1959).

**Jost, Res: Eine Bemerkung zum CTP-Theorem.** Helvet. phys. Acta 30, 409—416 (1957).

Vorausgesetzt wird: 1. Invarianz der Quantenfeldtheorie gegen eigentliche, inhomogene Lorentz-Transformationen. 2. Die Energie besitzt keine negativen Eigenwerte. 3. Existenz eines Vakuums. — Bewiesen wird folgendes Theorem: Die Invarianz der Theorie gegen TCP ist äquivalent mit folgender „schwacher Kausalität“: Für die Vakuumerwartungswerte eines beliebigen Produkts von Feld-



operatoren gilt

$$\langle \psi_1(x_1) \cdots \psi_n(x_n) \rangle_0 = (-1)^\sigma \langle \psi_n(x_n) \cdots \psi_1(x_1) \rangle_0,$$

für jedes  $n$ -Tupel von Vierervektoren  $x_v$ , für die  $\sum \lambda_v (x_v - x_{v-1})$  ein raumartiger Vektor ist, sofern  $\lambda_v \geq 0$ . ( $\sigma$  = Zahl der Transpositionen von Spin 1/2-Feldern in der invertierten Reihenfolge.) — Der Beweis baut auf Ergebnissen über die analytische Fortsetzbarkeit der Vakuum Erwartungswerte auf. *G. Grawert.*

**Dyson, Freeman J.:** Integral representations of causal commutators. Phys. Review, II. Ser. **110**, 1460—1464 (1958).

Das folgende Problem wird gelöst: Finde die allgemeinste Funktion  $f(x)$  des Vierervektors  $x$ , die für raumartige  $x$  verschwindet und deren Fouriertransformierte  $\tilde{f}(q) = \int e^{iqx} f(x) dx$  als Funktion des Vierervektors  $q$  innerhalb eines durch zwei raumartige Hyperflächen begrenzten Gebiets verschwindet. Hierzu wird gezeigt, daß zufolge der ersten Eigenschaft  $\tilde{f}(q)$  als Funktion von  $q_0, q_1, q_2, q_3$  eine eindeutige Fortsetzung  $\tilde{f}(q; \sqrt{q_4^2 + q_5^2})$  in den um zwei Raumdimensionen erweiterten Raum  $q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5$  hat derart, daß  $\tilde{f}(q; 0) = \tilde{f}(q)$ ,  $\partial/\partial q_{4,5} \tilde{f}(q; \sqrt{q_4^2 + q_5^2})|_{q_4=q_5=0} = 0$  und

$$(\square_q - \partial^2/\partial q_4^2 - \partial^2/\partial q_5^2) \tilde{f}(q; \sqrt{q_4^2 + q_5^2}) = 0$$

ist. (Explizit ist

$$\tilde{f}(q; \sqrt{q_4^2 + q_5^2}) = \int e^{iqx} f(x) J_0(\sqrt{x^2} \sqrt{q_4^2 + q_5^2}) dx.$$

Verf. wählt fünf anstatt der ausreichenden vier Raumdimensionen der dann einfacheren Form der Greenschen Funktion wegen.) Damit ist die zweite Bedingung einem Cauchyproblem mit zeitartiger Vorgabe äquivalent, zu dessen Lösung auf ein Ergebnis von R. Jost und H. Lehmann (dies. Zbl. **77**, 424) zurückgegriffen wird. (Tatsächlich ist dies Ergebnis eine Folge des Asgeirssonschen Mittelwertsatzes.) Hiermit läßt sich die Aufgabe auf das Cauchyproblem mit Vorgabe auf einer fünfdimensionalen raumartigen Hyperfläche zurückführen, dessen Lösung wohlbekannt ist. Für den Fall bezüglich der Hyperebene  $q_0 = 0$  symmetrischen „Nullgebiets“ wird das Ergebnis von Jost und Lehmann (l. c.) zurückgewonnen. — Die gewonnene Integraldarstellung von  $f(x)$  hat sich für gewisse feldtheoretische Aufgaben (Studium der Konsequenzen der Lokalität der Felder) als äußerst nützlich erwiesen. Es mag bemerkt werden, daß das gelöste Darstellungsproblem sich auch als Aufgabe aus der Funktionentheorie mehrerer komplexer Variabler auffassen läßt, in dieser Form jedoch vorher keine vollständige Lösung gefunden hat. *K. Symanzik.*

**Ferrari, E. and G. Jona-Lasinio:** On the causal propagation function of a Dirac field. Nuovo Cimento, X. Ser. **10**, 310—317 (1958).

Die Fortpflanzungsfunktion für ein Diracfeld wird durch Einsetzen von Zwischenzuständen zerlegt, und es wird das (bereits bekannte) Ergebnis hergeleitet, daß die amputierte Vertexfunktion mit dem Boson- und einem Fermionimpuls auf der Massenschale verschwindet, wenn das Quadrat des zweiten Fermionimpulses gegen Unendlich geht. *K. Symanzik.*

**Ito, D., S. Minami and H. Tanaka:** A note on an acausality test. II. Nuovo Cimento, X. Ser. **9**, 461—469 (1958).

In Fortsetzung einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **81**, 435) geben Verff. ein (nur heuristisches) Argument dafür, daß bei nur außerhalb eines raumartigen Intervalls  $I_0$  verschwindendem Kommutator der Feldoperatoren anstatt der Vorwärtsstreuamplitude  $M(\omega)$  der Meson-Nukleon-Streuung das Produkt  $M_a(\omega) \equiv M(\omega) e^{i\omega I_0}$  die Dispersionsrelation

$$\operatorname{Re} M_a(\omega) = \frac{1}{\pi} P \int \frac{\operatorname{Im} M_a(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \quad \operatorname{Im} M_a(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int \frac{\operatorname{Re} M_a(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'$$

erfüllen sollte. Die Betrachtungen der Arbeit laufen darauf hinaus, bei kleinem  $I_0$

$$M(\omega) = M_a(\omega) - i\omega I_0 M_a(\omega) + \dots$$

zu entwickeln. Da  $M_a(\omega)$  die vorstehende Relation erfüllt, erfüllt sie der Korrekturterm (des schwächeren Verschwindens im Unendlichen wegen) im allgemeinen nur bis auf eine möglicherweise formal unendliche Konstante, die bei Ausführung einer Subtraktion zur Konvergenzverbesserung (was äquivalent der Prüfung der Dispersionsrelation für den Quotienten  $M(\omega) (\omega - \omega_0 + i a)^{-1}$  ist) eliminiert wird, und entsprechend für höhere Potenzen von  $l_0$ . Verff. diskutieren die Energieabhängigkeit des Fehlers in der  $\pi$ -Proton-Dispersionsrelation nach damaligen Daten. Neuere Daten lassen keine sichere Verletzung der Dispersionsrelation mehr erkennen.

*K. Symanzik.*

**Redmond, P. J.:** Elimination of ghosts in propagators. Phys. Review, II. Ser. **112**, 1404—1408 (1958).

One of the fundamental problems of present theoretical physics is the question whether it is possible to construct local quantum field theories. Nobody until now has solved this problem but many people has given "strong" arguments in favour of either the positive or the negative answer. Many of such arguments seem to be quite reasonable; however a more careful analysis indicates that the opposite conclusion is even more reasonable; it is instructive the fact that usually the mistake is based on the overlook of some rather subtle mathematical point, so that at least we conclude that much care must be taken before driving any conclusion in this field. One of the "strong" arguments against the usual local field theory is the appearance of "ghosts" in the one-particle propagators calculated starting from the first terms of an expansion in powers of the coupling constant  $g$ . Using a less specialized language this means that the normalization condition on the state of one particle cannot be imposed without introducing an indefinite metric in the "Hilbert" space (provided the calculations are done using a perturbative expansion). This fact has been recognized firstly by G. Källén and W. Pauli (this Zbl. **66**, 443) in connection with the D. T. Lee model. Now the author of the work in question starts from the remark that the expression for the propagator calculated with the above mentioned perturbative method, when considered as a function of the four-momentum of the particle, contradicts for complex values of the variables some analyticity properties which have been proved rigorously by Källén (this Zbl. **50**, 430) and Lehmann (this Zbl. **55**, 214) (independent from any perturbative expansion). Then the author considers the expression giving the propagator in terms of the kernel which is expanded in powers of the coupling constant: making use of the proved analyticity properties he puts the expression into another form which gives rise in any case to a propagator with the right analyticity properties: this relation is equivalent to the original one for the exact kernel, but not necessarily for an approximate kernel. In this way, using for the kernel the same perturbative expansion as before, the author gets a propagator without "ghosts". It is then clear that such an expression for the propagator cannot be expanded in powers of the coupling constant: the author proofs that the expression has an essential singularity at  $g = 0$  of the type  $\exp(1/g^2)$ . So the argument against the usual local field theory based on the appearance of "ghosts" in the propagators calculated with the usual perturbative methods is by no means conclusive: indeed it is based on the assumption that the propagator is a regular function of the coupling constant  $g$  at  $g = 0$ ; but the opposite assumption that the propagator has an essential singularity at  $g = 0$  looks now more reasonable.

*R. Ascoli.*

**Källén, G. and H. Wilhelmsson:** Generalized singular functions. Mat.-fys. Skr., Danske Vid. Selsk. **1**, Nr. 9, 27 p. (1959).

Bei der Diskussion der Eigenschaften der Vakuum Erwartungswerte von Produkten von  $n + 1$  Feldfunktionen wird man auf bestimmte singuläre Funktionen  $\Delta_{n+1}^{(+)}(x; a)$  geführt, die zunächst in einer Darstellung als  $4n$ -faches Integral vor-

liegen. In der vorliegenden Arbeit werden nun diese singulären Funktionen ausführlich untersucht. Zunächst wird gezeigt, daß alle  $A_{n+1}^{(+)}(x; a)$  auf die spezielle singuläre Funktion  $A_5^{(+)}(x; a)$  zurückgeführt werden können. Für  $n > 4$  ist dies eine Folge der Vierdimensionalität des Raum-Zeit-Kontinuums, so daß mehr als 4 Vektoren immer linear abhängig sind. Die Funktion  $A_5^{(+)}(x; a)$  wird dann genauer behandelt. Es wird gezeigt, daß für sie eine Darstellung durch ein einfaches Integral gewonnen werden kann, wobei der Integrand nur eine Hankel-Funktion und sonst elementare Funktionen als Faktoren enthält.

F. Engelmann.

Oehme, Reinhard: Vertex function in quantized field theories. Phys. Review, II. 111, 1430—1432, (1958).

Die Funktion

$$F(k^2, p^2, (p-k)^2) = \int dx \int dy e^{ikx - ipy} \theta(x) \cdot$$

$$\cdot \{ \theta(y-x) < [ [\theta(y), A(x)], C(0) ] \rangle + \theta(y) \langle [A(x), [B(y), C(0)]] \rangle \}$$

ist auf Grund der raumartigen Vertauschbarkeit der Operatoren und der (sog. Spektrums-) Bedingung, daß  $\langle \Phi_p | A(0), B(0), C(0) \rangle = 0$  ( $>$  ist das Vakuum,  $|\Phi_p\rangle$  ein beliebiger Zustand mit Energieimpuls  $p$ ) falls nicht  $p^2 \geq m_a^2, m_b^2, m_c^2$ , analytisch in der von  $m_c^2$  nach  $+\infty$  aufgeschlitzten  $z_3 = (p-k)^2$ -Ebene, sofern  $z_1 = k^2$  und  $z_2 = p^2$  in einem gewissen Gebiet  $D$  liegen, das für reelle  $z_1$  und  $z_2$  genauer bestimmt wird. Um herauszufinden, welche weiteren Eigenschaften des obigen Integranden benutzt werden müßten, wenn  $D$  erweitert werden soll, wird der störungstheoretische Ausdruck dritter Ordnung diskutiert, der noch einige bisher nicht benutzte Eigenschaften des Integranden besitzt. Es zeigt sich, daß jetzt für reelle  $z_1$  und  $z_2$  außerhalb  $D$  der Schnitt in  $z_3$  bis zu reellen  $z^3 < m_c^2$  reichen kann, daß hierbei jedoch keine Singularitäten außerhalb der reellen  $z_3$ -Achse gefunden werden. Dies führt zu der Vermutung, daß Benutzung genügend vieler aus seiner Definition folgender Eigenschaften des obigen Integranden, insbesondere der Vollständigkeit des physikalischen Zustandssystems, allgemein zum Ausschluß solcher Singularitäten außerhalb der reellen Achse führen könnte.

K. Symanzik.

Haag, R.: Quantum field theories with composite particles and asymptotic conditions. Phys. Review, II. Ser. 112, 669—673 (1958).

Es wird angenommen, daß die sogenannten „zusammenhängenden“ Teile (die sich rekursiv definieren lassen) im Vakuumerwartungswert einer Anzahl lokaler Feldoperatoren stärker als jede Potenz von  $R$  abfallen, wenn bei festen Zeitargumenten der Operatoren die Raumargumente in eine Kugel von nicht kleinerem Radius als  $R$  einschließbar sind. [Diese Eigenschaft läßt sich, wie G. F. Dell'Antonio und P. Gulmanelli, Nuovo Cimento, X. Ser. 12, 38—53 (1959), gezeigt haben, aus relativistischer Invarianz, der Lokalitätsbedingung und der Bedingung nichtnegativer Energien im Zustandsraum herleiten.] Ferner werden „fastlokale“ Operatoren  $B(x)$  definiert durch

$$B(x) \equiv h^{(0)} + \int h^{(1)}(x+y) A(y) dy + \int h^{(2)}(x-y_1, x-y_2) A(y_1) A(y_2) dy_1 dy_2 + \dots,$$

wobei  $h^{(n)}(x-y_1, \dots, x-y_n)$  hinreichend glatte und bei absolut wachsenden Argumenten rasch abfallende Funktionen sind und  $A(x)$  der lokale Feldoperator ist. Für derartige Operatoren werden zwei wichtige Theoreme bewiesen: I. Für jedes fastlokale Feld  $B(x)$  mit verschwindendem Vakuumerwartungswert und nichtverschwindendem Matricelement zwischen dem Vakuum und einem Einteilchenzustand gilt die Asymptotenbedingung

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \langle \psi_1 | B_\alpha(t) | \psi_2 \rangle = \text{const} \langle \psi_1 | C_\alpha^{in} | \psi_2 \rangle,$$

wobei

$$B_\alpha(t) \equiv i \int [f_\alpha(x) (\partial/\partial t) B(x) - B(x) (\partial/\partial t) f_\alpha(x)] d^3x$$



[und entsprechend mit  $C^{in}(x)$ ] ist.  $f_\alpha(x)$  sei eine normierbare Lösung der Klein-Gordon-Gleichung zu der Einteilchenmasse,  $C^{in}(x)$  das freie Feld für solche einlaufenden Teilchen,  $|\psi_1\rangle$  und  $|\psi_2\rangle$  seien beliebige normierbare Zustände, und const sei eine von diesen unabhängige Konstante. Die übliche Asymptotenbedingung geht hieraus hervor, wenn für  $B(x)$  das Ausgangsfeld  $A(x)$  selbst eingesetzt wird. — II. Ist  $Q(x)$  ein fastlokaler Feldoperator, der bei Anwendung auf das Vakuum einen Einteilchenzustand der betrachteten Art erzeugt, so herrscht bei dem normierbaren Zustand  $|\psi\rangle$  nicht nur schwache, sondern starke Konvergenz:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|(Q_\alpha(t) - C_\alpha^{in})|\psi\rangle\| = 0. \quad K. Symanzik.$$

Dell'Antonio, G. F. and P. Gulmanelli: Asymptotic conditions in quantum field theories. *Nuovo Cimento*, X. Ser. 12, 38—53 (1959).

In der modernen Quantenfeldtheorie wird u. a. die Existenz asymptotischer Zustände (für  $t \rightarrow \pm \infty$ ) postuliert. Nach Haag kann dieses Postulat ersetzt werden durch die Forderung eines passenden räumlichen Verhaltens gewisser Vakuum-Erwartungswerte, in denen alle Zeiten gleich gesetzt sind (das bedeutet durch gewisse Forderungen an „lokalisierte“ Zustände). Die Verff. zeigen, daß dieses gewünschte räumliche Verhalten beweisbar ist unter sehr allgemeinen Voraussetzungen wie Lorentzinvarianz, Mikrokausalität, definite Energie, alle Teilchenmassen  $\neq 0$ , usw. Der Beweis baut auf den Integral-Darstellungen der Vakuum-Erwartungswert-Funktionen auf. *G. Grawert.*

Markov, M.: An example of a field theory with indefinite metric in Hilbert space. I. *Nuclear Phys.* 10, 140—150 (1959).

The author investigates what consequences the hypothesis, that the space-time coordinates  $q_i$  of an elementary particle cannot be determined with unlimited precision, would have for a field theory. Starting from the assumption  $q_i = x_i + \xi_i$ , where  $\xi_i$  has a probability distribution  $f(\xi_i)$  such that after averaging over  $\xi_i$  one gets  $\bar{q}_i = x_i$ , he shows that in all physical quantities such as  $A_\mu(S)$ ,  $D^{(1)}(s)$ , etc.  $s^2 = -x_\mu^2$  should be replaced by  $s'^2 = -x_\mu^2 - a^2$ , where  $a^2$  is an invariant. From this result it follows that in the proposed field theory the singularities of the propagation functions are shifted from the light-cone to the hyperboloid  $s'^2 = 0$  and that at small distances from the particles the metric of the corresponding Hilbert space becomes indefinite, although at large distances no significant modifications of the usual theory occur. In contrast to  $q_i$ , the electric charge is still considered to be point-like and this is, according to the author, the principal difference between the present theory and several previous attempts of a similar character. Equations of motion for the boson and fermion fields are given as well as the momentum representations for the new propagation functions, and it is claimed that this model avoids the usual divergences. Further results and physical effects connected with an indefinite metric will be discussed in a following paper. *J. Kortel.*

Logunov, A. A. and A. R. Frenkin: On the dispersion relations for the Compton effect. *Nuclear Phys.* 7, 573—578 (1958).

Die Dispersionsrelation für den Comptoneffekt an einem Nukleon wird nach einer Methode von Bogoljubow für den Fall nichtkontinuierlichen absorptiven Teils im unphysikalischen Gebiet bewiesen. In der  $e^2$ -Näherung (Vernachlässigung elektromagnetischer Korrekturen) gilt dies bis zum invarianten Nukleonrückstoß  $2|\Delta| = \mu(2M + \mu)(M + \mu)^{-1}$  ( $M$  Nukleon-,  $\mu$ ,  $\pi$ -Mesonmasse). *K. Symanzik.*

Logunov, A. A. and A. N. Tavkhelidze: Some problems encountered in the theory of the dispersion relations. *Nuclear Phys.* 8, 374—393 (1958).

Dispersionsrelationen werden diskutiert für inelastische Streuprozesse mit einem Boson und einem Fermion im Anfangs-, zwei Bosonen und einem Fermion im Endzustand. Eine heuristische Diskussion verschiedener praktisch wichtiger Fälle zeigt, daß nur die Reaktion mit Photonen (in niedrigster Näherung der Feinstruktur-

konstanten) für gewisse Parameterwerte (geringer Nukleonrückstoß und geringe Relativenergie der auslaufenden Photonen) auf fehlendes „unphysikalisches Gebiet“ (in welchem die Streuung nicht mit reellen Viererimpulsen stattfinden kann, jedoch im Dispersionsintegral beiträgt) führt. Für diese Fälle wird die Dispersionsrelation nach Standardmethoden bewiesen.

*K. Symanzik.*

**Logunov, A. A. and A. N. Tavcheldidze (Tavkhelidze):** Analytic properties of the process amplitude for variable number of particles. Soviet Phys., Doklady 3, 526—529 (1959), Übersetz. von Doklady Akad. Nauk SSSR 120, 739 (1958).

Die Methode von Bogoljubov wird zum Beweis der Dispersionsrelationen (z. B. des doppelten Comptoneffekts für Nukleonen) für den Fall verwendet, daß es kein unbeobachtbares Energiegebiet gibt.

*K. Baumann.*

**Lee, Benjamin W.:** Dispersion relation for nonrelativistic potential scattering. Phys. Review, II. Ser. 112, 2122—2124 (1958).

A new dispersion relation for nonrelativistic potential scattering, when the potential has a finite extent, is derived by completing the contour of integration along a semicircle of infinite radius in the lower half of the complex  $\lambda$  plane ( $\text{Re } \lambda = k$ ). The residue terms then explicitly exhibit the contributions from virtual states and radioactive decaying states. Resemblance between the residue term arising from a radioactive decaying state and the Breit-Wigner formula is shown to follow correctly from the analytic properties of the  $S$  matrix. (Author's summary.)

*K. Symanzik.*

**Gasiorowicz, S. and H. P. Noyes:** Dispersion relation for potential scattering. Nuovo Cimento, X. Ser. 10, 78—89 (1958).

Mit der von der Feldtheorie übernommenen Methode, die Teilchenmasse als eine (komplexe) Variable aufzufassen, Dispersionsrelationen erst für negative Massenquadrate herzuleiten und dann zu den physikalisch geforderten Massenwerten fortzusetzen, wird die Dispersionsrelation für die Streuung eines Klein-Gordon-Teilchens an einem statischen, sphärisch symmetrischen und exponentiell abfallenden Potentials hergeleitet. Hierbei ist eine Annahme über das Verhalten der Streuamplitude bei sehr großer Energie zu machen. Die Ergebnisse sind dieselben wie die von N. N. Khuri (dies. Zbl. 79, 425) mit der Fredholm-methode erhaltenen, welche zwar viel mühsamer ist, jedoch keine Annahmen benötigt.

*K. Symanzik.*

**Królikowski, W.:** A general equation for scattering amplitudes of particles in the field theory. Acta phys. Polon. 16, 327—334, russ. Zusammenfassg. 333 (1957).

In this note a formally exact relation in the field theory is obtained for the elements of the  $S$  matrix corresponding to two given numbers of particles. All elements with other numbers of particles are eliminated. Low's general equation derived in a previous paper (this Zbl. 81, 434) is a special case, when both distinguished numbers of particles are identical. If the two numbers of particles, say  $N_1$  and  $N_2$  are different, then the equation obtained here connects the transition  $N_1 \rightarrow N_2$  with the transition  $N_1 \rightarrow N_1$ , e. g. the photoproduction of pions with the Compton effect on nucleons. If the transition amplitude for the process  $N_1 \rightarrow N_1$  is known, then that for the process  $N_1 \rightarrow N_2$  satisfies a linear equation.

(Engl. Zusammenfassg. des Autors).

**Güttinger, W.:** Non-local structure of quantized field theories of the second kind. Nuclear Phys. 9, 429—436 (1959).

Verf. studiert sogenannte Feldtheorien zweiter Art, d. h. Theorien, in denen die Wechselwirkung der verschiedenen Felder nicht renormierbar ist. Solche Theorien können z. B. hohe Ableitungen der Felder enthalten oder eine Wechselwirkungsenergie haben, wobei vier Spinorfelder auf demselben Ort miteinander multipliziert werden. Verf. ist der Meinung, daß eine solche Theorie physikalische Vorteile hat, wenn sie mit einer renormierbaren Theorie verglichen wird. Die vorliegende Arbeit enthält eine Diskussion der Eigenschaft der Fortpflanzungsfunktionen einer solchen Theorie. Leider wird aber in der Diskussion an wesentlichen Stellen auf noch nicht veröffentlichte Rechnungen hingewiesen, weshalb die Arbeit nicht einfach zu lesen ist.

*G. Källén.*



Arnous, E. and W. Heitler: Non-local interaction and universal cut-off. *Nuovo Cimento*, X. Ser. **11**, 443—446 (1959).

Verff. führen am Beispiel einer nichtlokalen Wechselwirkung vom Möller-Christensen-Typ vor, wie eine spezielle Formfunktion im Impulsraum angegeben werden kann, die Hermitizität,  $C$ -,  $P$ - und  $T$ -Invarianz der Wechselwirkung sichert und eine früher [*Nuovo Cimento*, X. Ser. **2**, 1282—1296 (1955)] betrachtete relativistisch invariante cut-off-Vorschrift realisiert. Nach Berechnung der zugehörigen Formfunktion im Ortsraum wird das Kausalitätsverhalten untersucht und wahrscheinlich gemacht, daß die Theorie keine makroskopischen Akausalitäten liefert.  
*K. S. Wohlrab.*

Potter, John et Khosrow Chadan: Interactions non locales et matrice de diffusion. *C. r. Acad. Sci., Paris* **248**, 1612—1615 (1959).

The authors consider the Schrödinger equation with a short range central local potential  $V(r)$ , the Coulomb potential and a "separable" central non-local potential  $U(r)U(r')$ . It is suggested this might describe proton-proton scattering. It is shown that if  $V(r)$  is given, then  $U(r)$  is determined by the  $S$ -matrix, provided this satisfies certain compatibility conditions. The proof is based on the solution of the similar problem without the Coulomb potential (K. Chadan, this *Zbl.* **81**, 432).  
*R. F. Streater.*

Pócsik, G.:  $\hbar$ -quantization of the free, bilocal boson field. *Acta phys. Acad. Sci. Hungar.* **9**, 261—267 (1959).

Fierz (dies. *Zbl.* **38**, 408) konnte (für den kräftefreien Fall) zeigen, daß die bilokale Feldtheorie äquivalent einer lokalen Theorie mit unendlich vielen Feldern höheren Spins ist. Dieser Zusammenhang wird hier ausgenützt, um die Vertauschungsrelationen für ein kräftefreies bilokales Feld aus denen der äquivalenten Gesamtheit lokaler Felder abzuleiten. Dabei werden einige Eigenschaften der Vertauschungsfunktion untersucht. Im letzten Abschnitt werden wichtige Eigenschaften einer von Rayski [*Nuovo Cimento*, X. Ser. **5**, 872—886 (1957), *Acta phys. Polon.* **16**, 279—291 (1957)] entwickelten Erweiterung der bilokalen Feldtheorie, die den Isoraum mit einbezieht, zusammengestellt.  
*K. S. Wohlrab.*

Alekseev, A. I.: Covariant equation for two annihilating particles. *Soviet Phys., JETP* **5**, 696—704 (1957), Übersetz. von *Žurn. éksper. teor. Fiz.* **32**, 852—862 (1957).

Anwendung der Methode der Funktional-Ableitungen auf das Problem der Erzeugung eines Elektronenpaares oder seiner Vernichtung in  $2\gamma$ -Quanten. Ableitung kovarianter Gleichungen für die Wahrscheinlichkeitsamplitude, Behandlung der Wechselwirkung zwischen Elektron und Positron bei der Paarzeugung, Strahlungskorrekturen.  
*G. Grawert.*

Tevikjan (Tevikian), R. V.: On the improvement of perturbation theory formulas. *Soviet Phys., JETP* **6**, 373—375 (1958), Übersetz. von *Žurn. éksper. teor. Fiz.* **33**, 478—480 (1957).

In dieser Arbeit wird eine schon früher beschriebene Methode auf den Compton-Effekt — die hochenergetische Streuung des Elektrons oder eines Positrons an einem Elektron unter Berücksichtigung der Vakuumpolarisation — angewendet. Eine Transformation des verallgemeinerten Scheitelteils und der Greenschen Funktionen für 2 Elektronen muß zur Gruppe der endlichen Transformationen der renormierten Kerne hinzugefügt werden. Mit Hilfe dieser Transformationen erhält Verf. Funktionalgleichungen für die Greenschen Funktionen. Er führt eine Formel sowohl für die Greensche Funktion des Photons als auch für den verallgemeinerten Scheitelteil des Compton-Effekts im Bereich hoher Energien an. Anschließend werden Strahlungskorrekturen für den Compton-Effekt berechnet. Der differentielle Wirkungsquerschnitt wird für den  $n$ -fachen Compton-Effekt mit der Emission einer beliebigen Anzahl von langwelligen Photonen angegeben und diskutiert. Abschließend be-



spricht Verf. die Streuung eines Elektrons an einem Elektron und gibt für eine Anzahl von Spezialfällen die differentiellen Wirkungsquerschnitte an. *F. Cap.*

● **Marshak, Robert E.:** *Meson physics*. Unabridged and unaltered republ. of the first ed. 1952. New York: Dover Publications, Inc. 1958. VIII, 378 p. \$ 1,95.

Dieses handliche Buch ist der als "Dover Publication" erschienene unveränderte Abdruck des bekannten Werkes von Marshak (dies. Zbl. 49, 139). Es erschien 1952 zu einem Zeitpunkt, als die  $\mu$ - und  $\pi$ -Mesonen-Physik ein erstes Stadium der Klärung erreicht hatte: Spin und Parität des  $\pi$ -Mesons konnten mit ziemlicher Sicherheit bestimmt werden, und die Mesonentheorie erwies sich als qualitativ brauchbar zur Beschreibung der wichtigsten  $\pi$ -Mesonen-Experimente. Verf. beschränkt sich auf die halbtheoretische bis theoretische Behandlung von Experimenten mit reellen Mesonen, während Probleme, bei denen virtuelle Mesonen eine wesentliche Rolle spielen (z. B. Kernkräfte), nicht besprochen werden. Am Schluß wird auf die ersten Experimente mit „fremden“ Teilchen eingegangen, doch dürfte dieser Abschnitt (vor Entdeckung der strangeness geschrieben) heute nur noch von historischem Interesse sein. Die einzelnen Kapitel sind: Pion-Erzeugung durch Photonen an Nukleonen (1), durch Nukleonen an Nukleonen (2), durch Photonen und Nukleonen an Kernen (3); Eigenschaften der Pionen (4), Einfang und Absorption negativer Pionen (5); Eigenschaften des Müons (6); Wechselwirkung schneller Pionen (7), Vielfacherzeugung von Pionen (8); „fremde“ Teilchen (9). *K. S. Wohlrab.*

**Lomsadze, Ju. M. and B. I. Maksimov:** *Equations for the greenians and the vacuum functionals in the pair theory*. Bul. Inst. Politehn. Iași, n. Ser. 4 (8), Nr. 1/2, 121—126, engl. Zusammenfassg. 126 (1958) [Russisch].

Die Schwingersche Methode der Funktionalableitungen wird zur Ableitung von Gleichungen für die Greenschen Funktionen und für das erzeugende Funktional (von Verff. Vakuumfunktional genannt) für eine skalare Wechselwirkung zwischen einem Spinorfeld und einem Paar skalarer neutraler Mesonen. Es werden formale Lösungen dieser Gleichungen in der Form von Funktionalintegralen angegeben.

*M. E. Mayer.*

**Blin-Stoyle, R. J. and V. Gupta:** *Mesonic "exchange" effects in beta-decay*. Nuclear Phys. 11, 444—453 (1959).

Verff. berechnen die effektive Betawechselwirkung für Atomkerne, indem sie die Chew-Lowsche Mesonentheorie zugrundelegen. Sie nehmen an, daß nur die Axialvektorkopplung durch mesonische Austauscheffekte modifiziert wird. Unter der Annahme einfacher Wellenfunktionen finden sie, daß die mesonischen Effekte z. B. das Matricelement für den Zerfall  $H^3 \rightarrow He^3$  um einige Prozent vergrößern. Damit kann der geringe Unterschied zwischen dem  $ft$ -Wert des Tritiums und des Neutrons erklärt werden. Unter der Voraussetzung einfacher Modelle werden ebenfalls die Austauscheffekte für schwerere Kerne abgeschätzt. *G. Kramer.*

**Misra, S. P.:** *Polarisation of a Dirac particle and proton-neutron scattering*. Indian J. Phys. 32 (41), 355—364 (1958).

Es wird das Polarisationsproblem für Nukleon-Nukleon-Streuung auf Grund der pseudoskalaren Mesonentheorie behandelt. Dabei wird eine Entwicklung im Schwerpunktsystem nach dem Drehimpuls vorgenommen und das Streuprobblem auf Grund der Phasenverschiebungen behandelt. Zur Vermeidung von Fehlern wird die übliche  $S$ -Matrix in zweiter und vierter Ordnung herangezogen. Unter Benutzung dieser Methode wird ein Widerspruch gegen die experimentellen Ergebnisse aufgezeigt.

*P. Urban.*

**Hu, Ning:** *The proper field of a physical nucleon*. Nuclear Phys. 12, 87—102 (1959).

Verf. entwickelt ein neues Näherungsverfahren für den Grundzustand des Pion-Nukleon-Systems, das an Tomonagas "intermediate coupling"-Methode anknüpft.

und Ähnlichkeiten zur Pauli-Dancoff-Theorie hat. Er diskutiert einige Folgerungen für die Erzeugung von Mesonschauern bei Nukleon-Nukleon-Stößen. *G. Höhler.*

**Dyson, F. J.:** Meaning of the solutions of Low's scattering equation. *Phys. Review*, II. Ser. **106**, 157—159 (1957).

Verf. betrachtet ein Modell für ein spinloses Teilchen in Wechselwirkung mit einem festen Streuer, das dem Lee-Modell ähnlich ist. Die Streuamplitude kann aus der Schrödinger-Gleichung explizit berechnet werden. Die Low-Gleichung zu diesem Modell besitzt unendlich viele Lösungen. Sie gehört somit zu einer ganzen Klasse von Modellen, die sich nur in den Parametern für die Compound-Zustände unterscheiden. Jede ihrer Lösungen ist die richtige Streuamplitude zu einem Modell mit bestimmten Parameterwerten. *G. Grawert.*

**Kuni, F. M.:** Application of the Low integral equation method to the problem of proton-proton scattering. *Soviet Phys., JETP* **7**, 113—119 (1958), Übersetz. von *Žurn. éksp. teor. Fiz.* **34**, 163—172 (1958).

Eine Integralgleichung vom Low'schen Typus wird für Proton-Proton-Streuung in der Nullmesonennäherung abgeleitet, wobei das unhomogene Glied in der Einmesonennäherung berechnet wurde. Diese Gleichung wird für die Berechnung der  $^1S_0$ -Welle verwendet, wobei bei 5 Mesonenmassen abgeschnitten wird. Der erhaltene Wirkungsquerschnitt soll mit den Experimentaldaten für 0,1 bis 11 MeV gut übereinstimmen. *M. E. Mayer.*

**Novožilov (Novozhilov), Ju. V. (Ju. V.):** On the scattering of "dressed" particles in quantum field theory. *Soviet Phys. JETP* **35** (8), 515—520 (1959), Übersetz. von *Žurn. éksp. teor. Fiz.* **35**, 742—749 (1958).

Eine Streutheorie wird betrachtet, in welcher die virtuellen „Wolken“ um die Teilchen immer streng berücksichtigt werden. Die Theorie beruht auf der Darstellung der Basisfunktionalen als Produkte von Einteilchenfunktionalen. Ohne Vakuum-polarisation sind die Gleichungen für die Matricelemente automatisch renormiert, und die Matricelemente lassen sich durch Ein-Nukleon-Matricelemente ausdrücken. (Zusammenfassg. des Autors.) *K. Baumann.*

**Kanazawa, Akira, Tetsuro Sakuma and Shinya Furui:** The pion-nucleon dispersion relation and small  $P$ -wave phase shifts. *Progress theor. Phys.* **21**, 856—866 (1959).

Using the dispersion relations of Goldberger, Miyazawa and Oehme (*Phys. Rev.* **99**, 986 (1955), (this Zbl. **67**, 448) the authors investigate the compatibility of small  $P$ -wave shifts. The dispersion relations for the odd and even iso-spin amplitudes are integrated with the choice of a weight function of the form  $\xi^{-2}$  ( $\xi$  being the pion momentum in the laboratory system) and these form the basis for discussion. Total cross-sections are taken from the experiments of Anderson et al for the range upto 400 MeV and for the range beyond 400 MeV the data of Cool et al are employed. The authors demonstrate that Lomon-Chiu's data on the small  $P$ -wave shifts are in contradiction with the dispersion relations for even iso-spin amplitudes, if  $\delta_{13}$  is assumed to be positive. This conclusion is not altered even if  $\delta_{13}$  is assumed to be negatively large at low energies ( $< 100$  MeV). It is interesting to note that there is no discrepancy for the iso-spin odd amplitude whatever may be the choice of the phase-shifts. *S. K. Srinivasan.*

**Stepanov, B. M.:** A note concerning dispersion relations for the scattering of pions by nucleons. *Soviet Phys., Doklady* **3**, 134—135 (1958) Übersetz. von *Doklady Akad. Nauk SSSR* **118**, 911—912 (1958).

In der Theorie der Streuung von Pionen an Nukleonen wird das Pion als ein Elementarteilchen vorausgesetzt, dessen Verhalten im Unendlichen durch einen Erzeugungs- und Vernichtungsoperator eines pseudoskalaren Feldes beschrieben werden kann. Diese Bedingung wurde als notwendig und hinreichend zur Herleitung der Dispersionsrelationen angenommen. Daß dies nicht der Fall ist, wird durch eine



Herleitung der Dispersionsrelationen bewiesen, die sich nur auf die Annahme stützt, daß einzig und allein das Nukleon als lokalisierbares Teilchen angenommen wird.

*Th. Seel.*

**Alfaro, V. De and R. Stroffolini:** Multiple scattering corrections in  $\pi$ -deuteron scattering. *Nuovo Cimento*, X. Ser. 11, 447—452 (1959).

Unter gewissen Annahmen über das Verhalten der  $t$ -Matrix für Pion-Nukleon-Streuung außerhalb der Energieschale erhält man Korrekturen von der Vielfachstreuung, die größer sind als jene von der Doppelstreuung. *K. Baumann.*

**Eckstein, S. G. and R. H. Pratt:** Radiative muon decay. *Ann. of Phys.* 8, 297—309 (1959).

Theoretical predictions for the radiative muon decay process  $\mu \rightarrow e + \nu + \bar{\nu} + \gamma$  are given in some detail. The differential transition probability for polarized muons is obtained, and from it are calculated the angular correlations of electron and photon, the photon energy spectrum, and the branching ratio. The probability for internal conversion of the photon is estimated. The consequences of an intermediate vector boson are discussed. *Zusammenfass. des Autors.*

**Primakoff, H.:** Theory of muon capture. *Reviews modern Phys.* 31, 802—822 (1959).

Various aspects of the theory of muon capture including some recent investigations by the author and his Co-workers are reviewed with emphasis on the relation between theory and experiment. The theory is based on an effective Hamiltonian  $H_{\text{eff}}^{(\mu)}$  discussed in Section 1 which describes muon capture with subsequent neutrino emission by an aggregate of  $A$  dressed nucleons and which corresponds, in a nonrelativistic approximation for the muon and for the nucleons, to the most general Lorentz covariant transition matrix element for the reaction  $\mu^- + p \rightarrow \nu + n$  in a theory where the lepton-bare nucleon coupling is  $V$  and  $A$ , where the neutrinos are emitted with unit negative helicity, where time reversal invariance holds, and where any bare hyperon, bare kaon "currents" which interact with the lepton current, have the same transformation property under the charge symmetry operation as the bare nucleon, bare pion currents. "Many body" terms arising from the possibility of exchange of virtual pions, kaons, etc., among the nucleons are not included in  $H_{\text{eff}}^{(\mu)}$  on the assumption that they are relatively small. — In Section 2 the total muon capture rate is calculated in closure approximation (which extends the sum over all energetically accessible final states to a sum over all states without restriction and replaces the emitted neutrino momentum and associated quantities by suitable averages). In this way a complicated expression—too long to be reproduced here—is obtained for the total muon capture rate  $\Lambda^{(\mu)}(a)$  from an initial state  $|a\rangle$  of the nucleus to all other accessible states  $|b\rangle$  and which is essentially exact within the limitations of the closure approximation. This expression is then further evaluated for the heavier nuclei  $Z > 6$ ,  $A > 12$ , and also for the light nuclei  $H_1^1$ ,  $H_1^2$ ,  $He_2^3$ ,  $He_2^4$ , using suitable approximations. A significant result is the isotope effect, for which two examples are given:  $\Lambda^{(\mu)}(\text{Ca}_{20}^{48})/\Lambda^{(\mu)}(\text{Ca}_{20}^{40}) \cong \frac{1}{2}$  and  $\Lambda^{(\mu)}(\text{He}_2^3)/\Lambda^{(\mu)}(\text{He}_2^4) \cong 5$ . Physically, the isotope effect is a manifestation of the inhibitions of the exclusion principle on the total muon capture rate which may be visualized as arising from the fact that the neutron created in the  $\mu^- + p \rightarrow n + \nu$  process cannot be produced in states already occupied by pre-existing neutrons of the parent nucleus. It is proposed that an experimental verification of this result using separated isotope targets be attempted. — In section 3 the theoretical results obtained on the basis of the closure approximation are compared with experiment and it is shown that there is better agreement between theory and experiment if the assumption of a "conserved vector current" is retained. — Section 4 treats muon capture to particular final states of the daughter nucleus. For  $\Lambda^{(\mu)}(C_6^{12} \rightarrow B_5^{12})$  — the only case for which experimental data are at present available — the theoretical and experimental values agree rather satisfactorily. This again furnishes further support for the validity of



$H_{\text{eff}}^{(\mu)}$  as given above. — The results so far described are actually averages of the total or partial muon capture rates from the two individual hyperfine states of the parent mesic atom. In Section 5 the closure approximation is applied to the calculation of the total muon capture rate from two individual hyperfine states. For hydrogen the hyperfine effect amounts to

$$A^{(\mu)}(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}; H_1^1)/A^{(\mu)}(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}; H_1^1) \cong 50.$$

— Section 6 is devoted to a theoretical study of radiative muon capture. Previous calculations by Cantwell are improved using the closure approximation and neglecting all nucleon recoil corrections contained in  $H_{\text{eff}}^{(\mu)}$ . — Finally, Section 7 treats parity nonconservation effects associated with muon capture. In this connection four phenomena are discussed in which parity nonconservation effects should be observable: (a) Angular distribution of recoil nuclei in capture of polarized muons, (b) Angular distribution of photons in radiative capture of polarized muons, (c) Polarization of recoil nuclei in muon capture, (d) Polarization of photons in radiative muon capture.

F. Kortel.

**Soloŭev, V. G.:** Equations for the Green's functions of a system of fundamental particles. Soviet Phys., JETP 6, 935—939 (1958), Übersetz. von Žurn. éksp. teor. Fiz. 33, 1215—1225 (1957).

Ausgehend von einer Lagrange-Funktion für alle starken Wechselwirkungen wird ein vollständiges Gleichungssystem für die Greenschen Funktionen der Baryonen und Mesonen in Form von Variationsableitungen nach äußeren Strömen angegeben.

G. Grawert.

**Ruelle, D.:** Représentation du spin isobarique des particules à interactions fortes. Nuclear Phys. 7, 443—450 (1958).

Zusammenfassung der Nukleonen und der  $\Xi$ -Teilchen einerseits, des  $\Lambda$  und der  $\Sigma$  andererseits, in einer Quaternionen-Schreibweise. Darstellung der üblichen Isospin-Transformationen durch Quaternionen-Transformationen, Forderung der Invarianz der starken Wechselwirkungen gegen Quaternionen-Transformationen.

G. Grawert.

**Corinaldesi, E.:** Particles and symmetries. Nuclear Phys. 7, 305—372 (1958).

Zusammenfassender Bericht-Artikel. Als Einleitung werden die Formeln für die Beschreibung freier Teilchen scharfen Impulses gegeben, bei Spin 0,  $\frac{1}{2}$  und bei Photonen. Es folgt Diskussion der Raumpiegelung, der Teilchen-Antiteilchen-Konjugation, der Ladungssymmetrie und der Zeitumkehr. Schließlich werden Invarianzeigenschaften der  $\beta$ -Zerfalls-Wechselwirkung besprochen, und die Einführung des Isospins bei Mesonen und Baryonen.

G. Grawert.

**Čzou Guan-Čzao (Chou Guan-Chao):** Concerning a symmetry property of the new Gell-Mann theory. Soviet Phys., JETP 6, 815—816 (1958), Übersetz. von Žurn. éksp. teor. Fiz. 33, 1058—1059 (1957).

Diskussion einer Symmetrie in der Gell-Mann-Theorie, die alle Baryon-Pion-Kopplungen gleich setzt. Es ergibt sich z. B., daß der Zerfall  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$  nur über eine  $K$ -Wechselwirkung laufen kann.

G. Grawert.

**Espagnat, Bernard d' et Jacques Prentki:** Remarques sur certaines propriétés des interactions faibles. C. r. Acad. Sci., Paris 246, 1505—1508 (1958).

Diskussion einer Lagrange-Funktion für die schwachen Wechselwirkungen mit Invarianz im  $M$ -Raum, [der von Verff. und A. Salam früher eingeführt wurde. Nuclear Phys. 5, 447—454 (1958)]. Die Wechselwirkung beschreibt auch bisher nicht beobachtete Zerfälle mit Wahrscheinlichkeiten, die klein gegen die der bekannten Zerfälle sind, z. B.  $K_1^0 \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ .

G. Grawert.

**Espagnat, B. d':** On weak interactions of elementary particles. Nuovo Cimento, X. Ser. 8, 894—898 (1958).

Ansatz von Transformationen, die den Pauli-Pursey-Transformationen ähnlich

sind, aber Drehungen in einem vierdimensionalen Euklidischen Isoraum darstellen. Bei Spezialisierung auf den  $M$ -Raum [Vgl. d'Espagnat, Prentki und Salam, Nuclear phys. 5, 447—454 (1958)] wird man auf einen allgemeinen Ausdruck für die schwachen Wechselwirkungen geführt.  
*G. Grawert.*

**Espagnat, B. d': A new representation for baryonic fields and strong interactions.** Nuovo Cimento, X. Ser. 9, 920—923 (1958).

In einer passenden Schreibweise der starken Wechselwirkungen ergibt sich eine formale Analogie der Aufspaltung in sehr starke und mittelstarke Wechselwirkungen, mit der bekannten Unterscheidung zwischen paritätserhaltenden und -verletzenden Termen. (Die auftretende „Parität“ hat nichts mit der üblichen zu tun.)  
*G. Grawert.*

**Okun, L. B. and I. Ya. Pomeranchuk: On peripheral interactions of elementary particles.** Nuclear Phys. 10, 492—507 (1959).

An interesting suggestion is made in this paper for a selfconsistent theory of strong interactions between elementary particles. It is proposed to investigate theoretically and experimentally the behaviour of the scattering matrix in a two-body collision by fixed energy and large angular momenta. In this condition only a few particles play an important role in the intermediate states. For example in collisions between two nucleons it is the exchange of only one  $\pi$ -meson which is effective at large distances, the contribution due to the exchange of several mesons comes into play at small distances only. A study of a simple model is presented in order to illustrate the kind of approximations which can appear. If there is the possibility of extracting from the experimental cross sections the analytical form of the scattering matrix for large impact parameters, it is also possible to have informations on the values of the renormalized coupling constants. The paper contains a short discussion about practically all type of collisions between two elementary particles.  
*M. Verde.*

**Saavedra, L.: On the electron-muon mass difference.** Nuclear Phys. 11, 569—573 (1959).

A formal scheme proposed by the author in an earlier paper [Nuclear Phys. 10, 6—19 (1959)] is extended to include the presence of a Bose particle (with a vanishing isotopic spin) already postulated by several physicists. It is suggested that the new particle may interact strongly with all barions but with only one type of leptons (either electrons or muons). This would possibly give an explanation of the electron-muon mass difference.  
*M. Verde.*

## **Bau der Materie:**

**Kinoshita, Toichiro: Ground state of the helium atom. II.** Phys. Review, II. Ser. 115, 366—374 (1959).

(Part I s. this Zbl. 77, 443). — A further attempt is made to improve the theoretical prediction of the energy of the ground state atomic helium. Aus der Zusammenfassg. des Autors.

**Dalgarno, A.: Perturbation theory of atomic systems.** Proc. roy. Soc. London, Ser. A 251, 282—290 (1959).

Verf. diskutiert den Formalismus von Hartree und Hartree-Fock für ein  $N$ -Elektronensystem, welches unter dem Einfluß einer äußeren Störung steht, für zwei Näherungsmethoden. Als Anwendung erfolgt eine Betrachtung über die Polarisierbarkeit des Heliumatoms.  
*G. Kelbg.*

**Froese, Charlotte: The limiting behaviour of atomic wave functions for large atomic number. II.** Proc. roy. Soc. London, Ser. A 244, 390—397 (1958).

(Part I see this Zbl. 77, 231.) — Self-consistent field atomic orbitals for large atomic numbers have been represented by a series in  $N^{\frac{1}{2}-n}$ . Previous calculations [Proc. Cambridge philos. Soc., 53, 663—668 (1957)] have been extended to include the  $n = 2$  term, and the limiting behaviour of the wave functions for  $N \rightarrow \infty$

( $\bar{r} \rightarrow 0$ ) has been studied. A screening number  $\sigma(nl)$  and its slope have been computed for a series of configurations whose outer groups are  $(2p)^6$ ,  $(3s)^2$ ,  $(3p)^6$ ,  $(3d)^5$ ,  $(3d)^{10}$ , and accurate plots of the screening numbers as functions of  $\bar{r}$  are presented. They can be applied to estimate the wave functions for large  $N$  using the Hartree interpolation procedure. *W. Kotos.*

**Bozman, W. R. and R. E. Trees:** Matrices of spin-orbit interaction of the electron configuration  $d^4s$ . J. Res. nat. Bur. Standards 58, 95—100 (1957).

The matrices of spin-orbit interaction of the  $d^4s$  configuration have been calculated. These matrices are for use in calculations to aid in locating levels and making electron configuration assignments in Tc I and Ta I. The calculations were made by using methods and tables given by G. Racah and by the use of tables of the  $W$ -coefficients prepared by L. C. Biedenharn, and by Obi and coworkers. The matrices have been checked by calculating their eigenvalues with the National Bureau of Standards Electronic Computer (SEAC). *Zusammenfassg. der Verff.*

**Innes, F. R. and C. W. Ufford:** Microwave Zeeman effect and theory of complex spectra. Phys. Review, II. Ser. 111, 194—202 (1958).

Verff. geben die Zeeman Wechselwirkung für Mikrowellen in Tensorform an und führen eine Berechnung der  $g$  Faktoren in atomarem Sauerstoff durch. Es werden die numerischen Werte mit den bisher bekannten verglichen und neue Methoden entwickelt, um die Matrixelemente der Ein-Partikel- und Zwei-Partikeloperatoren aufzustellen. Die Verallgemeinerung dieser Ergebnisse kann bei den verschiedenen Kopplungsschemen der Atome und der Schalenmodelle der Kerne mit Nutzen verwendet werden. *P. Urban.*

**Bersuker, I. B.:** Wahrscheinlichkeiten der optischen Übergänge in Atomen und Molekülen mit polarisierbarem Rumpf. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. fiz. 22, 749—752 (1958) [Russisch].

The probabilities for optical transitions have been calculated allowing for polarization of the atomic or molecular core under the influence of electric field of the electromagnetic wave. Perturbation theory with some additional approximations was used. Numerical calculations have been made for the Na atom, and the results obtained for the  $f_{3s}^{3p}$  oscillator strength and for the sum of the oscillator strengths are in a very good agreement with experiment. New selection rules have been found and the possibility of infrared absorption with Raman frequencies has been pointed out. *W. Kotos.*

**Krutov, V. A.:** Zur Theorie der inneren Konversion. I. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. fiz. 22, 162—170, (1958) [Russisch].

**Krutov, V. A. und K. Müller:** Zur Theorie der inneren Konversion. II. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. fiz. 22, 171—175 (1958) [Russisch].

I. The theory of internal conversion of  $\gamma$  radiation is developed including higher order corrections of the perturbation theory. It is shown that in the case of small energy and high multiplicity of nuclear transitions these corrections are not negligible. — II. The higher approximations of the perturbation theory for the internal conversion of  $\gamma$  radiation, calculated in Part I are discussed in details for the case of the  $K$  shell and for one multipole. *W. Kotos.*

**Mitra, A. K.:** Scattering of electron from five dimensional wave equation. Indian J. Phys. 32 (41), 336—339 (1958).

Verf. gibt die Lösung für den radialen Teil der 5-dimensionalen Wellengleichung für den Fall der Streuung eines Elektrons in einem Coulombfeld. Er zeigt, daß halbzahlige Quantenzahlen in der Lösung auftreten, was den Gedanken nahelegt, daß die fünfte Koordinate einen ähnlichen Einfluß wie das Auftreten des Spins ausübt. *P. Urban.*

**Garrido, L. M. and A. Galindo Tixaire:** On high energy potential scattering. Physica 25, 473—475 (1959).



Es wird eine Verallgemeinerung der Anwendung der Greenschen Funktion für kleine Streuwinkel auf beliebige Winkel gegeben, wodurch neue Fehlerabschätzungen für die Formel von Saxon und Schiff [Nuovo Cimento, X. Ser. 6, 614—627 (1957)] erhalten werden.  
*P. Urban.*

**Fajn (Fain), V. M.:** Radiation emitted by molecules in the presence of a strong high-frequency field. Soviet Phys., JETP 6, 323—330 (1958). Übersetz. von Žurn. eksper. teor. Fiz. 33, 416—424 (1957).

Es wird die Intensität der elektromagnetischen Strahlung berechnet, welche durch ein starkes elektromagnetisches Feld vorgegebener Frequenz und Amplitude in einem molekularen Gas angeregt wird. Quantenelektrodynamische Betrachtungen zeigen die Anwendbarkeit des Korrespondenzprinzips auf die Untersuchungen dieser Phänomene.  
*P. Urban.*

**Green, M. S.:** The non-equilibrium pair distribution function at low densities. Physica 24, 393—403 (1958).

Verf. diskutiert ausführlich die ersten Orts-Impuls-Verteilungsfunktionen und betrachtet verschiedene Relationen, durch die sie miteinander verbunden sind. Die Näherungen gelten für schwach komprimierte Gase im Nichtgleichgewicht, wenn ein räumlich gleichförmiger Zustand vorliegt.  
*G. Kelbg.*

**Kac, Mark:** On the partition function of a one-dimensional gas. Phys. Fluids 2, 8—12 (1959).

An exact treatment is given of the grand partition function of a one-dimensional gas with a certain potential which drops from the value at zero  $x = -\infty$  to a negative value at  $x = \delta > 0$ , and then rises to  $+\infty$  for  $0 \leq x < \delta$ . The model enables one to make also some remarks about a one-dimensional Ising model having an exponentially decreasing interaction.  
*P. T. Landsberg.*

**Zumino, Bruno:** Formal solution of the equations of statistical equilibrium. Phys. Fluids 2, 20—22 (1959).

Closed expressions are given for the distribution functions in the classical theory of statistical equilibrium. They are only formal, however, since certain operations are required to be performed on functionals. Nevertheless the formulation has some advantages (e. g. a simple approach to the virial expansion), which are demonstrated.  
*P. T. Landsberg.*

**Marquet, Simone:** Base de la théorie cinétique et équation de Boltzmann. Cas où le fluide est soumis à un champ de forces. C. r. Acad. Sci., Paris 247, 1319—1322 (1958).

Un système de  $n$  corpuscules est supposé décrit par une mesure sur son extension en phases. Dans cette Note, une équation d'évolution est établie pour cette mesure. Sous certaines conditions assez générales, cette équation est résolue et les propriétés de ses solutions sont étudiées [v. C. r. Acad. Sci., Paris 243, 1193—1196 (1956); 244, 1463—1466 (1957)]. Zusammenfassg. d. Autors.

**Marquet, Simone:** Base de la théorie cinétique et équation de Boltzmann. Cas où le fluide est soumis à un champ de forces. C. r. Acad. Sci., Paris 247, 1445—1448 (1958).

Dans la Note précédente (voie le rapport précédent), un système de  $n$  corpuscules est supposé décrit par une mesure de Radon. Une équation d'évolution pour cette mesure a été proposée et résolue. Par un théorème de conservation asymptotique d'organisation corpusculaire, on peut déduire de cette équation une équation de Boltzmann et un procédé de résolution de celle-ci.

Zusammenfassg. d. Autors.

**Derjagin, (Deriagin) B. V. and S. P. Bakanov:** The theory of the motion of small aerosol particles in a diffusion field. Soviet Phys., Doklady 2, 563—567 (1958). Übersetzung von Doklady Akad. Nauk SSSR 117, 959—962 (1957).

Die Bewegung von Aerosolteilchen im Gegendiffusionsfeld einer Mischung zweier verdünnter Gase wird betrachtet. Nach einer Methode von Chapman-Cowling wird die Boltzmann-Gleichung für die Geschwindigkeitsverteilungsfunktionen der Gasmolekel näherungsweise gelöst und dann die Impulsübertragung auf ein Teilchen berechnet.  
*G. Kelbg.*

MacDonald, W. M., M. N. Rosenbluth and Wong Chuck: Relaxation of a system of particles with Coulomb interactions. Phys. Review, II. Ser. **107**, 350—353 (1957).

Der zeitliche Verlauf der Einteilchenverteilungsfunktion eines Systems von Coulombteilchen wird mit Hilfe der Fokker-Planck-Gleichung berechnet. Berücksichtigt wird nur die Selbstdiffusion im Geschwindigkeitsraum unter Wirkung „enterner“ Stöße. Die Vernachlässigung „naher“ Stöße wird diskutiert. Der Übergang einer  $\delta$ -funktionsartigen Verteilung in der Maxwellverteilung wird numerisch ausgewertet. Für die Zeitkonstante der Einstellung der Gleichgewichtsverteilung bei hohen Energien wird eine Näherungsformel abgeleitet. Die Einstellzeit für hohe Energien ist wesentlich länger als für thermische Energien ( $\tau \sim E^{3/2}$ ). H. Rother.

Brin, A., J.-L. Delcroix et J. Salmon: Étude du refroidissement d'un gaz de particules chargées dans un plasma totalement ionisé. J. Phys. Radium **20**, 529—534 (1959).

Auf der Grundlage der Theorie von Rosenbluth, MacDonald und Judd (dies. Zbl. **77**, 448) wird für ein spezielles Relaxationsproblem geladener Teilchen  $P$  in einem vollständig ionisierten Plasma eine analytische Näherungslösung gegeben. Voraussetzung ist, daß die Konzentration der  $P$ -Teilchen klein ist gegen die Konzentration des thermischen Plasmas und ihre kinetische Temperatur größer ist als die Plasmatemperatur, ihre Masse groß gegen die Ionenmasse (schwere Teilchen im Wasserstoffplasma z. B.). Die Lösung wird dargestellt durch hermitesche Polynome. Unter den angegebenen Voraussetzungen ist die berechnete Relaxationszeit mit der Spitzerschen „self-collision time“ identisch. (L. Spitzer, Physics of fully ionized gases, London-New York (1956). H. Rother.

Kahalas, S. L. and H. C. Kashian: On the approach of electrons to equilibrium. Phys. Fluids **2**, 100—102 (1959).

Die Einstellung der Elektronengleichgewichtsverteilung eines schwach ionisierten Gases wird unter Vernachlässigung elektromagnetischer Wechselwirkungen und inelastischer Stöße untersucht. Für die Gasmoleküle wird eine Maxwellverteilung angenommen; die Stöße Elektron-Gasmolekül werden nach dem Maxwell'schen Modell berechnet. Unter der Annahme einer homogenen räumlichen Verteilung und einer isotropen Geschwindigkeitsverteilung kann die Boltzmann-Gleichung nach den beiden Variablen  $v$  und  $t$  separiert werden. Die Lösung der sich ergebenden beiden Gleichungen wird für den einfachen Nichtgleichgewichtsfall ausgewertet, daß die Anfangsverteilung der Elektronengeschwindigkeit durch eine Diracfunktion beschrieben wird. Für verschiedene Phasen der Einstellung des Gleichgewichts sind die Geschwindigkeitsverteilungen der Elektronen in einem Diagramm aufgezeichnet. Der Einfluß der Bildung von negativen Ionen wird kurz diskutiert. K.-G. Müller.

Schirmer, H. und J. Friedrich: Die elektrische Leitfähigkeit eines Plasmas. II. Z. Phys. **151**, 374—384 (1958).

Im ersten Teil dieser Arbeit (dies. Zbl. **79**, 440) wurde die Berechnung der Leitfähigkeit eines Plasmas auf die Ermittlung von Querschnitten der Atome und der Ladungsträger zurückgeführt. In diesem zweiten Teil werden die Formeln für die Querschnitte angegeben und die Konvergenz der Ausdrücke der elektrischen Leitfähigkeit untersucht. Je nach der Art der Wechselwirkung der Atome mit den Elektronen konvergieren die ersten Näherungen unterschiedlich gut.

K. G. Müller.

Schirmer, H. und J. Friedrich: Die Wärmeleitfähigkeit eines Plasmas. Z. Phys. **153**, 563—570 (1959).

In Erweiterung vorhergehender Arbeiten der Verff. (dies. Zbl. **79**, 440 u. vorsteh. Referat) wird eine Darstellung der Wärmeleitung der Elektronen in einem beliebig ionisierten Plasma gegeben. H. Rother.

**Braginskij (Braginskii), S. I.:** Transport phenomena in a completely ionized two-temperature plasma. Soviet Phys., JETP 6, 358—369 (1958), Übersetz. von Žurn. éksp. teor. Fiz. 33, 459—472 (1957).

Im Rahmen der Chapman-Enskog-Methode werden für ein zweikomponentiges Plasma, bestehend aus Elektronen und positiven Ionen unterschiedlicher Temperatur Wärme- und Impulstransport und der Viskositätstensor bei Wirkung äußerer elektrischer und magnetischer Felder berechnet.

H. Rother.

**Jancel, Raymond et Théo Kahan:** Étude théorique de la distribution électronique dans un plasma lorentzien hétérogène et anisotrope. J. Phys. Radium 20, 35—41 (1959).

Die Boltzmannsche Transportgleichung wird gelöst für den Fall eines schwach ionisierten Plasmas in starken äußeren Feldern bei Existenz eines nichtverschwindenden Dichtegradienten durch Entwicklung der Elektronenverteilungsfunktion nach Kugelfunktionen, an Stelle der üblichen Chapman-Enskog-Entwicklung nach Potenzen eines Entwicklungsparameters  $\lambda$ . Die Lösung des entstehenden Differentialgleichungssystems wird bis zur zweiten Näherung für die Verteilungsfunktion durchgeführt.

H. Rother.

**Sturrock, P. A.:** Kinematics of growing waves. Phys. Review, II. Ser. 112, 1488—1503 (1958).

Es werden Kriterien angegeben für das Verhalten von Wellenpaketen, die einer beliebigen komplexen Dispersionsgleichung  $F(k, \omega) = 0$  gehorchen. Als wesentlich erweist sich die Kontur des Integrationsweges der Fourierdarstellung mit Wellen der Form  $e^{i(kx - \omega t)}$ , wenn man die Integration längs der reellen  $\omega$ -Achse transformiert in eine Integration längs der reellen  $K$ -Achse (Transformation „raumartiger“ Wellenpakete in „zeitartige“). Abklingende Wellen sind zeitartige Wellenpakete mit  $J\omega < 0$ , oder raumartige Wellenpakete mit  $Jk \neq 0$ , die sich nicht in zeitartige Wellenpakete transformieren lassen. Zeitartige Wellenpakete mit  $J\omega > 0$  beschreiben lokalisierte Instabilitäten, wenn sie sich nicht in raumartige transformieren lassen und beschreiben Amplifikation, wenn diese Transformation möglich ist. An Hand einfacher mechanischer Modelle werden die verschiedenen Typen veranschaulicht.

H. Rother.

**Bernstein, Ira B. and Irving N. Rabinowitz:** Theory of electrostatic probes in low-density plasma. Phys. Fluids 2, 112—121 (1959).

Die Theorie einer Kugelsonde und einer Zylindersonde in einem Plasma geringer Dichte wird entwickelt. Das Potential der Sonde soll hinreichend negativ sein, so daß nur eine geringe Anzahl Elektronen die Sonde erreicht und die Elektronendichteverteilung aus dem kinetischen Gleichgewicht berechnet werden kann. Unter Vernachlässigung der thermischen Geschwindigkeit kann die Boltzmann-Gleichung der Ionen in der Sondenumgebung von der Ausdehnung einer freien Weglänge aus den Ionenbahnen berechnet werden, wenn das Potential und die Randbedingungen gegeben sind. Analog zu den Ellipsenbahnen bei der Planetenbewegung findet man im Feld der Sonde Ionenbahnen, auf denen die Ionen das Sondengebiet nicht verlassen können. Die Zahl dieser eingefangenen Ionen wird durch Stöße bestimmt. Die Wahl eines hinreichend großen Sondendurchmessers verhindert die Existenz von solchen eingefangenen Ionen. Für die speziellen Randbedingungen, daß monoenergetische Ionen aus dem Innern des Plasmas in das Sondengebiet einwandern und die Sonde alle auftreffenden Ionen absorbiert, wird die Gleichung für den Potentialverlauf numerisch ausgewertet.

K. G. Müller.

**Müller, G.:** Über die Störung eines Lichtbogens durch Tauchsonden. Z. Physik 151, 460—482 (1958).

Die Störung eines Lichtbogens durch Tauchsonden wird untersucht. Als wesentliche Effekte ergeben sich 1. rein thermische Störung durch teilweise Abdeckung des Hauptentladungskanals, 2. elektrische Störung durch Beeinflussung der Strom



spannungscharakteristik der Entladungsstrecke parallel zum Sondenkreis. Außerdem Effekte der Plasmaströmung im Bogen und Kathodenmechanismus. *H. Rother.*

**Persico, E. and J. G. Linhart:** Plasma loss from magnetic bottles. *Nuovo Cimento*, X. Ser. 8, 740—753 (1958).

Die reinen Diffusionsverluste eines vollständig ionisierten Plasmas in magnetischen Dipol- und Quadrupolfallen werden berechnet (unter Vernachlässigung der Kleinwinkel-Streuung). Der Energieverlust ist in beiden Fällen  $\sim T^{-1/2}$ . Die kritische Thermofusions-Temperatur für Quadrupolfallen liegt mit  $1,7 \cdot 10^8$  °K für  $T - D$ -Reaktion etwa 3mal so hoch, wie die kritische Temperatur, berechnet allein aus den Bremsstrahlungsverlusten. *H. Rother.*

**Boulègue, Georges, Paul Chanson, René Combe, Marc Feix et Pierre Strasman:** Perte d'énergie des particules chargées dans un plasma. *C. r. Acad. Sci.*, Paris 247, 445—448 (1958).

Ausdrücke für den Energieverlust  $dE/dx$  geladener Teilchen beim Durchgang durch vollständig ionisierte Plasmen und die Äquipartitionszeit werden für den Fall reiner Coulombstöße (Stoßparameter  $\leq$  Debyelänge) ohne Berücksichtigung von Kollektiveffekten angegeben. Die Äquipartitionszeit ist für Parameterwerte  $g = (kT)^{3/2}/Z_1 Z_2 e^3 \sqrt{\pi n_0} > 10$  praktisch identisch mit dem von L. Spitzer jr. (*Physics of fully ionized gases*, New York-London 1956, p. 80) angegebenen Ausdruck. Für  $g < 10$  ergeben sich merkliche Abweichungen. Numerische Ergebnisse werden angegeben für den Durchgang von Tritium-Kernen durch  ${}^6\text{LD}$ -Plasma für Energien zwischen 5 und  $5 \cdot 10^3$  keV. *H. Rother.*

**Dawson, John and Carl Oberman:** Oscillations of a finite cold plasma in a strong magnetic field. *Phys. Fluids* 2, 103—111 (1959).

Verf. untersuchen die Wechselwirkung eines begrenzten Plasmas von der Form einer unendlich ausgedehnten Platte oder eines unendlichen Zylinders mit einem äußeren elektromagnetischen Feld. Die Ionenraumladung wird als verschmiert und fixiert angenommen, die thermische Elektronenbewegung soll vernachlässigbar sein. Ein starkes äußeres Magnetfeld parallel zur Plasmabegrenzung verhindert eine Elektronenbewegung senkrecht zum Magnetfeld. Die Gleichungen für das elektromagnetische Feld, die Elektronendichte und die mittlere Elektronengeschwindigkeit werden in linearer Näherung durch einen Fourieransatz gelöst. Als spezielle Probleme werden die Reflexion und die Durchlässigkeit der Platte und die Streuung des Zylinders für eine einfallende ebene Welle, die Erzeugung von erzwungenen Schwingungen mit Hilfe eines äußeren Kondensatorfeldes und die durch Plasmaschwingungen verursachte Strahlung diskutiert. *K. G. Müller.*

**Morita, Tohru:** Theory of classical fluids: Hyper netted chain approximation. II: Formulation for multi-component systems. *Progress theor. Phys.* 21, 361—382 (1959).

Das statistische Verfahren, welches im Teil I der Arbeit (vgl. dies. Zbl. 85, 227) zur Berechnung der thermodynamischen Eigenschaften von Einkomponentensystemen entwickelt wurde, wird auf Mehrkomponentensysteme erweitert. Dadurch ergibt sich die Möglichkeit, das Elektrolytproblem zu behandeln. Ansätze für Coulomb-Potentiale mit hartem Kern werden gemacht. Ergebnisse der numerischen Rechnungen werden in einer folgenden Arbeit mitgeteilt. *G. Kelbg.*

**Abe, Ryuzo:** On the Kirkwood superposition approximation. *Progress theor. Phys.* 21, 421—430 (1959).

Verf. untersucht den Näherungscharakter der Kirkwoodschen Superpositionsapproximation für die 3. Verteilungsfunktion, indem eine strenge Entwicklung der Potentiale der mittleren Kräfte nach der Teilchendichte durchgeführt wird. Korrekturterme werden angegeben. Die radiale Verteilungsfunktion für ein System starrer Kugeln wird näher untersucht. *G. Kelbg.*

Abe, Ryuzo: Equation of state of classical electron gas. *Progress theor. Phys.* 21, 475—476 (1959).

Die thermodynamischen Funktionen eines Elektronengases werden mit Hilfe der Cluster-Integral-Entwicklung und Anwendung der Cluster-Approximation von Abe und Morita ermittelt. *G. Kelbg.*

● Schlegelmilch, Werner: Stationäre und instationäre Überspannungen an der einfachen Elektrode. Ilmenau 1957. 42 S. (Habilitationsschrift.)

Verf. gibt eine Zusammenfassung der Vorstellungen, die man vom Zweiphasensystem Metall/wäßrige Metallsalzlösung mit einem potentialbestimmenden Ionenübergang hat. Die unbelastete sowie die belastete einfache Elektrode werden behandelt. Bei der instationären belasteten Elektrode werden Aktivierungspolarisation und Diffusionspolarisation betrachtet. Außerdem erfolgt eine Untersuchung der Nernstschen Diffusionsschicht. *G. Kelbg.*

Ericson, Torleif: Level density of degenerate Fermi systems. *Nuclear Phys.* 8, 265—283 (1958).

Es wird ein System von Fermionen betrachtet, die über eine Gesamtheit von Niveaus verteilt sind, deren Dichte in sehr allgemeiner Weise schwanken kann. Es werden dann die angeregten Zustände des Gesamtsystems betrachtet, die entstehen, wenn ein oder mehrere Teilchen auf höhere Niveaus gehoben werden. Die Termichte dieser angeregten Zustände des Gesamtsystems wird explizit angegeben, außerdem werden Näherungsformeln entwickelt für den Fall, daß sich die Dichte der Einzelterme durch eine Potenzreihe bzw. durch eine Fourierreihe darstellen läßt. Die allgemeine Methode wird illustriert durch Anwendung auf die Niveaudichte schwerer Kerne und den Einfluß der Schalenstruktur. Die letztere wird in einfachster Weise durch eine periodische Niveaudichte der Einzelteilchen dargestellt. Es zeigt sich, daß das Verhältnis der Niveaudichten von Kernen mit nahezu voller Schale zu solchen mit etwa halb gefüllter Schale von der Größenordnung  $10^3$  ist. Weiter wird gezeigt, daß im Fall einer Energielücke oberhalb der besetzten Einzelzustände — wie sie empirisch für  $g - g$ -Kerne vorzuliegen scheint — ein erheblicher Unterschied zwischen geraden und ungeraden Kernen zu erwarten ist, indem die letzteren sehr viel mehr niedrige Anregungsstufen besitzen. *H. Volz.*

Galasiewicz, Zygmunt: Supplementary boson-field method and collective oscillations. *Acta phys. Polon.* 15, 295—303 (1957).

Die auf Bohm und Pines (dies. Zbl. 53, 182) zurückgehende Behandlung des Mehrelektronenproblems wird in der Besetzungszahldarstellung formuliert.

*M. Porsch.*

## Fester Körper:

Fischer, K.: Die Temperaturabhängigkeit der Struktur punktförmiger Fehlstellen in kubischen Kristallgittern. *Z. Phys.* 157, 198—218 (1959).

Die Struktur einer Gitterfehlstelle ist bei gegebener Temperatur und verschwindenden äußeren Kräften durch die Forderung bestimmt, daß die freie Energie des gestörten Kristalls in Abhängigkeit von den mittleren Atomlagen minimal ist. Sie läßt sich aber durch ein Variationsverfahren ermitteln. Die freie Energie kann man hierbei nach einem Näherungsverfahren berechnen, das schon zur Ermittlung der thermischen Eigenschaften von idealen Kristallen mit Erfolg verwendet wurde. Als Beispiel wird die Temperaturabhängigkeit der Struktur einer Leerstelle im Edelgasgitter unter Beschränkung auf Wechselwirkungen zwischen ersten und zweiten Nachbarn behandelt.

Zusammenfassung des Autors.

Bohm, Joachim und Will Kleber: Betrachtungen über Enantiomorphie. *Wiss. Z. Humboldt-Univ. Berlin, math.-naturw. R.* 8 (1958/59), 171—180 (1959).

Untersuchung und Bericht über die 11 enantiomorphen Punktgruppen bzw. Kristallklassen (das sind die reinen Drehgruppen) und die daraus entstehenden 65 Bewegungsgruppen von Sohnke. Es werden drei Arten von enantiomorphen Raumgruppen unterschieden: A. Gruppen, die ausschließlich aus Dreh- oder Schrauben-



achsen bestehen, etwa  $P_3 = C_3^1$ . B. Gruppen, die nur linke oder nur rechte Schraubenachsen mit derselben Komponente besitzen etwa  $P_4 = C_4^2$ . C. Gruppen, bei denen die  $n$ -zähligen Schraubenachsen sowohl als linke als auch als rechte vorliegen, etwa  $P_3 = C_3^4$ . Die Verhältnisse in ein und zwei Dimensionen werden ausführlich besprochen und in Zusammenhang mit dem  $n$ -dimensionalen Raum gebracht. Ein Ausblick auf die Enantiomorphie-Verhältnisse im Kontinuum beschließt die Arbeit.

*J. J. Burckhardt.*

**Proceedings of 1958 international conference on semiconductors. Rochester, August 18—22.** Phys. Chem. Solids 8, VII, 552 p. (1959).

Als Band 8 der Zeitschrift "The Physics and Chemistry of Solids" liegt der Tagungsbericht der „Internationalen Konferenz über Halbleiter in Rochester (USA), August 1958“ vor. Ein Blick auf den Autorenindex zeigt, daß ein großer Teil der bekannten Halbleiterphysiker aus aller Welt versammelt war, und so ist es nicht verwunderlich, daß dieses Konferenzresumée eine Fülle von Beiträgen (zum Teil Originalbeiträgen) enthält, die die 1958er Situation der Halbleiterforschung kennzeichnen und neue Wege angeben. Die Tagung war in Einzelsitzungen gegliedert. Das vorliegende Heft übernimmt diese Einteilung und man findet: Theorie S. 21—51, 123—141, 363—381; Transportvorgänge S. 219—263; Thermische Leitfähigkeit u. thermomagnetische Effekte S. 338—362; Exzitonen und Photonen S. 166—195, 382—422; Optische Eigenschaften S. 264—285; Magnetooptische Effekte S. 305—337; Versetzungen S. 142—165; Rekombination und Verunreinigungen S. 52—86; Oberflächen S. 87—122; Allgemeine Halbleiterprobleme S. 196—218; Halbleiter mit großen verbotenen Bändern S. 444—485; Halbleitende Verbindungen S. 423—443; Ionenkristalle S. 286—304; Resonanzeffekte S. 486—506; Galvanomagnetische Effekte S. 507—530; Eine Schlußsitzung (S. 531—549) faßte in 5 Vorträgen die wesentlichen Gesichtspunkte der vorangegangenen Einzelbeiträge übersichtlich zusammen. Bevor nun einige Arbeiten besprochen werden, sei vermerkt, daß der vorliegende Zeitschriftenband allen, die irgendwie auf dem Gebiet der Halbleiterphysik arbeiten, als Zusatz zu den jährlich erscheinenden Buchreihen über Festkörperphysik (z. B. Solid State Physics; Progress in Solid State Research, s. Seitz und Turnbull, siehe für Vol. IV, dies. Zbl. 80, 452; V. dies. Zbl. 79, 224; VI, dies. Zbl. 82, 228) empfohlen werden kann.

**E. O. Kane:** The semi-empirical approach to band structure; S. 38—44. Übersicht über eine einfache theoretische Methode, in enger Verbindung mit den Experimenten (Zyklotronresonanz) Angaben über die Lage des Energieniveaus zu machen. Für den gitterperiodischen Teil der Bloch-Funktion wird ein effektiver Hamilton-Operator diskutiert und die Anwendungsmöglichkeit der Störungsrechnung erörtert.

**W. Kohn:** Motion of electrons and holes in semiconductors from a many-electron point of view; S. 45—47. Zusammenfassung der in Solid State Physics V, (dies. Zbl. 79, 224) 7, Phys. Review, II. Ser. 105, 509—516 (1957); Ibid. 110, 857—864 (1958) publizierten Gedanken.

**P. T. Landsberg, A. R. Beattie:** Auger effect in semiconductors; S. 73—75. Vorabdruck der Ergebnisse einer in "The Proc. Roy. Soc. London" erscheinenden Arbeit mit dort nicht enthaltenen Diskussionen.

**P. N. Argyres:** Galvanomagnetic effects in the quantum limit; S. 124—130. Der Stoßterm in der Boltzmann-Gleichung für die Elektronen wird mit Eigenfunktionen berechnet, die das Magnetfeld enthalten (Störungsrechnung nach kleinem elektrischen Feld). Es zeigt sich, daß Relaxationszeiten existieren.

**P. F. Price:** On the theory of strong-field conduction; S. 136—137. Herstellung von Zusammenhängen früherer Arbeiten des Verf. [IBM-Journal 1, 147 (1957); 1, 239 (1957); 2, 200 (1958)] mit anderen Publikationen.



**G. E. Tauber, L. Soffer:** Transport phenomena in semi-conductors for warped energy surfaces; S. 138—141. Die Boltzmann-Gleichung wird für nichtsphärische Energieflächen in das Kohlersche Variationsprinzip transformiert und die Transportkoeffizienten angegeben, indem eine alte Methode von Enskog benutzt wird. Die vorliegende Arbeit enthält die prinzipiellen Schritte. Numerische Auswertungen sind einer späteren Veröffentlichung vorbehalten.

**H. Haken:** On the theory of excitons in solids; S. 166—171. Die vorliegende Arbeit enthält eine genauere Betrachtung der stationären Zustände von Exzitonen und ihren optischen Übergängen (speziell große Bahnen). Die dielektrische Abschirmung durch die Gitterschwingungen wird besonders untersucht.

**S. H. Koenig:** Hot and warm electrons — a review; S. 227—234. Übersicht über den gegenwärtigen Stand der Forschung der Phänomene, in denen die mittlere Elektronenenergie im Halbleiter meßbar vom thermodynamischen Gleichgewichtsmittelwert abweicht.

**T. N. Morgan:** The mobility of electrons heated by microwave fields in *n*-type germanium; S. 245—249. Die Boltzmann-Gleichung wird bei Einschluß akustischer und optischer Phononen, mit denen die Elektronen (sphär. Energieflächen) wechselwirken, und Anwesenheit statischer elektrischer und Mikrowellenfelder gelöst (numerisch, mit Elektronenrechnern).

**H. J. G. Meyer:** Theory of infrared absorption by conduction electrons in germanium; S. 264—269. Die Theorie wird für akustische und optische Imtastreuung und nichtsphärische Elektronenenergieflächen im *L*-Band allgemein entwickelt. Es gelingt durch Vergleich mit experimentellen Daten die Festlegung der akustischen und optischen Deformationspotentialkonstanten.

**B. Goodman, O. S. Oen:** Interaction of excitons with lattice vibrations; S. 291—294. Berechnung der thermischen Dissoziationsrate von Exzitonen in polaren Halbleitern sowie Anwendung des Modells der tiefsten angeregten Energiezustände von Alkalihalogeniden zur Erklärung optischer Eigenschaften.

**J. Appel:** Theory of thermoelectric and thermomagnetic effects in nonpolar isotropic semiconductors; S. 353—358. (Vgl. dies. Zbl. 79, 235, 450).

**B. Segall:** Band structure calculations of semiconductors by the Kohn-Rostoker-Korringa method: application to germanium; S. 371—374.

**R. J. Elliott, R. Loudon:** Theory of fine structure on the absorption edge in semiconductors; S. 382—388. Es werden allgemeine Gleichungen für die Absorptionskante in Halbleitern abgeleitet. Bei Vernachlässigung von Spin-Effekten und Annahme sphärischer Energieflächen werden die Einflüsse von Exzitonen oder äußeren Magnetfeldern untersucht. Eine Kombination beider konnte nicht exakt abgeleitet werden.

**F. Herman:** Lattice vibrational spectrum of Germanium; S. 405—418. Die Born-von Kármán-Theorie wird auf ein Diamantgitter angewandt. Die Wechselwirkung jedes Gitteratoms mit allen Nachbarn (bis zur 6. Ordnung) wird allgemein mitgenommen. Die mikroskopischen elastischen Konstanten sowie Gitterfrequenzen enthalten so 21 unabhängige Parameter, die eine gute Approximation an die experimentellen Daten erlauben.

*W. Klose.*

• **Shepherd, A. A.:** An introduction to the theory and practice of semiconductors. London: Constable & Company Ltd. 1958. 206 p. 18/6 net.

Eine kurze etwas eigenwillige, das Wesentliche an physikalischem Inhalt gut herausstellende Einführung in das Halbleitergebiet. Die Theorie wird nicht durchgeführt, aber die Ansätze beschrieben. Vorteilhaft für alle, die auf diesem Gebiet experimentell arbeiten oder sich über die experimentellen Möglichkeiten informieren wollen.

*Gerd Müller.*

## Berichtigungen

zu den Bänden 79, 81, 83, 84, 85.

### Zu Band 79:

Mayer, C.: Über einige Anwendungen Dedekindscher Summen. J. reine angew. Math. 198, 143—203 (1957); dies. Zbl. 79, 103—104.

Der Verfassersname lautet „C. Meyer“.

● Hooker, P. F. and L. H. Longley-Cook: Life and other contingencies. Cambridge: At the University Press 1957. IX, 256 p. 20 s.; dies. Zbl. 79, 358.

Vor der Ortsangabe ist im Titel ergänzend einzufügen: „Vol. II.“.

### Zu Band 81:

Bassali, W. A.: The transverse flexure of thin elastic plates supported at several points. Proc. Cambridge philos. Soc. 53, 728—743; 744—754 (1957); dies. Zbl. 81, 185.

Der zweite, auf den Seiten 744—754 der Zeitschrift befindliche, Teil der Arbeit hat einen leicht geänderten Titel, es heißt hier nämlich „thin perforated elastic“ statt nur „thin elastic“.

Lupanov, O. B.: The synthesis of contact circuits. Doklady Akad. Nauk SSSR 119, 23—26 (1958) [Russisch]; dies. Zbl. 81, 209.

In Zeile 3 v. o. des Referats lies „Povarov's“ statt „Tovarov's“.

In Zeile 2 v. u. lies „considers“ statt „comsiders“.

Philips, R. S.: Dissipative hyperbolic systems. Trans. Amer. math. Soc. 86, 109—173 (1957); dies. Zbl. 81, 311.

Der Verfassersname lautet „R. S. Phillips“. Eine entsprechende Korrektur ist im Autorenregister (dies. Zbl. 81, 472 Spalte 3) vorzunehmen.

### Zu Band 83:

Copping, J.: Inclusion theorems for conservative summation methods. Nederl. Akad. Wet., Proc. Ser. A 61, 485—499 (1958); dies. Zbl. 83, 45—46.

Auf S. 45 in Zeile 2 v. u. lies „konvergenztreues“ statt „konservatives“.

Aljančić, Slobodan: Classe de saturation des procédés de sommation de Hölder et de Riesz. C. r. Acad. Sci., Paris 246, 2567—2568 (1958); dies. Zbl. 83, 47.

In Zeile 4 v. o. des Referats lies „ $C_n^{(k)}(S) - s$ “ statt „ $C_n^{(k)}(S) - S$ “.

Tondl, Aleš: Résonance subharmonique d'un rotor ayant une caractéristique non linéaire des appuis de roulement. Acad. Républ. popul. Roumaine, Revue Méc. appl. 2, Nr. 2, 142—157 (1957); dies. Zbl. 83, 196.

Die Arbeit beginnt auf Seite 143 der Zeitschrift. Der Referent heißt „K. Zoller“.

Pogorzelski, W.: Remarques concernant le travail „Sur l'équation intégrale singulière non linéaire et sur les propriétés d'une intégrale singulière pour les arcs non fermés“. J. Math. Mech. 8, 159—160 (1959); dies. Zbl. 83, 329.

Der Verfassersname lautet „W. Pogorzelski“.

Lyttkens, Sonja: The remainder in Tauberian theorems II. Ark. Mat. 3, 315—349 (1956); dies. Zbl. 83, 333—334.

Das Heft der Zeitschrift erschien „1957“.

**Myller, A.:** La courbe des billes de Mariotte. Acad. Republ. popul. Române, Fi Iași, Studii Cerc. științ. 3, 1—14, russ. und französ. Zusammenfassg. 15 [Rumänisch] dies. Zbl. 83, 365.

Das Heft der Zeitschrift erschien 1952.

**Hall, D. N. and J. Lamb:** Measurement of ultrasonic absorption in liquids by the observations of acoustic streaming. Proc. phys. Soc. 73, 354—364 (1959); dies. Zbl. 83, 424.

In Zeile 6 v. o. des Referats lies „betriebeenen“ statt „betrieben“.

In Zeile 4 v. u. lies „und“ statt „unsd“.

In Zeile 3 v. u. lies „Abnahme“ statt „Annahme“.

**Hertogh, C. D. and H. A. Tolhoek:** Cluster developments for Jastrow wave functions. I: General cluster development of the distribution functions. II: Introduction of irreducible cluster functions. III: Expressions for the distribution functions and the energy; application to nuclear matter; expansion at low temperature. Physica 24 721—741; 875—895; 896—909 (1958); dies. Zbl. 83, 450—451.

Der erstgenannte Verf. heißt „C. D. Hartogh“.

In der vierten Titelzeile lies „expansions“ statt „expansion“.

Auf S. 451 in Zeile 5/6 v. o. lies „cluster-Entwicklungen“ statt „Chester-Entwicklungen“.

Am Ende von Zeile 14 v. u. des Referats ist das Semikolon durch ein Komma zu ersetzen.

In Zeile 13 v. u. lies „Gesamtenergie“ statt „Gesamtmenge“.

#### Zu Band 84:

**Gehring, F. W.:** On solutions of the equation of heat conduction. Michigan math. J. 5, 191—202 (1957); dies. Zbl. 84, 92.

Das Heft der Zeitschrift erschien 1958.

**Ribarič, M.:** On the inversion of integral transforms. Arch. rat. Mech. Analysis 3, 45—50 (1959); dies. Zbl. 84, 96—97.

Der Verfassername lautet „M. Ribarič“.

**Černý, Ilja:** On the extension of a linear operator in a topological linear space. Czechoslov. math. J. 8 (83), 167—188, engl. Zusammenfassg. 188—189 (1958) [Russisch]; dies. Zbl. 84, 106.

Der Verfasser der Arbeit schreibt sich „Ilja Černý“.

**Adams jr., Eldridge S. and F. Stewart I. Schlesinger:** Simple automatic coding systems. Commun. Assoc. comput. Machin. 1, Nr. 7, 5—9 (1958); dies. Zbl. 84, 124.

Der zweite Verfassername lautet „Stewart I. Schlesinger“.

**Gallai, T.:** Maximum-Minimum Sätze über Graphen. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 9, 395—434 (1958); dies. Zbl. 84, 196—197.

Auf S. 196 in Zeile 8 v. o. des Referats lies „ $z(x)$ “ statt „ $z(k)$ “.

● **Schwartz, Laurent:** Mathematik und Quantenphysik. Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias exactas y naturales. Departamento de Matemáticas 1958. 266 S. [Spanisch]; dies. Zbl. 84, 221—222.

In der 2. Titelzeile lies „Departamento“ statt „Departemento“.

Auf S. 222 in Zeile 12 v. o. lies „ $E_3$ “ statt „ $E^3$ “ und „ $\mathcal{E}'(E_3)$ “ statt „ $\varphi'(E_3)$ “.

In Zeile 2/1 v. u. des Referats lies „mathematicians“ statt „mathematiciens“.

**Hasenjaeger, G.:** Über Interpretationen der Prädikatenkalküle höherer Stufe. Arch. math. Logik Grundlagenforsch. 4, 71—80 (1958); dies. Zbl. 84, 247—248.

Auf S. 247 in Zeile 4 v. u. lies „ $D$ “ statt „ $D_\emptyset$ “.

Auf S. 248 in Zeile 6 v. o. lies „is“ statt „if“.

In Zeile 11 v. o. lies „just“ statt „first“.



Roy, Kamalaranjan: Dual Newman algebra. Bull. Calcutta math. Soc. 49, 177—187 (1957); dies. Zbl. 84, 260—261.

Auf S. 260 in Zeile 8 v. u. lies „ $\cdot$ “ statt „ $!$ “.

In Zeile 5 v. u. lies „ $(\cdot)$ “ statt „ $(-)$ “.

Auf S. 261 in Zeile 2 v. u. des Referats lies „Algebren“ statt „Albebren“.

● Faculté des Sciences de Paris: Séminaire de théorie du potentiel, dirigé par M. Brelot, G. Choquet et J. Deny. 2<sup>e</sup> année: 1958. Paris: Secrétariat mathématique 1959. 71 p.; dies. Zbl. 84, 309—314.

Auf S. 311 in Zeile 16 v. o. lies „ $\Phi_{x_0}$ “ statt „ $\Delta_{x_0}$ “.

In den Zeilen 11 und 5 v. u. lies „ $\mathcal{T}$ “ statt „ $\mathcal{C}$ “.

Auf S. 313 in Zeile 14 v. u. lies „ $\int f d\mu_n$ “ statt „ $\int d\mu_n$ “.

Auf S. 314 in Zeile 8. v. o. lies am Anfang „ $T' \lambda(x)$ “ statt „ $T \lambda(x)$ “.

In Zeile 7 v. u. des Referats lies „ $C(K)$ “ statt „ $G(K)$ “.

Raimi, Ralph A.: Equicontinuity and compactness in locally convex topological linear spaces. Michigan math. J. 5, 203—211 (1958); dies. Zbl. 84, 332.

In Zeile 7 v. o. des Referats lies „ $\mathfrak{F}$ “ statt „ $\mathfrak{Y}$ “.

● Chew, Victor (edited by): Experimental designs in industry. A symposium held November 5—9, 1956 at North Carolina State College. (A Wiley Publication in Applied Statistics.) New York: John Wiley & Sons, Inc.; London: Chapman & Hall, Ltd. 1958. XI, 268 p. \$ 6,00; dies. Zbl. 84, 365—367.

Auf S. 366 in Zeile 12 v. o. lies „hier über“ statt „hierüber“.

In Zeile 8 v. u. lies „der Blockbildung“ statt „des Blockbildes“.

Auf S. 367 in Zeile 5 v. o. lies „193“ statt „163“.

In Zeile 7 v. o. lies „DeBaun“ statt „DeBann“.

Bernstein, Israël: Suites spectrales pour les espaces des applications continues. C. r. Acad. Sci., Paris 245, 880—882 (1957); dies. Zbl. 84, 385—386.

Auf S. 385 in Zeile 5 v. u. zweimal und einmal in Zeile 3 v. u. lies „ $X$ “ statt „ $x$ “.

Auf S. 386 in Zeile 4 v. o. lies „cohomology“ statt „cohomolohy“.

In Zeile 10 und 11 v. o. lies „ $X$ “ statt „ $x$ “.

Toda, Hirosi:  $p$ -primary components of homotopy groups. I: Exact sequence in Steenrod algebra. II: mod  $p$  Hopf invariant. Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, Ser. A 31, 129—142, 143—160 (1958); dies. Zbl. 84, 386—387.

Auf S. 386 in der letzten Zeile vor Abschnitt II füge vor dem Punkt ein „by the author“.

Auf S. 387 in Zeile 2 v. o. lies „ $N < k \leq$ “ statt „ $n < k \leq$ “.

Wu, Wen-tsun: On the  $\Phi_{(p)}$ -classes of a topological space. Science Record, n. Ser. 1, 377—380 (1957); dies. Zbl. 84, 387.

In Zeile 5 v. o. des Referats lies „of“ statt „oft“.

In Zeile 4 v. u. lies „ $\Phi_{(p)}^n(X)$ “ statt „ $\Phi_{(p)}^i(X)$ “.

Liao, S. D.: Periodic transformations and fixed point theorems. I. Cup products and special cohomology. II. Manifolds. Science Record, n. Ser. 1, Nr. 1, 25—29, 31—34 (1957); dies. Zbl. 84, 388.

In Zeile 10 v. o. des Referats lies „ $\Delta_Z$ “ statt „ $\Delta Z$ “.

Chattarji, P. P.: Torsion of curved beams of rectangular cross-section having transverse isotropy. Z. angew. Math. Mech. 38, 157—159 (1958); dies. Zbl. 84, 402.

Am Ende von Zeile 9 v. o. des Referats ist ein Komma anzufügen.

In Zeile 10 v. o. sind die ersten vier Wörter zu streichen; hinter dem Wort „Gleichgewichtsbedingungen“ ist einzufügen: „durch eine Spannungsfunktion  $\Phi$  befriedigt“.

In Zeile 11 v. o. lies „ $x$ “ statt „ $v$ “.

In Zeile 10 v. u. des Referats lies „Nebenbedingung“ statt „Nebenbedingungen“.

In Zeile 8 v. u. füge am Ende noch „ $\Phi$ “ an.

In Zeile 6 v. u. lies „Hauptnormalen“ statt „Hauptnormale“; das Wort „die“ ist zu tilgen.

In Zeile 5 v. u. lies „koordinaten“ statt „koordinate“.

**Goliteyn (Golitsyn), G. S. and K. P. Stanjukovič (Staniukovich):** Some problems of magnetogasdynamics with account of finite conductivity. Soviet Phys., JETP 6, 1090—1100 (1958), Übersetz. von Žurn. éksp. teor. Fiz. 33, 1417—1427 (1957); dies. Zbl. 84, 425.

Die richtige Transliteration des an allererster Stelle stehenden Verfassernamens ist „Goliceyn“.

**Nagy, K. L.: Free field operators and the Yang-Feldman formalism.** Acta phys. Acad. Sci. Hungar. 9, 269—274 (1959); dies. Zbl. 84, 449.

In Zeile 2 v. o. des Referats lies „ $\varphi_\sigma(x)$ “ statt „ $\varphi_0(x)$ “.

## Zu Band 85:

**Pfanzagl, J.: Ein kombiniertes Test- und Klassifikations-Problem.** Metrika 2, 11—45 (1959); dies. Zbl. 85, 133.

Der Verfassername lautet „J. Pfanzagl“.

**Striebel, Charlotte T.: On the efficiency of estimates of trend in the Ornstein Uhlenbeck process.** Ann. math. Statistics 29, 192—200 (1958); dies. Zbl. 85, 136.

Die Formelzeile muß lauten:

$$e(T) = \frac{E \int_0^T (\dot{f}(t) - f(t))^2 dt}{E \int_0^T (\bar{f}(t) - f(t))^2 dt}.$$

● **Bachmann, Friedrich: Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. Eine Vorlesung.** (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Bd. 96.) Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1959. XIII, 311 S. mit 160 Abb. DM 45,80; Ganzln. DM 49,80; dies. Zbl. 85, 145—147.

Auf S. 146 in den Zeilen 23 v. o., 16 v. u. und 14 v. u. lies jeweils „ $PGL(2, K)$ “ statt „ $SL(2, K)$ “.

**Novoselov, V. C.: Reduktion eines Problems der nichtholonomen Mechanik auf ein bedingtes Problem der Mechanik holonomer Systeme.** Leningradsk. Godsuarst. Univ., Učenyje Zapiski Nr. 217, mat.-mech. Fak., Ser. mat. Nauk Nr. 31 28—49 (1957) [Russisch]; dies. Zbl. 85, 177.

Der Verfassername lautet richtig transliteriert „V. S. Novoselov“.

**Coppel, W. A.: On the equation of a synchronous motor.** Quart. J. Mech. appl. Math. 12, 242—256 (1959); dies. Zbl. 85, 180—181.

Auf S. 180 in Zeile 2 v. u. lies „ $\alpha(\eta - x')$ “ statt „ $\alpha(\eta - x)$ “.

In Zeile 1 v. u. lies „ $\frac{1}{4} x'^2$ “ statt „ $\frac{1}{4} x^2$ “.

Auf Seite 181 in Zeile 3 v. u. des Referats lies „ $\frac{1}{4} x'^2$ “ statt „ $\frac{1}{4} x^2$ “.

**Sirokov (Shirokov), Ju. M. (Ju. M.): A group-theoretical consideration of the basis of relativistic quantum mechanics. I: The general properties of the inhomogeneous Lorentz group. II: Classification of the irreducible representations of the inhomogeneous Lorentz group. III: Irreducible representations of the classes  $P_0$  and  $O_0$ , and the non-completely-reducible representations of the inhomogeneous Lorentz group.** Soviet Phys., JETP 6, 664—673, 919—928, 929—935 (1958), Übersetz. von Žurn. éksp. teor. Fiz. 33, 861—872, 1196—1207, 1208—1214 (1957); dies. Zbl. 85, 216—217.

Auf S. 216 in Zeile 3 v. o. des Referats füge am Ende hinzu: „(Keine mathematisch strengen Beweise!).“

In Zeile 5/6 v. o. lies „hermitesch adjungiert“ statt „konjugiert komplex“.

## Autorenregister

Besteht eine Arbeit aus mehreren Mitteilungen, so wird hinter dem Stichwort die Mitteilungsnummer mit römischen Ziffern angegeben.

- Abdel-Messih, Moheb Aziz** (Zeros and poles of output voltage of potentiometer networks) 414.
- Abe, Eiichi** (Groups of C. Chevalley) 18.
- **Ryuzo** (Kirkwood superposition approximation) 449; (State of classical electron gas) 450.
- Abstracts of papers presented at the plenary sessions of the international conference on information processing, Paris, 15—20 June 1959.** 123.
- Achiezer (Akhiezer), A. I., G. Ja. (G. Ia.) Ljubarskij (Ljubarskii) and R. V. Polovin** (Stability of shock waves) 212.
- — — and **A. G. Sitenko** (Excitation of hydromagnetic waves) 404.
- Aczel, Otto** (Problem der Brachistochrone) 316.
- Adachi, Masahisa and Nobuo Shimada** (Tangent structures of lower dimensional manifolds) 173.
- Adams, Ernest and Samuel Messick** (An axiomatic formulation and generalization of successive intervals scaling) 141.
- Adjan (Adian), S. I.** (Finitely defined groups) 251.
- Adler, Helmut** (Gerät zur Auflösung von Polynomgleichungen) 339.
- Agnew, R. P.** (Riemann summability of Cauchy products) 48.
- Ahmad, Salah** (Probabilité pour qu'une série entière à coefficients aléatoires puisse être prolongée) 125.
- Akkerman, R. B.** (Quadraturformeln) 336.
- Akopjan, A. A.** (Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik) 205.
- Al-Salam, W. A.** (Bessel polynomials) 289.
- Albuquerque, J.** (Intégrale de Lebesgue dans l'espace produit) 274.
- Alekseev, A. I.** (Covariant equation for annihilating particles) 439.
- Alexandroff, P. and V. Ponomarev** (Bicompact extensions of topological spaces) 170.
- Alexandrow (Aleksandrov), A. D.** (Kurven und Flächen) 158.
- Alexits, Georges** (Konvergenz fast überall der Orthogonalreihen) 286; (Théorie constructive des fonctions) 286.
- Alfaro, V. De and R. Strofollini** (Scattering corrections in  $\pi$ -deuteron scattering) 442.
- Altmann, S. L.** (Equivalent functions: hybrids and Wannier functions) 431.
- Ambarcumjan, S. A. und D. V. Peštmaldžjan** (Orthotrope Schalen und Platten) 382.
- Amemiya, Ichiro and Israel Halperin** (Coordinatization of complemented modular lattices) 145.
- Amick, James L.** (Semiempirical relation for laminar separation) 392.
- Amitsur, S. A.** (Radical of field extensions) 22.
- Anastassiadis, Jean** (Théorème de Picard-Montel) 294.
- Anderson, James L.** (Factor sequences in quantized general relativity) 428.
- **Lee W.** (Distributivity and simple connectivity of lattices) 259.
- Andronov, A. A., A. A. Vitt und S. E. Chajkin** (Theorie der Schwingungen) 178.
- Anscombe, F. J.** (Rectifying inspection of a continuous output) 134.
- Ansel'm, A. I. and I. G. Lang** (Phononic scattering of electrons) 234.
- Ansonge, R.** (Iterationsverfahren von Bodewig) 108; (Iterationsverfahren von G. Schulz) 330.
- Antončik, Emil** (Repulsive potential in the quantum theory of solids) 232.
- Aoyama, Hirojiro** (Risk index of the railroad crossing) 138.
- Arbeiten der dritten mathematischen Unions-Tagung Moskau, Bd. 3.** 1.
- Archbold, J. W. and N. L. Johnson** (Construction for Room's squares) 9.
- Arcidiacono, Giuseppe** (Relatività di Fantappiè) 429.
- Armitage, P.** (Sequential estimation of a binomial parameter) 137.
- Arnous, E. and W. Heitler** (Non-local interaction and universal cut-off) 439.
- Arrighi, Gino** ( $\sum_{s=1}^{\infty} P_s(t) e^{e_s t}$ ) 287.
- Aršinov (Arshinov), A. A. and A. K. Musin** (Equilibrium ionization of particles) 227.
- Asenjo, Florencio González s. González Asenjo, Florencio** 242.
- Asplund, Edgar** (Iteration of matrices) 20.
- Assmus jr., E. F.** (Homology of local rings) 24.
- Atkin, R. H.** (Mathematics and wave mechanics) 379.
- Atkinson, F. V.** (Asymptotic formulae for linear oscillations) 70.
- Atsumi, Koichi** (Notes on lattices) 19.
- Aubert, K. E.** (Ideal theory of commutative rings) 22; (Convex ideals in ordered group algebras) 101; (Théorie générale des idéaux) 263.
- Aufschläger, Rudolf** (Massausche Gitterkonstruktion) 335.
- Aumann, Robert J.** (Acceptable points in general cooperative  $n$ -person games) 130.



- Auslander, Louis (Sheeted structure of affine spaces) 163.
- — and L. Markus (Flat Lorentz 3-manifolds) 163.
- Ávila, Geraldo Severo de Souza (Simultaneous propagation of waves) 83.
- Azbel', M. Ja. s. É. A. Kaner 233.
- Babadžanjan, G. A. und A. G. Nazarjan (Ebene laminare Flüssigkeitsbewegung in offenem Kanal) 390.
- Bachmann, Friedrich (Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff) 145.
- Backes, F. (Systèmes triples orthogonaux) 160.
- Bade, William L. s. Jerrold M. Yos 228.
- Baier, Othmar (Konstruktion von Parallelen) 148.
- Bajcsay, Pál (Differential calculus) 37.
- — und V. Lovass-Nagy (Näherungsweise Lösung von Matrizen-differentialgleichungen) 334.
- Bakanov, S. P. s. B. V. Derjagin 446.
- Bakel'man, I. Ja., M. Š. Birman und O. A. Ladyženskaja (S. G. Michlin) 7.
- Baker, G. A. (Test of homogeneity for populations composed of normal distributions) 134.
- Balaguer, F. Sunyer s. Sunyer Balaguer, F. 45.
- Balakrishnan, A. V. (Representation of abstract Riesz potentials) 327; (Abstract Cauchy problems) 327.
- Balan, Ștefan, Sandu Răutu und Valeriu Petcu (Structures in the elasto-plastic range — chromoplasticity —) 192.
- Balasiński, W. and S. Mrówka (Algorithms of arithmetical operations) 342.
- Balázs, J. (Hermite-Fejérsche Interpolationstheorie) 52.
- — and P. Turán (Interpolation. III.) 51; (IV.) 52.
- Banaschewski, Bernhard (Idelatheorie der ganzen Funktionen) 320.
- Bandyopadhyay, Shyama Prasad (Lattice of normal subfields) 265.
- Banerjee, D. P. (Exact distribution of a test) 353.
- Banerjee, Haridas (Scattering of a polarised electron beam) 211.
- Bantegui, Celia G. s. K. C. Sreedharan Pillai 137.
- Baranoff, Alexis von (Équation d'Orr-Sommerfeld) 396.
- Barbenson, W. (Maxima et minima d'une fonction réelle) 277.
- Barfield, B. F. s. F. M. White jr. 393.
- Barglăzan, Aurel, Iosif Preda, Mircea Popoviciu et Octavian Popa (Formes de diffuseurs-aspirateurs) 406.
- Barnard, G. A. (Th. Bayes) 6.
- Barr, Allan D. S. (Cross-section distortion) 185.
- Barrett, John H. (Second order complex differential equations) 305.
- Barsotti, Leo (Symmetrie von Kurven) 361.
- Barthel, Woldemar (Busemannscher und Brunn-Minkowskischer Satz) 167; (Homogene Funktionen auf dem Graßmann-Kegel) 315.
- Bartkowski, Zygmunt (Körte-Spiegel) 417.
- Barton, D. E. (Equivalence of two tests of equality of rate) 137.
- Bassali, W. A. (Thin circular plates) 382.
- Batchelor, G. K. (Small-scale variation of convected quantities. I.) 397.
- — —, I. D. Howells and A. A. Townsend (Small-scale variation of convected quantities. II.) 397.
- Baudoin-Gohier, Simone (Équations de Codazzi) 365.
- Baumol, William J. (Topology of second order linear difference equations) 78.
- Beckmann, P. and K.-H. Schmelovsky (Bei Schwunderscheinungsuntersuchungen vorkommendes Integral) 114.
- Bejar, Juan (Versuchsplanung) 354.
- Belardinelli, Giuseppe (Risoluzione analitica delle equazioni algebriche generali) 13.
- Belenkij, S. Z. (Gleichungen der Hydrodynamik) 194.
- Belinskij (Belinsky), P. P. (Extremum problems of quasiconformal mappings) 66; (Areal measure in quasiconformal mapping) 299.
- Beljaev (Beliaev), S. T. (Methods of quantum field theory) 228; (Energy-spectrum of a non-ideal Bose gas) 229.
- Bellman, Richard (Non-negativity of Green's functions) 312; (Dynamic programming and stochastic control processes) 349.
- Belocerkovskij, O. M. (Umströmung eines Kreiszyinders) 402.
- Benado, Mihail (Fonction de Möbius) 258.
- Beneš, V. E. (Queues with Poisson arrivals) 347.
- Benson, Donald C. (Theorem of Loewner) 318.
- Berberian, S. K. (Regular ring of a finite AW\*-algebra) 99.
- Bereis, Rudolf (Sphärische Radlinien) 157; (Gaußsche Zahlenebene) 157.
- Beresford Rayner, Charles s. Rayner, Charles Beresford 425.
- Bergendal, Gunnar (Transformations de Fourier associées à un opérateur différentiel elliptique) 88.
- Bergman, Stefan (Quasi-pseudoconformal transformations) 67.
- Bergström, Harald (Invarianten von Permutationsgruppen) 15; (Spearman's rank correlation coefficient) 134.
- Berkes, J. (Arbeit von F. Leuenberger) 150.
- Berman, D. L. (Lagrange's interpolation process) 51.
- Bernardes, N. (Potential energy matrix elements) 431.
- Bernays, Paul (Décision en logique) 251.
- Berndt, Gerald D. (Edgeworth and Gram-Charlier series) 128.
- Bernhart, Arthur (Curves of pursuit. II.) 150; (Polygons of pursuit) 150.
- Bernstein, Ira B. and Irving N. Rabinowitz (Electrostatic probes in a low-density plasma) 448.
- Berruti Onesti, Natalia (Teorema di esistenza per  $F(x, y, z, \partial z/\partial x, \partial z/\partial y) = 0$ ) 307.
- Bersuker, I. B. (Wahrscheinlichkeiten der optischen Übergänge) 445.
- — — s. M. G. Veselov 226.
- Bertotti, Bruno (Trasformazioni di coordinate e movimento browniano) 349.

- Bertram, G. (Fehlerabschätzung zum Ritz-Galerkin-schen Verfahren) 335.
- Bertrandias, Jean-Paul (Fonctions pseudo-aléatoires) 346.
- Beth, E. W. (Foundations of mathematics) 241; (Moderne Logik) 243.
- Beyer, Otfried (Satz von Ljapunoff) 352.
- Białynicki-Birula, I. (Time reflection) 430.
- Bicadze (Bitsadze), A. V. (Frankl's problem) 308; (Frankl's problem for Chaplyguin's equation) 309.
- Biedenharn, L. C. (Statistical tensors in quantum mechanics) 214.
- Biermann, Kurt-R. (Förderung deutscher Mathematiker durch A. von Humboldt) 6. (G. Eisenstein) 6.
- — und Margot Faak (Leibniz und Berechnung der Sterbewahrscheinlichkeit) 4.
- — und Jürgen Mau (Anwendung der Kombinatorik in der Logik) 2.
- Biglov, Z. I. (Expansion in eigenfunctions of second order differential equations) 98.
- Bilenky, S. M., L. I. Lapidus, L. D. Puzikov and R. M. Ryndin (Analysis of reactions of the  $a + a' \rightarrow b + b'$  type) 223.
- Binnie, A. M. (Instability in a slightly inclined water channel) 198.
- Birman, M. Š. s. I. Ja. Bakelman 7.
- Bishop, Errett (Function algebras) 65.
- Bisshopp, K. E. (Forced torsional vibration of systems) 192.
- Blackwell, David (Entropy of functions of finite-state Markov chains) 124; (Countable Markov process with only instantaneous states) 127.
- Bladel, Jean van (Normal modes methods for boundary-excited wave guides) 415.
- Blessing, A. H. s. A. J. Hanawalt 202.
- Blin-Stoyle, R. J. and V. Gupta (Mesonic "exchange" effects in beta-decay) 440.
- Bloch, Claude et Cyrano de Dominicis (Potentiel de Gibbs) 205.
- Bloom, Martin H. and Adrian Pallone (Shroud tests of pressure) 398.
- Blount, E. I. (Ultrasonic attenuation by electrons in metals) 233.
- Blum, J. R. and M. Rosenblatt (Infinitely divisible distributions) 129.
- Boas jr., R. P. and A. C. Schaeffer (Variational methods in entire functions) 53.
- Boccioni, Domenico (Condizioni di distributività) 260; (Condizioni di mutua distributività) 261.
- Bochner, Salomon (Fourier integrals) 318.
- Bock, R. Darrell (Test of significance for method of paired comparisons) 135.
- Boer, J. H. de (Multiplicity theory for specialized fields) 24.
- Bogdanov, Ju. S. (Yu. S.) (Tests for the absence of closed trajectories) 75.
- Bogoljubov (Bogoliubov), N. N. (Superconductivity in the theory of nuclear matter) 222.
- Bohm, Joachim und Will Kleber (Enantiomorphie) 450.
- Boigelot, A. et H. G. Garnir (Noyaux de Green) 312.
- Bol, Gerrit s. S. P. Finikow 367.
- Boley, Bruno A. (Timoshenko-beam impact problems) 193.
- — — and Morton B. Friedman (Viscous flow around the leading edge of a flat plate) 392.
- Bollini, G. C. (Irreducibility constraints and field equations for elementary particles. II.) 221.
- Bolsterli, M. (Finite-range delta-function potential) 221.
- Bopp, Fritz (Konforminvarianz der Elektrodynamik) 413.
- Borovkov, A. A. (Deviations of the maximum of sums of random variables) 350.
- Bors, C. (Coordonnées trieycliques) 362.
- Borsuk, K. (Quasi-homéomorphie) 171.
- Borwein, D. (Multiplication of  $(C, -\mu)$ -summable series) 49.
- Bose, R. C. and S. S. Shrikhande (Falsity of Euler's conjecture) 9.
- Boseck, Helmut (Theorie der Weierstraßpunkte) 27.
- Bottema, O. (Verschiedenes) 148.
- Boulègue, Georges, Paul Chanson, René Combe, Marc Feix et Pierre Strasman (Perte d'énergie des particules chargées dans un plasma) 449.
- Bouligand, G. (Problèmes non linéaires) 89.
- Bourbaki, N. (Nombres réels en topologie générale) 371.
- Bourion, Georges (Convergence des séries de Fourier) 58.
- Bourne, D. E., D. R. Davies and S. Wardle (Heat transfer through the axisymmetrical laminar boundary layer) 393.
- Bouwkamp, C. J. (Electrostatic capacity) 208.
- Box, G. E. P. and Mervin E. Muller (Generation of random normal deviates) 137.
- Bozman, W. R. and R. E. Trees (Matrices of spin-orbit interaction) 445.
- Bradis, V. M. et A. F. Sicirov (Triangles de Héron) 266.
- Bradley, James V. (Counterbalancing of immediate sequential effects in a Latin square design) 134.
- Braginskij (Braginskii), S. I. (Transport phenomena in plasma) 448.
- Brainerd, B. and J. Lambek (Ring of quotients of a Boolean ring) 261.
- Brandt, Andrzej and Józef Ignaczak (Form of a cantilever beam) 185.
- Bredichin, B. M. (Freie Zahlenhalbgruppen mit Potenzdichten) 268.
- Breit, G. (Velocity-dependent features of a static nucleon-nucleon potential) 220.
- Breitenhuber, L. (Abstrahlung kreiszylindrischer Hohlleiter) 415.
- Brenig, W. und R. Haag (Quantentheorie der Stoßprozesse) 432.
- Brenner, J. L. s. F. R. Gantmacher 10.
- Breuer, K. H. s. F. H. Effertz 297.
- Brin, A., J.-L. Delcroix et J. Salmon (Refroidissement d'un gaz de particules chargées) 447.
- Broecker, E. (Vermischung von



- Flüssigkeits- oder Gasströmen) 411.
- Bronstein, I. N. und K. A. Semendjajew (Taschenbuch der Mathematik für Ingenieure) 1.
- Bross, Helmut (Elektrische Leitfähigkeit von Kupfer) 233.
- Brout, R. (Correlation energy of a high-density gas) 228.
- Brown, G. E. and J. S. Leviner (Dispersion theory of the direct photoeffect) 224.
- Bruijn, N. G. de (Polya's fundamental theorem) 9.
- Brun, Viggo ("Carpenter's curve") 114.
- Bruwier, L. (Équation différentielle linéaire) 303.
- Buchdahl, H. A. (Conformal transformations of spinors and spinor equations) 217.
- Buckens, F. (Eigenwertscharen) 303.
- Budak, B. M. und A. D. Gorbunov (Differenzenmethode zur Lösung des Cauchyschen Problems für  $y' = f(x, y)$ ) 110; (Konvergenz einiger Differenzenprozesse) 111; (Goursat's non-linear problem) 308; (Non-linear boundary problem) 308.
- — — s. A. D. Gorbunov 308.
- Bühlmann, Hans (Schätzfunktion der Übersterblichkeit) 139.
- Bukovics, E. (Anfangswertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen) 110.
- Burge, W. H. (Sorting, trees, and measures of order) 343.
- Burgess, D. C. J. (Intervals in partially ordered groups) 256.
- Burkill, H. (Mean values) 70.
- Bushaw, D. W. s. F. R. Gantmacher 10.
- Busulini, Bruno (Relazione triangolare in un  $l$ -gruppo) 256.
- Bycroft, G. N. (Frequencies of a flexible circular plate) 192.
- Byerly, William Elwood (Fourier's series and spherical, cylindrical, and ellipsoidal harmonics) 285.
- Bylov, B. F. (Größter charakteristischer Exponent eines Systems linearer Differentialgleichungen) 72.
- Cabannes, Henri (Conductivité thermique d'un courant ionique) 227.
- Campagne, C. (Probabilité de „ruine“) 140.
- Capellen, W. Meyer zur s. Meyer zur Capellen, W. 182.
- Caprioli, Luigi (Attenuazione nelle guide circolari con pareti assorbenti) 210.
- Carafoli, E. et M. Ionescu (Théorie unitaire de l'aile supersonique) 400; (Écoulements coniques autour des ailes) 400.
- Čarin, V. S. (Gruppen) 15.
- Carleson, Lennart (Interpolation problem) 65.
- Carlitz, L. (Congruences involving binomial coefficients) 28; (Paper of Dieudonné) 28; (Product of two ultraspherical polynomials) 61; (Bernoulli and Euler numbers) 287.
- Carneiro Affonsoda Costa, Newton s. Costa, Newton Carneiro Affonsoda 241, 245.
- Carrier, G. F. (Mixing of ground water and sea water) 413.
- Carstou, John (Minimum-time flight path of a jet aircraft) 408.
- Casesnoves, Dario Maravall s. Maravall Casesnoves, Dario 138.
- Caspar, Max s. Johannes Kepler 3.
- Cercvadze, B. N., G. B. Čikoidze und T. G. Gačėiladze (Mathematische Theorie der Wortbildung) 357.
- Čerkasov, I. D. (Division's method in Markov processes) 349.
- Cesari, L. (Variation, multiplicity and semicontinuity) 44.
- — — and Ch. J. Neugebauer (Coincidence of Gööze) 44.
- Cetlin, M. L. (Imprimitive Schemata) 339.
- Chadan, Khosrow s. John Potter 439.
- Chadwick, P. (Expansion of a cavity in metals) 387.
- Chajkin, S. É. s. A. A. Andronov 178.
- Chakrabarti, S. C. (Identities on higher differences) 7.
- Chambers, L. G. (Hund gravitational equations) 425.
- Chandrasekhar, S. (Oscillations of a viscous liquid globe) 204.
- Chang, C. C. (Axiom of Łukasiewicz) 244.
- Chanson, Paul s. Georges Boulogne 449.
- Chapaev, M. M. (Entwicklung von hypergeometrischen Funktionen in Reihen nach Besselschen Funktionen) 62.
- Chattarji, P. P. (Torsion of epitrochoidal sections) 186; (Torsion of a circular cylinder) 381.
- Chen, J. M., T. H. Ho, D. C. Sen and H. Y. Tzu (Angular distribution of the decay products) 221.
- Kien-kwong (Minkowski's inequality) 65.
- Shu-tao (Designing suspension bridges) 186; (Open-webbed arches) 186.
- Cheng, David K. (Analysis of linear systems) 380.
- Chernoff, H. and J. F. Daly (Distribution of shadows) 348.
- — — and H. Teicher (Central limit theorem) 351.
- Chew, G. F. and F. E. Low (Unstable particles as targets) 433.
- Chisini, Oscar (Singolarità delle curve algebriche) 364.
- Chochlov (Khokhlov), Ju. K. (Ju. K.) (Moment of inertia of non-spherical nuclei) 222.
- Choksi, J. R. (Inverse limits of measure spaces) 40; (Compact contents) 41.
- Chopra, K. P. (Induction drag) 419.
- Chovanskij, G. S. (Konstruktion von Nomogrammen) 338.
- Chu, Pao-chen (Steady perturbations of the westerlies) 239.
- Chuard, Jules (Rendement des obligations remboursables) 358.
- Chuck, Wong. s. W. M. MacDonald 447.
- Cicco, John De s. De Cicco, John 262.
- Čikoidze, G. B. s. B. N. Cercvadze 357.
- Cinquini, Silvio (Estremanti di una classe di problemi variazionali) 314.
- Ciulli, Sorin et Jan Fischer (Opérateurs angulaires) 433.
- Clark jr., Edward L. and Donald Earl Ordway (Jetflap compressor blades) 406.
- Clarke, A. Bruce (Cardinal algebras) 259.
- Clemans, Kermit G. (Confidence limits in the case of the geometric distribution) 137.
- Clement, Paul A. (Concurrency of perpendiculars) 149.



- Clifford, A. H. (Totally ordered commutative semigroups) 14.
- Climescu, Al. (Limite d'une suite à termes réels) 47.
- Cobb, S. M. (Powers of matrices) 12.
- Coester, F. and H. Kümmel (Scattering of nucleons by nuclei) 222.
- Cohen, Paul J. (Factorization in group algebras) 102.
- Collatz, Lothar (Approximation in partial differential equations) 112.
- Collins, W. D. (Axisymmetric boundary value problems. I.) 413.
- Colombo, Giuseppe (Problema del „lacet") 179; (Teoria del regolatore di Bouasse e Sarda) 180.
- Colonnetti, Gustavo (Relaxation et écouissage) 387.
- Combe, René s. Georges Boullé 449.
- Connor, W. S. (Triangular association scheme) 356.
- Conrad, Paul (Methods of ordering a vector space) 256; (Ordered vector space) 257.
- Conway, H. D. (Way's large-deflection solution) 189.
- Cook, A. H. (Calibration of gravity meters) 237.
- Coolidge, Julian Lowell (Algebraic plane curves) 364.
- Coppel, W. A. (Equation of a synchronous motor) 180.
- Corinaldesi, E. (Particles and symmetries) 443.
- Corrádi, Keresztély (Primzahl-sätze arithmetischer Progressionen) 31.
- Costa, Newton Carneiro Afonsoda (Begriff des Widerspruchs) 241; (Philosophie der Mathematik) 241; (Brouwer-Heytingsche Logik) 245.
- Court, Nathan Altshiller (Cubique gauche) 361.
- Cox, C. P. (Experiments with two treatments per experimental unit) 134.
- D. R. (Model for binary regression) 137.
- Coz, Marcel (Pyramides et cônes convexes asymptotiques) 371.
- Craig, Homer V. (Primary extensors) 156.
- W. and R. L. Vaught (Finite axiomatizability) 246.
- Crede, C. E. (Effect of product of inertia coupling) 192.
- Croisot, Robert s. Léonce Lesieur 263.
- Crupi, Giovanni (Velocità di gruppo nella magneto-idrodinamica) 213; (Velocità di gruppo nei conduttori in moto) 422.
- Čulík, Karel (Lexikographische Summe der teilweise geordneten Mengen) 38.
- Čunichin (Chunikhin), S. A. (Method of obtaining subgroups) 254.
- Curtis, Charles W. (Quasi-Frobenius rings and Galois theory) 21.
- Curzio, Mario (Sottogruppi di composizione dei gruppi finiti) 15; (N-gruppi risolubili) 254.
- Čuškin, P. I. (Umströmung eines Profils in Unterschallströmung) 195.
- Cypkin, Ja. Z. (Kennlinie eines nichtlinearen Gliedes und seiner Beschreibungsfunktion) 122.
- Čžou Guan-Čžao (Chou Guan-Chao) (Gell-Mann theory) 443.
- Czwalina, Arthur (Geometrie des Ptolemaeus von Alexandria) 151.
- Dabrowski, Ryszard** (Torsion of thin-walled bridge) 187.
- Dahlquist, Germund (Numerical integration of ordinary differential equations) 334.
- Dalgarno, A. (Perturbation theory of atomic systems) 444.
- Daly, J. F. s. H. Chernoff 348.
- Danicic, I. (Theorem of Heilbronn) 33.
- Daniels, H. E. and M. G. Kendall (Miss Harley's theorem) 137.
- Darwin, Charles (Gravity field of a particle) 426.
- J. H. (Corrections to chi-squared distribution) 353.
- Das, Arabindo (Einfluß von Grenzsichtzäunen) 407.
- Daus, Paul H. and William M. Whyburn (Mathematical analysis) 357.
- Davidson, W. (Red shift-magnitude relation) 236.
- Davies, D. R. (Eddy viscosity) 197.
- — — s. D. E. Bourne 393.
- Davis, Martin (Functionals of finite type) 248.
- — — Hilary Putnam (Hilbert's tenth problem) 248.
- Dawson, David F. (Continued fractions) 50.
- John and Carl Oberman (Oscillations of a finite cold plasma) 449.
- De Cicco, John (Theorems concerning commutative rings) 262; (Quadratic extension of a field  $K$ ) 262.
- Deaux, R. et M. Delcourte
- $$\left( (m, n) = \int_0^{\infty} \frac{\sin^m x}{x^n} dx \right)$$
- 43.
- Dedò, Modesto (Matematiche elementari. 1, 2) 147.
- Delcourte, M. s. R. Deaux 43.
- Delcroix, J.-L. s. A. Brin 447.
- Dell'Antonio, G. F. and P. Gulmanelli (Asymptotic conditions in quantum field theories) 437.
- Demaria, Davide Carlo (Sistemi  $\infty^2$  di rette in  $S_4$ ) 368.
- Demkov, Ju. N. (Iu. N.) and F. P. Šepelenko (Shepelenko) (Hulthén and Kohn methods in collision theory) 218.
- Derjagin (Deriagin), B. V. and S. P. Bakanov (Motion of small aerosol particles) 446.
- Desloge, Edward A., Steven W. Matthysse and Henry Margenau (Conductivity of plasmas to microwaves) 227.
- Dessler, A. J. (First and second sound in liquid helium) 204.
- Díaz, Plácido Jordán (Jacobi'sche Determinante zweier Funktionen) 45; (Charakteristiken eines hyperbolischen Systems) 83.
- Dieter, Ulrich (Kleinsche Funktionen  $\log \sigma_{g,h}(\omega_1, \omega_2)$ ) 26.
- Dinculeanu, Nicolae (Espaces d'Orlicz de champs de vecteurs) 95; (Espaces d'Orlicz. III.) 323.
- Dinghas, Alexander (Verzerrungsschranken bei schlichten Abbildungen) 295; (Monotoniesätze der schlichten Funktionen) 295.
- Dionisio, J. J. (Measure products) 41.
- Dirac, P. A. M. (Fixation of coordinates in Hamiltonian theory of gravitation) 424.
- Dixmier, Jacques (Unitary representations of nilpotent Lie groups) 103; (Représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents. II.) 103.

- Dmitrieva, M. I. (Konvektion im kegelförmigen Diffusor) 194.
- Dol'berg, M. D. (Development of a positive kernel into a bilinear series) 90.
- Dominicis, Cyrano de s. Claude Bloch 205.
- Dorfman, A. G. (Verbiegungen für gewisse Flächenklassen) 366.
- Doyle, Thomas C. (Invariants of stress or deformation tensors) 183.
- Drăgan, Corneliu (Tenseurs de position et tenseurs-vitesse) 157.
- Drăgăilă, Pavel (Transport parallèle distancé) 160.
- Dragomir, Achim (Coordonnées projectives) 361.
- Drahoš, István, László Hornyik and Miklós Hosszú (Tool geometrical problem) 152.
- Drenckhahn, Friedrich (herausgegeben von) (Mathematischer Unterricht für die sechs- bis fünfzehnjährige Jugend) 1.
- Dricot, G. et P. Ledoux (Oscillations d'une masse fluide) 404.
- Droz-Vincent, Philippe (Quantification en théorie unitaire pentadimensionnelle) 429.
- Drozdov, B. M. and M. G. Rappoport (Kodierung der Operationen des ÉV 80-3) 343.
- Dryden, H. L. (Transition) 199.
- Dubikajtis, L. (Système d'axiomes communs à quelques géométries) 147.
- Duffy, J. (Stress-strain relation for close-packed array of elastic spheres) 193.
- Dun, Min-Dé (Stability of elastic plates in a supersonic stream) 409.
- Duncan, Acheson J. (Design and operation of a double-limit variables sampling plan) 134.
- R. L. (Topology for sequences of integers. I.) 30.
- Durstine, R. M. and D. H. Shaffer (Bounds for solutions to linear differential equations) 313.
- Duscheck, A. (Höhere Mathematik. 2.) 36.
- Dvoretzky, A. (Problem of Nelder and Hammersley) 128.
- Dwinger, Ph. (Direct sums and direct products) 19; (Completeness of the quotient algebras. II.) 20.
- Dyson, F. J. (Integral representations of causal commutators) 434; (Low's scattering equation) 441.
- Dzjadyk (Dziadyk), V. K. (Approximation von Funktionen durch Polynome) 279; (Jackson's theorem) 280.
- Eckart, Carl (Surface wake of a submerged sphere) 389.
- Eckstein, S. G. and R. H. Pratt (Radiative muon decay) 442.
- Eden, R. J. and V. J. Emery (Binding energies of atomic nuclei. I.) 223.
- Edge, W. L. (Geometry of an orthogonal group) 359; (Partitioning of an orthogonal group) 360.
- Edwards, D. A. (Singular integrals) 316.
- Effertz, F. H. und K. H. Breuer (Algorithmus und Klassifikationsprinzip) 297.
- Efimov, A. V. (Approximation von Funktionen) 280.
- Egerváry, E. and P. Turán (Interpolation. V.) 52.
- Ehlers, F. Edward (Method of characteristics for isoenergetic supersonic flows) 401.
- — — and E. M. Shoemaker (Forces exerted on a rigid wing by a shock wave) 201.
- — — and Torstein Strand (Flow of a supersonic jet) 201.
- Ehlich, Hartmut (Primzahl-satz für binäre quadratische Formen) 33.
- Ehrenreich, H. (Transport of electrons in intrinsic InSb) 234.
- Ehrlich, Louis W. (Monte Carlo solutions of boundary value problems) 335.
- Eijk, C. J. van und J. Sandee (Optimum economic policy) 358.
- Ekenstam, Adolf af (Diophantine equation  $Ax^n - By^n = C$ ) 29.
- Elgot, Calvin C. and Jesse B. Wright (Quantifier elimination) 340.
- Eliopoulos, H. A. (Subspaces of a generalized metric space) 370.
- Ellis, H. W. (Limits of Riemann sums) 43.
- Emel'janov, V. S. (verantwortlicher Redakteur) (Enzyklopädie „Atomenergie“) 379.
- Emery, V. J. (Nuclear many-body problem) 221.
- — — s. R. J. Eden 223.
- Emmons, Howard W. (Combustion — an aeronautical science) 409.
- Engelmann, Folker (Theorem von Bloch) 215.
- Englefield, M. J. (Oriented flat submanifolds) 359.
- Epstein, Bernard (Kernel-function and conformal invariants) 68.
- Saul T. (Harmonic oscillator wave packets) 215.
- Erdős, Jenő (Remark on "functional equations" by S. Kurepa) 329.
- P. (Asymptotic formulas for some arithmetic functions) 34; (Approximation with nodes) 52.
- — — and G. G. Lorentz (Probability that  $n$  and  $g(n)$  are relatively prime) 31.
- — — and R. Rado (Partial well-ordering of sets of vectors) 38.
- Ericson, Torleif (Level density of degenerate Fermi systems) 450.
- Erismann, Th. (Mechanische Integrieranlagen) 115; (Integrieranlagen bei Regelproblemen) 121.
- Erlandsson, Gunnar (Centrifugal distortion in asymmetric top rotational spectra) 344.
- Ermakov, S. M. (Kubaturformeln) 336.
- Escande, Léopold (Surpression à la base d'une chambre d'équilibre) 411; (Aquaducs des bassins de Radoub) 411.
- — — et Henri Godines (Étranglement rationnel pour chambres d'équilibre déversantes) 411.
- Espagnat, B. d' (Weak interactions of elementary particles) 443; (Baryonic fields and strong interactions) 444.
- — — et Jacques Prentki (Interactions faibles) 443.
- Evanusa, S. s. F. R. Gantmacher 10.
- Ewald, H. (Öffnungsfehlerfreie Kugelkondensatoren) 418.
- Faak, Margot s. Kurt-R. Biermann 4.
- Faddeev, L. D. (Dispersion



- relations) 433; (*S*-matrix and potential for Schroedinger operator) 433.
- Fadini, Angelo (Composizione delle algebre) 262.
- Fage, M. K. (Operator-analytical functions) 46; (Integral representations of analytical operator functions) 46.
- Fajn (Fain), V. M. (Radiation emitted by molecules) 446.
- Farahat, H. K. (Schur functions) 16.
- Farber, Erich A. s. John Kronsbein 429.
- Favre, Henry (Influence des réflexions intérieures sur la marche d'un rayon lumineux) 416.
- Fehlberg, Erwin (Fehlverkleinerung beim Runge-Kutta-Verfahren) 110.
- Feix, Marc s. Georges Boulègue 449.
- Fel'zenbaum (Felsenbaum), A. I. (Ice drift in the Central Arctic basin) 238; (Theory of steady currents in a shallow sea) 238; (Ice fields in the Arctic basin) 239.
- Fenna, D. (Simultaneous diophantine approximation to series) 36.
- Fer, F. (Stabilité et isochronisme dans les cyclotrons) 211.
- Ferrari, E. and G. Jona-Lasinio (Causal propagation function of a Dirac field) 434.
- Fettis, Henry E. (Higher modes of vibration) 109.
- Fichtengol'c (Fikhtengol'ts), I. G. (Einstein's gravitation theory) 425.
- Fickett, W. and W. W. Wood (Detonation-product equation of state) 203.
- Fierz, M. (Anzahl der mit Hilfe von 21 Diracschen Spinoren zu bildenden Invarianten) 156.
- Fil'čakov, P. F. (Mathematisches Rechenpraktikum) 330.
- Filippova, L. A. (Instationäre Strömung einer zähen Flüssigkeit in einem schmalen Spalt) 197.
- Filonenko-Borodič, M. M. (Elastizitätstheorie) 380.
- Findlay, G. D. and J. Lambek (Ring of quotients. I, II.) 261.
- Finikow, S. P. (Theorie der Kongruenzen) 367.
- Finkelstein, David and Charles W. Misner (Conservation laws) 219.
- Finnie, Iain (Creep instability of thin-walled tubes) 191.
- Finzi, Leo (Prinziple of Haar and von Karman) 192.
- Firey, Wm. J. (Theorem of H. Knothe) 167.
- Fischer, G. s. W. Schnell 385.
- Jan s. Sorin Ciulli 433.
- K. (Freie Energie von Kristallen) 231; (Fehlstellen in kubischen Kristallgittern) 450.
- Fisher, Michael E. and A. T. Fuller (Stabilization of matrices) 331.
- Fladt, Kuno (Parallelismus von Levi Cività) 147.
- Fleischer, Isidore (Maximality and ultracompleteness in normed modules) 25.
- Flint, H. T. s. R. H. Atkin 379.
- Fock, V. (Space time and gravitation) 423.
- Fog, David (Remark on two series) 50.
- Foguel, S. R. (Biorthogonal systems in Banach spaces) 322.
- Foiaş, Ciprian (Strongly continuous semigroups of spectral operators) 99; (Décomposition spectrale en opérateurs propres) 323.
- — s. Béla Sz.-Nagy 99.
- Fok, Vladimir Aleksandrovič 6.
- Fort jr., M. K. ( $\varepsilon$ -mappings of a disc onto a torus) 171.
- Forte, Bruno (Proprietà ricorrenti del moto non stazionario di un fluido) 104.
- Foster, D. M. E. (Quadratic polynomials in  $n$  variables) 33.
- Fourès-Bruhat, Yvonne (Fluides chargés de conductivité infinie) 212; (Conditions de continuité et équations de choc) 426.
- Fowler, T. K. (Quasi-elastic scattering of pions by nuclei) 224.
- Fox, Charles (Applications of Mellin transforms) 128.
- Frame, J. S. (Kármánsche Theorie der Rohrbiegung) 383.
- Franckx, Edouard (Problème des deux fréquences) 351.
- Frankl, F. I. (Eindeutigkeitsatz für die Lösung einer Randwertaufgabe) 85.
- Franklin, J. N. (Equidistribution of pseudo-random numbers) 128.
- Frantz, Lee M. (Field theory of deuteron exchange currents) 222.
- Frenkiel, J. and S. Zacks (Wind produced energy) 240.
- Frenkin, A. R. s. A. A. Logunov 437.
- Freud, G. (Interpolationsverfahren von P. Turán) 52; (Thomsonsches Prinzip) 413.
- Freudenthal, H. (Methods of initiation into geometry) 2; (Entwicklung des mathematischen Formalismus) 6; (Kombinatorisches Problem biochemischer Herkunft) 8. (Operatoren) 329.
- Frey, Tamás (Functions of one variable) 37.
- Friedman, Harold L. (Mayer's ionic solution theory) 227.
- Morris D. s. L. N. Korolev 123.
- — s. A. A. Markov 116.
- Morton B. s. Bruno A. Boley 392.
- Friedrich, J. s. H. Schirmer 447.
- Fritzsche, Gottfried (Systemtheorie elektrischer Netzwerke. I, II.) 208.
- Froese, Charlotte (Atomic wave functions. II.) 444.
- Frum-Ketkov, R. L. (Homologieigenschaften der Urbilder von Punkten) 374.
- Fujimoto, Takaaki s. Yoshikatsu Watanabe 132.
- Fujiwara, Izuru s. Toshihiko Tsuneto 218.
- Fuller, A. T. s. Michael E. Fisher 331.
- Fulton, G. E. s. T. V. Narayana 8.
- J. and I. N. Sneddon (Dynamical stresses in a thick plate) 190.
- Fung, Kang (Mellin transforms. I.) 98.
- Fürst, Dario (Teoria dei giuochi) 129.
- Furui, Shinya s. Akira Kanazawa 441.
- Gačevićladze, T. G. s. B. N. Cerevadze 357.
- Galasiewicz, Zygmunt (Boson field method) 450.
- Gallarati, Dionisio (Varietà di Fano) 363.
- Ganapathy Iyer, V. (Permutable integral functions) 293.



- Gantmacher, F. R. (Matrizenrechnung. 2.) 9; (Theory of matrices) 10.
- Garnir, H. G. (Problèmes aux limites de la physique mathématique) 311.
- — — s. A. Boigelot 312.
- Garrido, L. M. and A. Galindo Tixaire (High energy potential scattering) 445.
- Gasiorowicz, S. and H. P. Noyes (Dispersion relation) 438.
- Gask, H. and J.-E. Rooss (Model from potential theory) 89.
- Geddes, A. (Coefficient fields) 264.
- Geffroy, Jean (Stabilité presque certaine des valeurs extrêmes) 352.
- Geissler, D., A. Papapetrou und H. Treder (Gravitationsstrahlung eines zeitweilig nichtstationären Systems) 427.
- Gelbaum, Bernard R. (Convergence in Banach spaces) 94; (Banach spaces and bases) 94; (Symmetric zero-sum  $n$ -person games) 130.
- Gelfond, A. O., A. F. Leont'ev und B. V. Šabat (A. I. Markuševič) 6.
- Gel'man, I. V. (Non-linear operator) 106.
- Gemignani, Giuseppe (Dipendenza algebrica su un anello) 261.
- Gerasimova, N. M. (Kinetic equations for high-energy nuclear cascade processes) 226.
- Gerber, Robert (Mouvement avec surface libre d'un liquide pesant) 205.
- Sébastien s. Hubert Jardin 411.
- Germain, Paul (Ondes de choc dans un fluide conducteur) 406.
- Gerretsen, J. C. H. (Tangente und Flächeninhalt) 36.
- Gerstenhaber, Murray (Nilalgebras. I.) 262.
- Gesse, A. G. (Elektrische Resonanzschaltung) 116.
- Geymonat, Ludovico s. Alberto Pasquini 243.
- Gheorghiev, Gh. (Décomposition d'un complexe de droites) 366.
- Gheorghită, Șt. I. (Flows in porous media) 412.
- Gheorghitza, Șt. I. (Motion of the artesian waters) 412.
- Ghermănescu, M. (Équations fonctionnelles linéaires) 329.
- Gillies, Donald B. (Non-zero-sum games) 131.
- Gilson, J. G. (Vacuum polarization) 219.
- Girshick, M. A. (Optimum property of sequential probability ratio test) 355.
- Gloden, A. (Congruence  $X^4 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ ) 266.
- Gnedenko, B. V. (Aufgaben der Geschichte der Mathematik) 2; (Sowjetische Arbeiten über Informationstheorie) 124; (Wilcoxon test) 353.
- Godeaux, Lucien (Involutions cycliques privées de points unis) 154; (Surfaces de genres nuls) 154, 155; (Superficie algebriche di genere zero) 155; (Congruenze stratificabili) 368.
- Godines, Henri s. Léopold Escande 411.
- Godwin, H. J. (Fields of small discriminant with a given subfield) 26.
- — — and P. A. Samet (Table of real cubic fields) 26.
- Goering, Herbert s. A. M. Jaglom 346.
- Goertz, Adalbert (Diffuse Reflexion und Transmission) 226.
- Goglia, M. J. s. F. M. White jr. 393.
- Golab, S. (Metrisierbarkeit affin-zusammenhängender Räume) 370.
- Gold, Wallace s. Larry Spruch 224.
- Goldberg, K. s. R. E. Nettleton 175.
- Golitsyn (Golitsyn), G. S. (Unidimensional motion in magnetohydrodynamics) 212.
- Golomb, Michael (Approximation by functions of fewer variables) 107; (Nonautonomous differential systems) 305.
- Golubew, W. A. (Abzählung von „Vierlingen“ und „Fünflingen“) 31; (Primzahlen der Form  $x^2 + 3$ ) 267.
- Gombás, P. und D. Kisdi (Nukleonengase bei beliebigen Temperaturen) 222.
- Gomory, Ralph E. (Integer solutions to linear programs) 358.
- Gonçalves, J. Vicente (Deux propositions de la théorie des séries réelles) 47.
- González Asenjo, Florencio (Théorie der Sozietäten) 242.
- Gorbunov, A. D. und B. M. Budak (Methode der Geraden zur Lösung einer nicht-linearen Randwertaufgabe) 308.
- — — s. B. M. Budak 110, 111, 308.
- Görtler, H. und H. Witting (Sekundäre Instabilität der laminaren Grenzschichten) 198.
- Gottschalk, W. H. (Minimal sets) 174.
- Gower, J. C. s. E. C. R. Reeve 141.
- Grätzer, G. and E. T. Schmidt (Ideals and congruence relations in lattices) 20.
- Green, H. G. and L. E. Prior (Projection of a four-point system of conics) 151.
- jr., L. and Kenneth L. Nall (Experiments on porous wall cooling) 398.
- — — s. W. Nachbar 409.
- M. S. (Non-equilibrium pair distribution function) 446.
- — — s. R. E. Nettleton 175.
- Greenberg, B. G. s. A. E. Sarhan 356.
- Greenspan, Donald (Nine-point analogues of Laplace's equation) 112; ("Best" 9-point difference equation analogue of Laplace's equation) 112; ("Best" five-point difference analogue of Laplace's equation) 113; (Boundary value problems associated with Poisson's equation) 113; ("Best" nine-point Laplace difference analogues) 113; (Numerical solution of Dirichlet problems) 113; (Numerical analysis and Dirichlet problem) 114.
- Gregory, Robert T. (Lanczos' method for finding eigenvalues of arbitrary matrices) 108.
- Griesmer, James H. (Extreme games with three values) 129.
- Griffin Harold D. (Graphic computation of tau) 137.
- J. J. s. Eugene P. Wigner 379.
- Grönlund, M. and C. O. Lund (Electronic computer for statistical analysis of radio propagation data) 338.
- Groot, J. de and H. de Vries (Metritization of a set) 171.
- Grummich, Friedrich (Zahlentheorie der Polynome) 271.

- Gu, Čao-chao s. G. I. Kručko-  
vič 162.
- Guañ Din-chua (Kuan Ting-  
hua (Diffraction of surface  
sound waves) 410.
- Guan-Čzao, Čžou s. Čžou Guan-  
Čzao 443.
- Guderley, K. G. (Nonlinear  
eigenvalue problems for ma-  
trices) 333.
- Guénot, Robert (Définition des  
interactions dans l'expéri-  
mentation) 354.
- Guérindon, Jean (Propriétés  
d'irréductibilité dans les mo-  
dules) 263.
- Guinand, A. P. (Harmonic ana-  
lysis of sequences) 301.
- Gulmanelli, P. and E. Mon-  
taldi (Wightman functions  
and Jacobi identity) 219;  
(Gravitational forces and  
quantum field theory) 429.
- s. G. F. Dell'Antonio 437.
- Gumbel, E. J. (*m*th range) 350.
- Günther, Paul (Spezielle Pro-  
bleme der linearen partiellen  
Differentialgleichungen) 82.
- Gupta, D. P. (Cesàro summa-  
bility of ultraspherical series.  
I, II.) 58.
- V. s. R. J. Blin-Stoyle 440.
- Gurk, H. M. (Five-person,  
constant-sum, extreme gam-  
es) 129.
- — and J. R. Isbell  
(Simple solutions) 131.
- Güttinger, W. (Non-local struc-  
ture of quantized field theo-  
ries) 438.
- Guttman, Irwin (Problem in  
estimation) 137.
- Guy, Roland (Théorème de  
F. Riesz) 98.
- Gyires, B. (Determinanten) 10.
- Haag, R.** (Quantum field theo-  
ries) 436.
- s. W. Brenig 432.
- Hack, H. R. B. (Distribution  
of the *F*-ratio in samples)  
137.
- Haeffliger, André (Structures  
feuilletées) 173.
- Hahn, Wolfgang (Geometrische  
Differenzgleichungen) 80.
- Haight, Frank A. (Queueing  
with balking) 347.
- Haimovici, M. (Prolongement  
des équations du II-e ordre.  
III.) 308.
- Halbwachs, Francis (Goutte  
de Bohm et Vigier) 214.
- Halperin, Israel s. Ichiro Ame-  
miya 145.
- Hamburger, L. (Vibrations des  
bielles) 388.
- Hammer, Preston C. (Mid-  
point method of numerical  
integration) 114.
- Hämmerlin, Günther (Numeri-  
sche Integration periodi-  
scher Funktionen) 336.
- Hanawalt, A. J., A. H. Bles-  
sing and C. M. Schmidt  
(Thermal analysis of stag-  
nation regions) 202.
- Hanner, Olof (Coin distribu-  
tion) 10; (Mean play of sums  
of positional games) 353.
- Hansson, Hans (Information  
theory problems) 124.
- Harary, Frank (Group of com-  
position of two graphs) 378.
- Harish-Chandra (Automorphic  
forms on a semisimple Lie  
group) 104.
- Harris, Colin (Correlation of  
sedimentation-rates) 412.
- Harrison, E. R. (Epicyclic or-  
bits of charged particles)  
210.
- Hartman, Philip (Unrestricted  
*n*-parameter families) 45.
- — and Richard Sacksteder  
(Maximum principles for non-  
hyperbolic partial differen-  
tial operators) 83.
- S. and J. Mikusiński (Maß-  
theorie und Lebesguesches  
Integral) 273.
- Harvey, T. J. (Natural forcing  
functions) 181.
- Haselgrove, C. B. (Conjecture  
of Pólya) 271.
- Hashiguchi, Masao (Parallel  
displacements in Finsler  
spaces) 370.
- Hassan, H. A. (Heat transfer  
to laminar boundary layers)  
392.
- Håstad, Matts (Uniform ap-  
proximation) 53.
- Hauser, Walter (Anisotropic  
obstacles in waveguides) 210;  
(Variational principles for  
guided electromagnetic wa-  
ves) 415.
- Havlíček, Karel (Geometrie der  
gekrümmten Räume) 162.
- Hecht, Josef (Systems of linear  
algebraic equations) 10.
- Heider, L. J. (Measures on Boo-  
lean algebras) 40.
- Heinrich, H. (Friedrich-Adolf  
Willers †) 7.
- Heinz, Erhard (Non-linear ellip-  
tic differential equations) 87;  
(Degree of mapping in *n*-  
dimensional space) 171.
- Heitler, W. s. E. Arnous 439.
- Hellgren, Gösta (Monopulse  
radar) 414.
- Henley, Ernest M. and Boris A.  
Jacobsohn (Time reversal in  
nuclear interactions) 223.
- Herdan, C. (Greenberg's index  
of linguistic diversity and  
Yule's characteristic) 138.
- Hersch, Joseph (Principe de  
Thomson) 193.
- Herszberg, J. (Result of Zariski)  
153.
- Hestenes, Magnus R. (Inver-  
sion of matrices) 330.
- Heuer, Gerald A. (Certain pro-  
bability problem) 353.
- Hewitt, Edwin (Algebras of  
Fourier-Stieltjes trans-  
formes) 100.
- — and Herbert S. Zucker-  
man (Convolution algebras)  
100.
- Heyting A. (Intuitionism) 250.
- Higgins, P. J. (Disjoint trans-  
versals of subsets) 8.
- Higgs, P. W. (Quadratic La-  
grangians and general re-  
lativity) 425.
- Hille, Einar (Application of  
Prüfer's method) 303.
- Hillion, Pierre (Représentation  
hydrodynamique de l'équa-  
tion de Dirac) 214; (Limite  
à la vitesse de la lumière)  
214.
- Hirschman jr., I. I. (Multiplier  
transformations) 92.
- Hitotumatu, Sin (Quasi-con-  
formal functions) 67.
- Hlavatý, Václav (Holonomy  
group. I.) 163.
- Ho, T. H. s. J. M. Chen 221.
- Hochschild G. (Relative homo-  
logical dimension) 266.
- — and G. D. Mostow (Re-  
presentations of Lie groups.  
II.) 18.
- Höcker, K. H. und K. Weiner  
(herausgegeben von) (Lexikon  
der Kern- und Reaktortechni-  
k. 1, 2) 224.
- Hofmann, Jos. E. (Dreiecks-  
geometrie in der komplexen  
Ebene) 148.
- O. (Astasiertes Pendel) 236.
- Rudolf (Spezielle Wärme-  
leitungsprobleme) 310.
- Hoh, Chen-chih (Szegő pro-  
blem) 295.
- Holland jr., Samuel S. (Neutron  
penetration in infinite media)  
225.
- Hollmann, Günther (Grundglei-  
chungen der dynamischen  
Meteorologie) 239.



- Holstein, T. (Ultrasonic absorption in metals) 233.
- Honda, M. (Interaction between shock waves and boundary layers) 401.
- Horadam, A. F. (Locus in [8]) 360.
- Hori, Shoichi (Wave functions of higher spin particles) 218.
- Hornýik, László s. István Drachos 152.
- Hosszú, Miklós s. István Drachos 152.
- Householder, Alston S. (Methods for inverting matrices) 331.
- Howell, John R. (Fitting the logistic curve) 356.
- Howells, I. D. s. G. K. Batchelor 397.
- Hronec, J. (Bewegung mit  $n$  Freiheitsgraden) 176.
- Hsiao, E. K. (Generators of a rule surface) 365.
- Hsieh, Yi-ping and Yao-sen Wang (Austausch coefficients over eastern Asia) 239.
- Hsiung, Chuan-Chih (Global theorems on hypersurfaces) 159.
- Hsu, C. S. (Simple subharmonics) 71.
- L. C. (Polynomials approximating a continuous function) 53.
- Hu, Ning (Proper field of a physical nucleon) 440.
- S.-T. (Multiplications in locally triangulable spaces) 372.
- Sze-Tsen (Fiberings with singularities) 378.
- Hughes, I. M. s. S. P. H. Mandel 140.
- Huhnt, D. (Flachwasserströmung auf geneigter Platte) 197.
- Huitson, A. (Critical values for the sum of two variances) 137.
- Hukuhara, Masuo (Théorèmes fondamentaux des équations différentielles ordinaires) 106.
- Huzino, Seiiti (Calculating eigenvalues by the gradient method) 108.
- Hyvärinen, L. (Fourier analysis) 337.
- Ibragimov, I. I. (Extremum problems in the class of trigonometric polynomials) 285.
- Ichijō, Yoshihiro (Plane curves in Riemann spaces) 369.
- s. Yoshikatsu Watanabe 93.
- Ignaczak, Józef s. Andrzej Brandt 185.
- Ikeda, Mineo (Tensorial concomitants of a non-symmetric tensor  $g_{\mu\nu}$ . II.) 428.
- Ikegami, Teruo (Note on integration) 275.
- Inaba, Mituo (Coordinated spaces) 322.
- Infeld, L. (Lagrangian with higher order derivatives) 421; (Lagrangian as a function only of co-ordinates) 422; (Variational principles in relativistic dynamics) 422.
- Innes, F. R. and C. W. Ufford (Microwave Zeeman effect) 445.
- Inopin, E. V. (Scattering of neutrons) 224.
- Inoue, Mamoru s. Yoshikatsu Watanabe 132.
- Ioanin, Gh. (Problèmes concernant les schémas à sélecteurs) 339.
- Iogansen, L. V. and M. S. Rabinovič (Rabinovich), M. S. (Coherent electron radiation in a synchrotron. I.) 211.
- Ionescu, M. s. F. Carafoli 400.
- Iosipescu, N. (Fotoelastizität. I.) 184.
- Irimiciuc, N. (Algèbre vectorielle spatiale) 158.
- et Izu Klepper (Méthode des coordonnées vectorielles cylindriques. I.) 157.
- Irwin, J. O. (Mean of a Poisson distribution) 137.
- Isbell, J. R. (Absolute games) 131.
- — s. H. M. Gurk 131.
- Iséki, Kiyoshi (Ideals in semiring) 21.
- Ishiguro, S. (Long-wave phenomena in the ocean. I.) 204.
- Ishii, Goro (Kolmogorov-Smirnov test in life test) 134; (Test of fit in life test) 137.
- Ito, D., S. Minami and H. Tanaka (Acausality test. II.) 434.
- Makoto (Non-Desargues projective plane) 142.
- Ivanenko, D. and H. Sokolik (Unified description of ordinary and isotopic space) 220.
- Iwamoto, Fumiaki and Masami Yamada (Cluster development method in the quantum mechanics. II.) 222.
- Iyer, V. Ganapathy s. Ganapathy Iyer, V. 293.
- Jablonskij (Yablonsky), S. V. (Limit logics) 245.
- Jäckel, H. (Gesteuerte Abkühl- und Anwärmvorgänge) 206.
- Jacobsohn, Boris A. s. Ernest M. Henley 223.
- Jaffard, P. (Groupes réticulés) 256.
- Jäger, B. (Turbomaschinen) 193.
- Jaglom, A. M. (Théorie der stationären Zufallsfunktionen) 346.
- Jakubovič (Jakubovich), V. A. (Dynamic stability of elastic systems) 184; (Non-linear differential equations) 307.
- James, I. M. (Multiplication on spheres. II.) 172; (Whitehead products and vector fields on spheres) 377.
- Ioan and Emery Thomas (Which Lie groups are homotopy-abelian?) 258.
- Jancel, Raymond et Théo Kahan (Distribution électronique dans un plasma lorentzien) 448.
- Janov, Ju. I. (Logische Schemata von Algorithmen) 340.
- Jardin, Hubert, Sébastien Gerber et Jean Nougaro (Phénomène de ressaut en canal horizontal) 411.
- Jardine, R. (Ranking methods and the measurement of attitudes) 140.
- Javlinskij, N. A. s. G. A. Michajlov 115.
- Jaworowski, J. W. (Correction) 172.
- Jehle, Herbert s. M. Jerrold Yos 228.
- Jenkins, James A. (Type problem) 298.
- Jha, P. (Characteristic equation of a rectilinear congruence) 161.
- Johnson, D. S. (Velocity and temperature fluctuation measurements) 398.
- Donovan A. (Paper folding) 1.
- N. L. (H. R. B. Hack's system of randomization for cross-classifications) 134.
- — s. J. W. Archbold 9.
- W. (Cold extrusion of rods) 187.
- Jona-Lasinio, G. s. E. Ferrari 434.
- Jones, Howard L. (Inadmissible samples and confidence limits) 134.



- Jones, R. Morley and Kenneth Mather (Interaction of genotype and environment in continuous variation. II.) 140.
- — — s. Kenneth Mather 140.
- Jost, Res (CTP-Theorem) 433.
- Jovanović, Božidar D. (Systèmes des forces dans espace) 176.
- Jung, H. (Wärmespannungen in Kontaktöfen) 190; (Gesteuerte Anheizvorgänge) 206.
- Junglauss, G. (Laminare Grenzschichten in der Magnetohydrodynamik) 404.
- Jurkat, W. B. (Semi-groups of positive matrices. I.) 326.
- Kabe, D. G.: (Applications of Meijer-G functions) 352.
- Kac, Mark (Partition function of a one-dimensional gas) 446.
- Kahalas, S. L. and H. C. Kashian (Approach of electrons to equilibrium) 447.
- Kahan, Théo s. Raymond Jancel 448.
- Kahane, J. P. et R. Salem (Infinité de distributions de Bernoulli) 318.
- Kahramaner, Suzan (Représentation presque-conforme) 299.
- Kakehashi, Tetsujiro (Schlicht functions. I.) 296.
- Kališ, Jiří (Turbulente Bewegung zwischen zwei parallelen Wänden) 197.
- Kalisch, G. K. (Generalized quota solutions of  $n$ -person games) 130.
- — — and E. D. Nering (Countably infinitely many person games) 130.
- Kalitzin, N. St. (Grundformel der relativistischen Mechanik) 421; (Bewegung der rotierenden Satelliten) 424.
- Källén, G. and H. Wilhelmsen (Singular functions) 435.
- Kamenskij (Kamensky), G. A. (Equations involving a deviating argument) 79.
- Kamynin, S. S. (Umadressierung im Programm PP 2) 118.
- — —, É. Z. Ljubimskij und M. R. Šura-Bura (Automatisierung des Programmierens) 117.
- Kanazawa, Akira, Tetsuro Sakuma and Shinya Furui (Pion-nucleon dispersion relation) 441.
- Kaner, É. A. and M. J. A. (M. I. a.) Azbel' (Cyclotron resonance in metals) 233.
- Kaplan, Jerome I. (Second order perturbation theory) 215.
- Kapur, J. N. (Velocity in a jet of a compressible fluid) 393; (Superposability in magnetohydrodynamics) 403.
- Karlsson, Sture K. F. (Unsteady turbulent boundary layer) 398.
- Kárteszi, Ferenc (Projective mapping of quadrics) 361.
- Kashian, H. C. s. S. L. Kahalas 447.
- Kašjankov (Kaš'iankov), P. P. (Stigmatic imaging in electron-optical systems) 211.
- Kast, Werner s. Otto Krischer 383.
- Kastenbaum, Marvin A. (Confidence on the abscissa) 137.
- Katetov, M. (Fortsetzung lokal endlicher Überdeckungen) 169.
- Kato, Yusuke and Tosiya Taniuti (Hydromagnetic flow in compressible ionized gases) 404.
- Katsis, D. N. (Calendar and the Easter's rule) 235.
- Katz, Donald L. s. James G. Knudsen 196.
- Kaufman, H. (Circuit response to periodic inputs) 111.
- Kaufmann, Iosif (Domaines fermés) 39.
- Kaup, Wilhelm s. G. B. Seligman 257.
- Kawabe, R. (Paradox of Einstein, Podolsky and Rosen) 426.
- Kawaguti, Mitutosi (Note on Allen and Southwell's paper) 390.
- Keller, Herbert B. (Iterative methods for elliptic difference equations) 334.
- Joseph B. (Bohr-Sommerfeld quantum conditions) 431.
- — — s. Herbert C. Kranzer 204.
- Kelley, J. L. (Hypercomplete linear topological spaces) 319.
- Kemeny, John G. ( $n$ -person games) 131.
- Kemmer, N. s. V. Fock 423.
- Kemp, K. W. (Operating characteristic and sample number of sequential tests) 353.
- Kendall, David G. (Compacité dans certains espaces fonctionnels) 326.
- M. G. s. H. E. Daniels 137.
- Keogh, F. R., B. Lawton and G. M. Petersen (Well distributed sequences) 271.
- Kepler, Johannes (Werke. XVI—XVIII.) 3.
- Kerrich, J. E. (Discontinuous probability density) 137.
- Kervaire, Michel A. (Formules d'intégration de l'analyse vectorielle) 156.
- Kessler, C. (Wechselstromregler. I.) 122.
- Kesten, H. and J. Th. Runnenburg (Priority in waiting line problems. I. II.) 348.
- Keune, Friedrich (Singularitätentheorie für lineare Unter- und Überschallströmung) 399; (Geschwindigkeitspotential der linearen Unter- und Überschallströmung) 400.
- Kielich, S. (Molecular interaction in light scattering) 228.
- Kikuchi, S. (Verteilungen der galaktozentrischen Keplerschen Bahnelemente. II.) 236; (Berichtigungen) 236.
- Kimball, A. W. and E. Leach (Approximate linearization of the incomplete  $\beta$ -function) 137.
- Kimbrow, Genevieve M. s. Herbert E. Salzer 279.
- Kimura, Hitosi (Price analysis in input-output model) 357.
- Motoo (Stochastic processes in genetics) 141.
- Kinder, Elaine F. s. Joseph Lev 354.
- Kindler, Heinrich s. A. I. Lurje 345.
- Kinoshita, Toichiro (Ground state of helium atom. II.) 444.
- Kirchgässner, K. (Taylor-Görtler-Wirbel) 200.
- Kirstein, P. T. (Equations of electrostatic space-charge flow) 210.
- Kisdi, D. s. P. Gombás 222.
- Kist, Joseph (Locally  $\alpha$ -convex spaces) 320.

- Kleber, Will s. Joachim Bohm 460.
- Kleene, S. C. (Extension of a class of functions) 246; (Number-theoretic functions) 247.
- Klein, Bertram (Metric structural analysis. IV.) 184.
- Klepper, Izu s. N. Irimiciuc 157.
- Klinken, J. van (Stochastic processes of special use in actuarial statistics) 138.
- Knapowski, S. (Values of the Möbius function) 34.
- Knopf, Konrad (Elemente der Funktionentheorie) 65.
- Knudsen, James G. and Donald L. Katz (Fluid dynamics and heat transfer) 196.
- Kokits, Zsigmond (Elementary mathematics) 37.
- Kondrat'ev (Kondratiev), V. A. (Zeros of the solutions of  $y^{(n)} + p(x)y = 0$ ) 304.
- König, Heinz (Distributionen endlicher Ordnung) 97.
- Konjuškov, A. A. (Funktionsklassen. I.) 54.
- Kontorovič (Kontorovich), V. M. (Small disturbances and discontinuities in magneto-hydrodynamics) 212.
- Koosis, P. (Theorem of the brothers Riesz) 292.
- Koppelman, W. and J. D. Pincus (Spectral representations for Hilbert transformations) 317.
- Korenblum, B. I. (Wiens Verallgemeinerung des Tauberschen Satzes) 93; (Harmonische Analyse schnellwachsender Funktionen) 324; (Normed ring of functions with convolution) 325.
- Korolev, L. N. (Coding and code compression) 123.
- Koroljuk (Korolyuk), V. S. (Absorptionswahrscheinlichkeit im Schema zufälliger Irrfahrten) 128.
- Koschmieder, Lothar (Extrema without differential calculus. II.) 37.
- Kraichnan, Robert H. (Statistical mechanics of coupled bosons) 205; (Statistical mechanics of coupled particles) 205.
- Král, Josef (Lipschitzian mappings) 44.
- Kramer, Werner (Darstellende Geometrie. I.) 175.
- Kranzer, Herbert C. and Joseph B. Keller (Water waves produced by explosions) 204.
- Krasner, Marc (Approximation des corps valués complets) 265.
- Krasovskij, N. N. (Theorie der Stabilität einer Bewegung) 72.
- Kreith, Frank and David Margolis (Heat transfer and friction in turbulent vortex flow) 398.
- Kreyszig, Erwin and John Todd (Radius of univalence of  $\exp z^2 \int_0^z \exp(-t^2) dt$ ) 66.
- Krischer, Otto und Werner Kast (Wärmeübertragung bei Rippenrohren) 383.
- Krivoglaž, M. A. und S. I. Pekar (Spuren für Leitungselektronen in Halbleitern. I.) 234; (II.) 235.
- Królikowski, W. (Equation for scattering amplitudes) 438.
- Kröner, Ekkehart und Alfred Seeger (Nicht-lineare Elastizitätstheorie der Versetzungen) 386.
- Kronsbein, John und Erich A. Farber (Time retardation) 429.
- Kručković (Kruchkovich), G. I. and Čao-chao Gu (Ku Chao-hao) (Semireductibility criterion for Riemannian spaces) 162.
- Krull, Wolfgang (Laskersche Ringe) 263; (Theorie der Bewertungen) 264.
- Krutov, V. A. (Innere Konversion. I.) 445.
- — — und K. Mjüller (Innere Konversion. II.) 445.
- Krylov, A. L. (Test that a given function belongs to the class  $W_p^{(1)}$  of Sobolev) 44.
- Krzyżański, M. (Inégalités relatives aux solutions de l'équation parabolique) 84.
- Kublanovskaja, V. N. (Analytische Fortsetzung in der numerischen Analysis) 336.
- Kuipers, L. (Relations between Legendre associated functions) 288.
- Kulikovskij (Kulikovsky), A. G. (Flow of conducting liqui) 203; (Motions with homogeneous deformation in magneto-hydrodynamics) 418.
- Kultze, Rolf (Fredholmsche Endomorphismen) 324.
- Kumar Mitra, Sujit s. Mitra, Sujit Kumar 356.
- Kumari, Sulaxana (Jump of a function) 57.
- Kümmel, H. s. F. Coester 222.
- Kundu, S. K. (Nucleon magnetic moment) 220.
- Kuni, F. M. (Low integral equation method) 441.
- Küneth, Hermann (Dualisierbare Kurven in  $R^3$ ) 166.
- Künzi, H. P. (Simplexmethode bei linearen Programmen) 358.
- — — and H. Wittich (a-points of meromorphic functions) 294.
- Küpfmüller, Karl (Theoretische Elektrotechnik) 208.
- Kuramochi, Zenjiro (Cluster sets of analytic functions. I.) 294.
- Kurth, Friedrich (Spannungsuntersuchung an Kreisring-scheiben) 383.
- Kuttner, B. (Problem of "translative" for Hausdorff summability) 48; (Cesàro limit of a function) 49.
- Kuzmak, G. E. (Equation of motion for a non-linear oscillatory system) 110.
- Kuzovkov, N. T. (Automatische Regelungssysteme) 344.
- Laasonen, Pentti (Ritz method for determination of eigenvalues) 109.
- Ladyženskaja (Ladyzhenskaia), O. A. (Erstes Randwertproblem für quasilineare parabolische Gleichungen) 86; (Unstetige Lösungen quasilinear hyperbolischer Gleichungen) 309; (Differential properties of solutions of variation problems) 313.
- — — s. I. Ja Bakel'man 7.
- Lagrange, Jean
- $$(I_m = \int_0^\infty \frac{\sin^m x}{x^a} dx, J_m = \int_0^\infty \frac{\cos^m x}{x^a} dx) \quad 43.$$
- Lahiri, B. K. s. H. M. Sengupta 45.
- Lambek, J. s. B. Brainerd 261.
- — s. G. D. Findlay 261.
- Lamperti, John (Isometrics of certain function-spaces) 97.
- Lampsi, B. B. (Equilibrium of steel beams) 187.



- Lance, G. N. (Spiral flow of a fluid in a heated rotating cylinder) 391.
- Lanczos, C. (Large-scale linear systems) 332.
- Landau, H. G. and J. H. Weiner (Stresses in heat-treated plates) 385.
- Lane, Ralph E. (Linear operators on quasi-continuous functions) 324.
- Lang, I. G. s. A. I. Ansel'm 234.
- Langefors, B. (Aircraft structural analysis) 188.
- Langenbach, A. (Application of variation principle to nonlinear differential equations) 329.
- Lapidus, L. I. s. S. M. Bilenky 223.
- Lapko, A. F. und L. A. Ljusternik (Mathematische Tagungen in der UdSSR) 1.
- Laptev, G. F. (Hypersurface in the space of projective connection) 164.
- LaSalle, J. P. (Time optimal control systems) 344.
- Laufer, J. (Stability of laminar boundary layer) 199.
- Laugwitz, Detlef (Geometrien von H. Minkowski) 168; (Konvexe Kurven) 168; (Inverses Problem der Variationsrechnung) 315.
- Laval, J. (Agitation thermique des atomes dans le milieu cristallin. II.) 232.
- Lawton, B. s. F. R. Keogh 271.
- Lax, Peter D. (Translation invariant spaces) 91.
- Leach, E. s. A. W. Kimball 137.
- Ledinegg, E. (Theorie des Impulsdurchganges) 416.
- Ledoux, P. s. G. Dricot 404.
- Lee, Benjamin W. (Dispersion relation) 438.
- T. D. and C. N. Yang (Low temperature behavior of Bose system. II.) 229.
- Lehmer, Emma s. I. I. Pjateckij-Šapiro 69.
- Lehner, Joseph (Partial fraction decompositions) 292; (Fourier coefficients of automorphic forms. II.) 300.
- Lehnigk, S. (Quadratische Formen als Ljapunovsche Trägerfunktionen) 73.
- Lehto, Olli (Picard's theorem) 294.
- Lejeune, Jérôme (Solution „à priori“ de la méthode „à posteriori“ de Haldane) 141.
- Lelek, A. (Involutions multivalentes) 372.
- Long-Ferrand, Jacqueline (Champs de vecteurs) 165; (Transformations infinitésimales d'une variété différentiable) 165, 166.
- Lense, Josef (Erzeugung der kubischen Raumkurven) 361.
- Lenz, Hanfried (Axiomatik der Zahlen) 245.
- Leont'ev, A. F. s. A. O. Gel'fond 6.
- Lesieur, Léonce et Robert Croisot (Anneaux premiers noethériens à gauche) 263.
- Lesky, Peter (Unendliche orthogonale Matrizen) 287.
- Lev, Joseph und Elaine F. Kinder (Analysis of variance formulas) 354.
- LeVeque, William J. (Frequency of small fractional parts in real sequences) 34.
- Levey, H. C. (Thickness of cylindrical shocks) 402.
- Levine, Jack (Binomial identity related to rhyming sequences) 7.
- Levinger, J. S. s. G. E. Brown 224.
- Lévy, Paul (Symétrie des produits de variables aléatoires) 128.
- Liber, A. E., Ju. E. Penzov und P. K. Raševskij (V. V. Vagner) 7.
- Lichnerowicz, André (Quantification du champ de gravitation) 429.
- Lieberstein, H. M. (Mixed problem for the Euler-Poisson-Darboux equation) 86.
- Lillo, James C. (Linear differential equations) 71.
- Lindgren, B. W. and G. W. McElrath (Probability and statistics) 346.
- Lindley, D. V. (Fiducial distributions and Bayes' theorem) 355.
- Linhart, J. G. s. E. Persico 449.
- Lint, J. H. van (Multiplier-system of the Riemann-Dedekind function  $\eta$ ) 300.
- Lipiński, J. S. (Ensembles  $\{f'(x) > a\}$ ) 45.
- Litvin-Sedov, M. Z. (Relations géométriques concernant les systèmes mécaniques) 158.
- Liu, Chen-hsing (Atmospheric turbulent exchange in the surface layer) 240.
- V. C. (Pitot pressure in an almost-free-molecule flow) 202; (Separation of gas mixtures) 393.
- Ljapunov, A. A. (Logische Schemata von Programmen) 340; (Fragen der Kybernetik) 344.
- Ljubarskij, G. Ja. s. A. I. Achiezer 212.
- Ljubčenko (Lubchenko), G. G. (Auswahl von logischen Operationen und Mechanismen für digitale Rechenmaschinen) 115.
- Ljubimskij, É. Z. (Arithmetischer Block im PP 2) 118.
- — — s. S. S. Kamynin 117.
- Ljusternik, L. A. s. A. F. Lapko 1.
- Locher-Ernst, L. (Verteilung der Primzahlen) 267.
- Löcherer, Karl-Heinz („Anodenstromschwankungen von Elektronenröhren“) 420.
- Logunov, A. A. and A. R. Frenkin (Dispersion relations for Compton effect) 437.
- — — and A. N. Tavcheldize (Tavkhelidze) (Problems in the theory of dispersion relations) 437; (Process amplitude for variable number of particles) 438.
- Lomont, J. S. (Applications of finite groups) 254.
- Lomsadze, Ju. M. and B. I. Maksimov (Equations for the greenians) 440.
- Longuet-Higgins, H. C., U. Öpik, M. H. L. Pryce und R. A. Sack (Jahn-Teller effect. II.) 227.
- M. S. (Statistical distribution of the curvature of a random Gaussian surface) 126.
- Look, K. H. (Analytic invariant) 68; (Schwarz lemma and analytic invariants) 68.
- Lord, Frederic M. (Problems in mental test theory) 141.
- Lorentz, G. G. and K. Zeller (Series rearrangements and analytic-sets) 47.
- — — s. P. Erdős 31.
- Loud, W. S. (Periodic solutions of  $x'' + c x' + g(x) = ef(t)$ ) 307.
- Lovass-Nagy, V. s. P. Bajcsay 334.
- Low, F. E. s. G. F. Chew 433.
- Lowe, P. G. s. V. V. Novozhilov 188.
- Luce, R. D. (Note on "experimental  $n$ -person games") 130.
- — — s. A. W. Tucker 129.



- Luchovickaja, E. S. (Logische Bedingungen im PP 2) 117.  
 Lund, C. O. s. M. Grönlund 338.  
 Lundberg, G. H. (Transformations of a conic into itself) 151.  
 Lurje, A. I. (Nichtlineare Probleme der selbsttätigen Regelung) 345.  
 Lutzky, Morton and John S. Toll (Formation of discontinuities) 219.  
 Luxemburg, W. A. J. (Successive approximations of ordinary differential equations. III.) 302.  
 Lydall, H. F. (Distribution of employment incomes) 358.  
 Maass, Hans (Verteilung der Untergitter in einem euklidischen Gitter) 69.  
 Macdonald, J. G. (Enumerative formulae for algebraic curves) 364.  
 MacDonald, W. M., M. N. Rosenbluth and Wong Chuck (Relaxation of a system of particles with Coulomb interactions) 447.  
 Mack, Sidney F. (Second derivatives on level surface elements) 158.  
 Macke, Wilhelm (Quanten) 214.  
 Mackie, A. G. (Boundary value problems for a hodograph equation) 399.  
 MacKinnon, William J. (Symmetric binomial cumulative distribution) 138.  
 MacLane, Saunders (Subgroup theorem for free products) 14.  
 MacRobert, T. M. (Integrals involving hypergeometric functions) 64; (Infinite series of  $E$ -functions) 290, 291; (Integrals of products of  $E$ -functions) 291.  
 Makowski, A. et A. Schinzel (Équation indéterminée de R. Gormaghtigh) 29.  
 Maksimov, B. I. s. Ju. M. Lomsadze 440.  
 Malýšev (Malyshev), A. V. (Representation of large numbers) 269; (Distribution of  $L$ -series zeroes) 270; (Darstellung ganzer Zahlen. I.) 270.  
 Mandan, Sahib Ram ( $S$ -configuration) 360.  
 Mandel, S. P. H. and I. M. Hughes (Change in mean viability) 140.  
 Mangler, K. W. and J. H. B. Smith (Flow past a slender delta wing) 200.  
 Manukjan, M. M. (Temperaturspannungen bei Exothermie des Zementes) 191.  
 Maradudin, Alexei and George H. Weiss (Disordered lattice problem) 232.  
 Marathe, C. R. (Semimoduli of a rectangular matrix) 11.  
 Maravall Casesnoves, Dario (Biologisches Phänomen des Existenzkampfes) 138.  
 March, N. H. and W. H. Young (Variational methods based on the density matrix) 215.  
 Marčuk, G. I. (Mehrguppenmethode zur Berechnung von Kernreaktoren) 225.  
 Marcus, Froim (Surfaces dont les courbes asymptotiques d'un système sont centro-affine équivalentes) 158.  
 — (Markus), S. (Functions continuous in each variable) 44; (Länge einer Kurve?) 276; (Fonctions définies par des inégalités) 277.  
 Mardešić, S. (Equivalence of singular and Čech homology) 373.  
 Margenau, Henry s. Edward A. Desloge 227.  
 Margolis, David s. Frank Kreith 398.  
 Marian, Victor (Manuscript d'arithmétique numérique de Jacob Partenie) 5.  
 Markov, A. A. (Inversion complexity of a system of functions) 116.  
 — M. (Field theory with indefinite metric in Hilbert space. I.) 437.  
 Markus, L. s. L. Auslander 163.  
 Marquet, Simone (Théorie cinétique et équation de Boltzmann) 446.  
 Marshak, Robert E. (Meson physics) 440.  
 Marx, G. (Second order wave equation of the fermions) 217.  
 Mašković (Mashkovich), S. A. (Atmospheric pressure numerical prediction) 239.  
 Maslennikov, M. V. (Slowing down neutrons) 225; (Wick's problem) 225.  
 Maslov, V. P. (Degeneration on passing from a discrete spectrum to a continuous one) 430.  
 Mather, Kenneth and R. Morley Jones (Interaction of genotype and environment in continuous variation. I.) 140.  
 — s. R. Morley Jones 140.  
 Mathews, P. M. (Vibrations of a beam on elastic foundation. II.) 387.  
 Matsumoto, Kikui (Riemann surfaces) 298.  
 Matsusaka, T. (Polarized varieties) 153.  
 Matsushita, Shin-ichi (Ideals in non-commutative lattices) 20.  
 Matthews, G. (Rings of infinite matrices. II.) 325.  
 Matthysse, Steven W. s. Edward A. Desloge 227.  
 Matula, Miloš (Studium des Schreibens) 151.  
 Matuszewska, W. and W. Orlicz (Class of Saks spaces) 97.  
 Mau, Jürgen s. Kurt-R. Biermann 2.  
 Maurice, Rita J. (Selection of population with the largest mean) 137.  
 Mayer, M. E. (Quantenfelder und Elementarteilchen) 220.  
 Mazur, S. and W. Orlicz (Linear spaces) 322.  
 McElrath, G. W. s. B. W. Lindgren 346.  
 McFarland, B. L. (Linear and nonlinear steady-state behavior of a heated tube) 206.  
 McKibben, John J. (Singular integrals in two dimensions) 97.  
 McLain, D. H. (Local theorems in universal algebras) 19.  
 McLaughlin, J. E. (Regular group rings) 21.  
 McMillan, B. and J. Riordan (Moving single server problem) 347.  
 McShane, E. J. (Antiderivatives) 276.  
 Meder, J. (Summability almost everywhere of orthonormal series) 59.  
 Meek, B. L. (Shape of cometary tails) 236.  
 Meksyn, David (Singularités dans les solutions de l'équation de la couche limite) 74.  
 Meligy, A. S. (Whittaker functions) 63; (Expansions for the logarithmic-integral) 63.  
 Mendenhall, William (Bibliography on life testing) 138.  
 Meňšíkov, G. G. (Tischgerät zur harmonischen Synthese) 338.

- Meňšov, D. E. (Grenzfunktionen einer trigonometrischen Reihe) 281.
- Merat, Parviz (Équation de Dirac) 219.
- Merbt, H. (Lee-wave equation) 240.
- Mercer, A. McD. (Thermal boundary layer in laminar flow between flat plates) 392.
- Meredith, C. A. (Dependence of an axiom of Łukasiewicz) 244.
- Mersch, Jacques (Transformation birationnelle de l'espace) 153.
- Merten, Ludwig (Gitterschwingungen in Kristallen. II.) 231.
- Meškov, A. I. (Gleichgewicht eines elastischen Parallelepipeds) 384.
- Messick, Samuel s. Ernest Adams 141.
- Meyer zur Capellen, W. (Beschleunigungsänderung. I.) 182.
- Michajlov, G. A., B. N. Šitikov und N. A. Javlnskij (Maschine CEM-1) 115.
- Michlin (Mikhlin), S. G. (Singular integrals in  $L_p$  spaces) 316.
- Miele, Angelo (Flight mechanics and variational problems) 407.
- Mihăilă, A. (Synchrotron mit intensiver Fokussierung) 418.
- Mikolajska, Z. (Solutions périodiques de l'équation différentielle) 76; (Intégrales asymptotiques d'un système d'équations différentielles) 305.
- Mikusiński, J. s. S. Hartman 273.
- Milanković, Lj. (Phasenfolgeverdrechung beim Leiterbruch) 414; (Zeitkonstante der Aufladung der Stoßspannungs-Generatoren) 414.
- Miles, John W. (Panel flutter) 203; (Free surface oscillations in a rotating liquid) 410.
- Miller, J. B. (Continuum of Hilbert spaces in  $L^2$ ) 91.
- M. A. (Focusing of charged particle beams) 418.
- Maximilian (Leibniz' Entwurf zur Begründung der Infinitesimalrechnung) 4.
- Mills, W. H. (Four person game) 131.
- Milnor, John (Theorem of Bott) 173.
- Minami, S. s. D. Ito 434.
- Minin, I. N. (Diffusion of radiation in a semi-infinite medium) 207.
- Miranker, W. L. ( $L^2$ -maximum principle for solutions of  $\Delta u + k^2 u = 0$ ) 313.
- Mišik, Ladislav (Bemerkungen zur Maß- und Integraltheorie) 41.
- Misner, Charles W. s. David Finkelstein 219.
- Misra, S. P. (Polarisation of a Dirac particle) 440.
- Mitchell, T. P. (Nonlinear bending of thin rods) 382.
- Mitchner, M. (Magnetohydrodynamic flow in a shock tube) 405.
- Mitra, A. K. (Scattering of electron) 445.
- M. K. (Resistance on a sphere) 389.
- Sujit Kumar (Tables for tolerance limits) 356.
- Mitrinovitch, Dragoslav (Formules relatives aux nombres de Stirling) 50.
- Mitrović, Dragiša (Théorème  $\Omega$ ) 292.
- Mitterlehner, G. (Lenkstabilität des luftbereiften Kraftwagens) 181.
- Mitton, R. G. and F. R. Morgan (Design of factorial experiments) 134.
- Miyazima, Tatuoki and Yasushi Wada (Nuclear moments of inertia) 223.
- Mizohata, Sigeru (Prolongement des solutions des équations elliptiques) 85; (Problème de Cauchy pour le passé pour quelques équations paraboliques) 85.
- Mjuller, K. s. V. A. Krutov 445.
- Moe, Mildred and David S. Saxon (Variational methods in scattering problems) 432.
- Moisil, Grigore Constantin (Teoria algebrica dei meccanismi automatici) 116.
- Moldovan, Elena (Machines à calculer) 338.
- Moljukov, I. D. und V. A. Sapa (Bewegungsgleichungen eines Systems mit veränderlicher Masse) 177.
- Montaldi, E. s. P. Gulmanelli 219, 429.
- Montaldo, Oscar (Problema di valori al contorno per un'equazione parabolica del quarto ordine) 311.
- Moór, Arthur (Nicht-holonome Linienelementräume) 371.
- Moore, F. K. (Separation of the unsteady laminar boundary layer) 394.
- Mordell, L. J. (Distance-function inequality) 37; (Ingham's trigonometric inequality) 58.
- Morgan, F. R. s. R. G. Mitton 134.
- Morita, Tohru (Theorie of classical fluids. I.) 227, (II.) 449.
- Morkovin, M. V. (Supersonic wind tunnels) 399.
- Morozov, A. I. (Moving current-carrying wire and conducting wall) 413.
- Moser, Josip (Depolarisation des gestreuten Lichtes) 210.
- W. O. J. (Relative widths of coverings by convex bodies) 167.
- Moses, H. E. (Solution of Maxwell's equations in terms of a spinor notation) 219.
- Mostow, G. D. (Representations of Lie groups. II.) 18.
- — — s. G. Hochschild 18.
- Mott, J. L. (Central limit theorem for a Markov chain) 127.
- — — and Hans Schneider (Matrix norms applied to weakly ergodic Markov chains) 127.
- Mrówka, S. (Compactifications of a set) 38; ( $m$ -almost-metrisability) 170; (Functionals on uniformly closed rings of continuous functions) 321.
- — — s. W. Balasiński 342.
- Mučnik, A. A. (Postsches Problem. I.) 250.
- Mühschlegel, Bernhard (Grundzustand des Supraleiters) 230.
- Müller, G. (Störung eines Lichtbogens durch Tauchsonden) 448.
- — — s. Regelungstechnik 119.
- Muller, Mervin E. s. G. E. P. Box 137.
- Mullins, W. W. (Linear cooperative problem) 349.
- Munteanu, Octavian (Bewegung eines Kurvengetriebes) 182.



- Muraĳev (Muraviev), P. A. (Linear mixed-difference differential equations with constant coefficients) 79.
- Musin, A. K. s. A. A. Aršinov 227.
- Musta, Št. (Inverse trigonometrische und logarithmische Funktionen) 278.
- Mustafaev, V. V. (Verdrängung des Erdöls durch Gas) 413.
- Myhill, J. (Recursive equivalence types) 248.
- Mysovskich, I. P. (Brief an die Redaktion) 90.
- Nachbar, W. and L. Green jr. (Solid propellant resonant burning) 409.
- Nádenik, Zbyněk (Surfaces analogiques aux courbes de Bertrand) 365; (Zu Bertrandischen Kurven analoge Flächen) 365.
- Naftalevič, A. G. (Lineare Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten) 77; (System zweier Differenzengleichungen) 77.
- Nagano, Tadashi (Hypersurfaces) 162.
- Nakamura, Ki-ichi (Spin-spin interaction in superconductors) 230.
- Masahiro and Zirō Takeda (Crossed products of von Neumann algebras) 99; (Crossed product of finite factors. I. II.) 100.
- Nakanishi, Shizu (Dérivation de l'intégrale (E. R.) indéfinie. I. II.) 274; (Intégrale (E. R.)) 275; (Théorème de Fubini) 275.
- Naleszkiewicz, J. (Energy levels in dynamics of elastic systems) 184.
- Nail, Kenneth L. s. Leon Green jr. 398.
- Napolitano, Luigi G. (Incompressible mixing of a shear flow) 196.
- Narayana, T. V. and G. E. Fulton (Compositions of an integer) 8.
- Nardini, Renato (Fronti d'onda nella magneto-elasticità) 405.
- Nasu, Yasuo (Asymptotes on a 2-dimensional metric space) 167.
- Nazarjan, A. G. s. G. A. Babadžanjan 390.
- Naze, Jacqueline (Écoulements quasi rectilignes d'un fluide) 213.
- Neiswanger, W. A. and T. A. Yancey (Parameter estimates and autonomous growth) 137.
- Nelson, D. (Negation and separation of concepts) 250.
- Nemirovskij (Nemirovskii), P. Ė. (Model of a semi-transparent nucleus. II.) 222.
- Nering, E. D. s. G. K. Kalisch 130.
- — — (General-sum symmetric 4-person games) 131.
- Nettleton, R. E., K. Goldberg and M. S. Green (Dense subgraphs and connectivity) 175.
- Neugebauer, Ch. J. s. L. Cesari 44.
- Neumann, B. H. (Isomorphism of Sylow subgroups) 253.
- John (Games of strategy) 132.
- — — von (Computer and brain) 141.
- Nevanlinna, F. (Absolute Analysis) 106.
- Neville, E. H. (Elliptic integrals) 301.
- Newcomb, William A. (Motion of magnetic lines of force) 419.
- Newman, Morris and John Todd (Matrix inversion programs) 343.
- Neyman, Jerzy and Elizabeth L. Scott (Problems of cosmology) 429.
- Nica, Al. s. Gh. Vasilca 396.
- Nickel, Karl (Prandtl'sche Grenzschicht-Differentialgleichungen) 391.
- Nikolskij, A. A. (Strömungen der idealen Flüssigkeit) 394.
- Nitsche, Johannes C. C. (Curvature of minimal surfaces  $z = z(x, y)$ ) 159.
- Noble, B. (Infinite set of linear simultaneous equations) 333.
- Noli, W. (Schraubentriebe) 183.
- Nolin, L. (Algèbre des prédicats) 244.
- Norden, A. P. (Komplexe Darstellung der Tensoren des Lorentz-Raumes) 156.
- — — s. P. A. Širokov 367.
- Norte Ramón, Francisco (Projektierung einer politischen Statistik) 138.
- Nougaro, Jean s. Hubert Jar-din 411.
- Novikow, P. S. (Algorithmische Probleme der Gruppentheorie) 251.
- Novoselov, V. S. (Problem der nichtholonomen Mechanik) 177; (Anwendung nichtlinearer nichtholonomen Koordinaten) 177; (Erweiterte Bewegungsgleichungen nichtlinearer nichtholonomen Systeme) 177.
- Novotný, Miroslav, Karel Svoboda und Miloš Zlámal (O. Borůvka) 6.
- Novozhilov, V. V. (Theory of thin shells) 188.
- Novožilov (Novozhilov), Ju. V. (Iu. V.) (Scattering of "dressed" particles) 441.
- Noyes, H. P. s. S. Gasiorowicz 438.
- Nožička, František (Lignes géodésiques, asymptotiques et les lignes de courbure) 178.
- Obberman, Carl s. John Dawson 449.
- Obretenov, Apostol (Starkes Gesetz der großen Zahlen) 352.
- Oeconomidis, Nicolas (Systèmes et les formes des ensembles) 39.
- Oehme, Reinhard (Vertex function) 436.
- Ohshio, Shigeru (Total mean curvature  $M^*(t)$  of inner parallel surfaces in  $E_3$ ) 168.
- Okano, Hatsuo (Intégration des fonctions à valeurs vectorielles) 42; ((ER)-integral of Radon-Stieltjes type) 275; (Multiplication of (ER)-integrable functions) 275.
- Okun, L. B. and I. Ya. Pomeranchuk (Peripheral interactions of elementary particles) 444.
- Olkin, Ingram and John W. Pratt (Multivariate Tchebycheff inequality) 352.
- Olszak, W. and P. Perzyna (Validity of variational theorems) 381.
- O'Meara, O. T. (Integral representations of quadratic forms) 28.
- Onesti, Natalia Berruti s. Berruti Onesti, Natalia 307.
- Onicescu, O. (Processus constitués par les événements d'un champ) 125.
- Ono, Akimasa (Vibration and strength of turbine blade. IV.) 192.
- Takashi (Groupes de Chevalley) 17.



- Onoe, Morio (Tables of quotients of Bessel functions) 123.
- Onuchic, Nelson (*P*-spaces and Stone-Čech compactification) 372.
- Opial, Z. (Équation différentielle  $u'' + a(t)u = 0$ ) 70; (Théorème de A. Filippoff) 74; (Oscillation des intégrales de l'équation  $(Q(t)x')' + f(t)x = 0$ ) 304.
- Öpik, U. and M. H. L. Pryce (Jahn-Teller effect. I.) 226.
- — s. H. C. Longuet-Higgins 227.
- Oppelt, W. (zusammengestellt von) (Rechenmaschinen bei der Berechnung von Regelvorgängen) 118.
- Ordway, Donald Earl s. Edward L. Clark jr. 406.
- Orlicz, W. s. W. Matuszewska 97.
- — s. S. Mazur 322.
- Osserman, Robert (Analogue of the Heinz-Hopf inequality) 159; (Lemma on analytic curves) 298.
- Oster, Ludwig (Absorptionskoeffizient für Frei-Frei-Strahlung) 236.
- Ostrom, T. G. and A. Wagner (Planes with transitive collineation groups) 143.
- Ōtsuki, Tominosuke (Homotopies of curves in tangent bundles) 164; (Curvature of Finsler manifolds) 164.
- Pac, Pong Y. (Transformation properties of Dirac equation) 432.
- Pacioni, Goffredo (Funzioni reali con flessibilità monotona) 276.
- Pai, S. I. (Shock wave propagation in an electrically conductive gas) 406.
- Palamà, Giuseppe (Partizione di  $n$ ) 267.
- Pallone, Adrian s. Martin H. Bloom 398.
- Pan, Chia-cheng (Analysis of stepped beams) 188.
- Papapetrou, A. s. D. Geissler 427.
- Pâquet, P. V. (Opérateurs de projections dans l'enseignement de la géométrie vectorielle) 155.
- Paria, Gunadhar (Axisymmetric consolidation for a porous elastic material) 185.
- Parkus, Heinz (Instationäre Wärmespannungen) 384.
- Parodi, Maurice (Zéros de la dérivée du polynôme caractéristique d'une matrice) 12; (Zéros des polynômes) 12; (Racines des équations abéliennes) 13.
- Pârnu, Monica Pavel (Espaces linéaires) 94.
- Paslay, Paul R. s. Alfred Slibar 388.
- Pasquinelli, Alberto (Logica simbolica) 243.
- Pasynkov, B. (Polyhedral spectra) 373.
- Paul, Harry (Wärmeleitung in Isolatoren. I. II.) 235.
- Pavlichina, M. A. s. L. P. Smirnov 390.
- Pawlak, Z. and A. Wakulicz (Expansions with a negative basis in the arithmometer of a digital computer) 342.
- Payne, W. T. (Spinor theory and relativity. II.) 217.
- Pedersen, Peder (Expansion of  $\pi$ ) 273.
- Pekar, S. I. s. M. A. Krivoglaз 234.
- Pelczyński, A. (Isomorphism of the spaces  $m$  and  $M$ ) 94.
- Penzov, Ju. E. s. A. E. Liber 7.
- Perez, A. Sanchez 7.
- Albert (Théorie mathématique de l'information. I. II.) 125.
- Perez-Cacho, L. (Fragen der Zahlentheorie) 29.
- T. (Fragen der Zahlentheorie) 30.
- Perov, A. I. (Uniqueness theorems for ordinary differential equations) 328.
- Persen, L. N. (Instationäre Grenzschichtströmungen) 394.
- Persico, E. and J. G. Linhart (Plasma loss from magnetic bottles) 449.
- Persidskij, K. P. (Abzählbare Systeme von Differentialgleichungen) 75.
- Perzyna, P. s. W. Olszak 381.
- Peštmaldžjan, D. V. s. S. A. Ambarcumjan 382.
- Petcu, Valeriu s. Ștefan Balan 192.
- Péter, Rózsa (Rekursivität und Konstruktivität) 250.
- Peters, Klaus s. G. B. Seligman 257.
- Petersen, G. M. s. F. R. Keogh 271.
- Petzold, Joachim (Radialsymmetrische Lösung für skalare masselose Mesonen) 427.
- Pfanzagl, J. (Kombiniertes Test- und Klassifikations-Problem) 133.
- Pfeiffer, Alfred (Stabilität von Folge-reglern) 122.
- Pfennig, H. (Elektrischer Widerstand der Metalle) 234.
- Pfenninger, W. (Transition) 199; (Boundary layer suction) 394.
- Pham Mau Quan (Inductions électro-magnétiques) 422.
- Phillips, James C. and Herbert B. Rosenstock (Topological methods of locating critical points) 232.
- R. S. (Theorem due to Sz. Nagy) 327.
- Piccinini, Renzo (Produktbildung in  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten) 375.
- Pickert, Günter (Projektive Gruppe einer Moufang-Ebene) 142.
- Piechocki, Władysław (State of stress in a disc) 191; (Stresses in an infinite wedge) 385.
- Pillai, K. C. Sreedharan and Celia G. Bantegui (Largest of six roots of a matrix) 137.
- Pincus, J. D. s. W. Koppelman 317.
- Pitaevskij (Pitaevskii), L. P. (Superfluidity near the  $\lambda$  point) 229.
- Pitt, H. R. (Tauberian theorem) 32.
- Pjateckij-Šapiro (Pyateckii-Šapiro), I. I. (Singular modular functions) 69.
- Plackett, R. L. (Linear estimation from censored data) 135; (History of probability and statistics. VII.) 138.
- Plessis, N. du (Validity of finite difference operations) 278.
- Plotnikov, V. I. (Differenzierbarkeit der Lösungen regulärer Variationsaufgaben) 314.
- Pöcsik, G. ( $\hbar$ -quantization of boson field) 439.
- Pogorzelski, W. (Système parabolique d'équations aux dérivées partielles) 309, 310; (Premier problème de Fourier) 310.
- Pokornyj (Pokorny), V. V. (Formal solutions of nonlinear integral equations) 90.

- Pokrovskij (Pokrovskii), V., F. Ulinič (Ulinich) and S. Savvinykh (Savvinykh) (Local reflection in wave-guides) 415.
- Polak, A. I. (Complete approximative solvability of equations) 105.
- Pollaczek, Félix (Fonctions de répartition relatives à un groupe de lignes téléphoniques) 126.
- Pollard, Harry s. Salomon Bochner 318.
- Polosuev, A. M. (Uniform distribution of a system of functions) 272.
- Polovin, R. V. s. A. I. Achiezer 212.
- Pomeranchuk, I. Ya. s. L. B. Okun 444.
- Pondělíček, Bedřich (Semi-gruppe der Endomorphismen. I.) 253.
- Ponomarev, Vl. s. P. Alexandrov 170.
- Pontrjagin, L. S. (Topologische Gruppen. 2) 17.
- Popa, Octavian s. Aurel Barglăzan 406.
- Popov, Blagoj S. (Ultraspherical polynomials) 61; (Expressions de Turán-Szegő) 288.
- Popoviciu, Mircea s. Aurel Barglăzan 406.
- Popruženko, J. (Proposition équivalente à l'hypothèse du continu) 38.
- Potapkov, N. A. (Anisotropy of ferromagnetic single crystals) 235.
- Potter, John et Khosrow Chaddan (Interactions non locales) 439.
- Powers, John E. (Elimination of special functions) 343.
- Późniak, É. G. (Geschlossene Fläche mit singulärem Punkt) 366.
- Prakash, Satya and Satish Chandra Srivastava (Velocity of ultrasonic waves) 228.
- Pratt, John W. s. Ingram Olkin 352.
- R. H. s. S. G. Ecktsein 442.
- Preda, Iosif s. Aurel Barglăzan 406.
- Predeleanu, M. (Verschiebungsfunktionen für das achsensymmetrische Problem der Elastodynamik) 193.
- Prentki, Jacques s. Bernard d'Espagnat 443.
- Primakoff, H. (Theory of muon capture) 442.
- Prior, L. E. s. H. G. Green 151.
- Proceedings of 1958 international conference on semiconductors 451.
- Prokof'ev, V. A. (Gleichung des Strahlungsenergietransports) 207; (Transport der Integralfunktionen des Strahlungsfeldes) 207.
- Protasov, V. I. (Linear partial differential equations) 82.
- Prouza, Ludvik (Lineare Prediktion mittels eines lernenden Filters) 124.
- Pryce, M. H. L. s. H. C. Longuet-Higgins 227.
- — — s. U. Öpik 226.
- Przeworska-Rolewicz, D. (Problème non linéaire d'Hilbert) 297.
- Pucker, N. (Ionenstrahl in elektrostatischen Feldern) 418.
- Putnam, Hilary s. Martin Davis 248.
- Puzikov, L. D. s. S. M. Bilenky 223.
- Pyle, H. Randolph (Proportional metrics in  $N$  variables) 369.
- Quan, Pham Mau s. Pham Mau Quan 422.
- Quilghini, Demore (Effetto giroscopico) 178.
- Rabinovič, M. S. s. L. V. Iogansen 211.
- Rabinowitz, Irving N. s. Ira B. Bernstein 448.
- Rachmatulin. H. A. (Grenzschicht-Theorie) 394.
- Raczka, A. and R. Raczka (Möller scattering of polarized electrons) 218.
- R. s. A. Raczka 218.
- Rademacher, Hans (Selberg formula for  $A_k(n)$ ) 267.
- Rado, R. s. P. Erdős 38.
- Radok, J. R. M. s. V. V. Novozhilov 188.
- Ragab, F. M. (Products of Bessel polynomials) 60; (Expansion involving confluent hypergeometric functions) 63; (Expansion of an  $E$ -function) 63; (Barnes' lemma) 64.
- Raimi, Ralph A. (Banach's generalized limits) 105.
- Raja Rao, B. s. Rao, B. Raja 135.
- Rajagopal, A. K. (Unification of orthogonal polynomials) 60; (Bessel polynomials) 289.
- Rajkov, D. A. (Eigenschaft der nuklearen Räume) 94.
- Rajski, C. (Bayes rule and entropy) 124; (Selectivity of parametric tests) 135.
- Ramón, Francisco Norte s. Norte Ramón, Francisco 138.
- Rankin, R. A. (Construction of automorphic forms) 300.
- Rao, B. Raja (BAN estimates) 135.
- Rappoport, M. G. (Berechnung endlicher Differenzen) 343.
- — — s. B. M. Drozdov 343.
- Raševskij, P. K. s. A. E. Liber 7.
- Rasulov, M. L. (Expansion of an arbitrary function into a series of fundamental functions) 312.
- Ratcliffe, J. A. (Magneto-ionic theory) 209.
- Rattray, B. A. (Borsuk-Ulam theorem) 372.
- Răutu, Sandu s. Ștefan Balan 192.
- Raven, Francis H. (Analytical design of disk cams) 190.
- Rayner, Charles Beresford (Équations intérieures d'Einstein) 425; (Mouvement rigide en relativité générale) 426.
- Rechtman-Ol'sanskaja, P. G. (Behauptung von A. A. Markov) 11.
- Rédei, Ladislaus (Elementarzahlen-theoretischer Satz von Zsigmondy) 25.
- Redmond, P. J. (Elimination of ghosts in propagators) 435.
- Reeb, Georges (Structures feuilletées) 378.
- Reeve, E. C. R. and J. C. Gower (Inbreeding with selection and linkage. II.) 141.
- Regelungstechnik 119.
- Reich, Edgar (Waiting times when queues are in tandem) 347.
- Reiss, Edward L. (Axially symmetric buckling of shallow spherical shells) 190.
- Reissig, Rolf s. A. I. Lurje 345.
- Rešetov, L. N. (Konstruierung rationaler Mechanismen) 183.
- Reynolds, George E. (Table of  $(\sin x)/x$ ) 346.



- Rickenstorf, Günther (Wärme-  
spannungen in Platten) 191.
- Ridout, D. (*p*-adic generaliza-  
tion of the Thue-Siegel-Roth  
theorem) 35; (Indefinite  
quadratic forms) 269.
- Riegels, Friedrich Wilhelm  
(Aerodynamische Profile)  
195.
- Rieger, G. J. (Selbergsche For-  
mel für Idealklassen mod  $f$ )  
25; (Siebmethode von A.  
Selberg. II.) 268.
- Riesenkönig, Wolfgang (Lexi-  
kographisch geordnete Per-  
mutationen) 116.
- Riordan, J. s. B. McMillan 347.
- Rios, S. (Theorien und Modelle  
von Naturerscheinungen)  
241.
- Rjabcev, I. I. (Veränderliche  
Retardierung) 80.
- Rjazanov (Riazanov), G. V.  
(Quantum-mechanical pro-  
babilities) 430.
- Robertson, Alan (Evaluation  
of genetic parameters) 140.
- Robinson, Donald W. (*n*-  
groups with identity ele-  
ments) 251.  
— J. (Maxwell-Einstein equa-  
tions) 428.
- Robson, D. S. (Constructing  
orthogonal polynomials)  
137.
- Rogers, C. A. (Packing of  
equal spheres) 33.  
— M. H. (Similarity flows be-  
hind strong shock waves)  
402.
- Rojansky, V. (*Q*-number modi-  
fication of the Lorentz rota-  
tions) 432.
- Roitenberg (Roitenberg), Ja.  
N. (J. N.) (Accumulation of  
perturbations in linear sys-  
tems) 304.
- Rolewicz, S. (Spaces  $N(L)$  and  
 $N(l)$ ) 323.
- Roman, A. (Décomposition  
d'un complexe de droites)  
366.
- Ron, A. (Penetration of a  
magnetic field into a plasma)  
419.
- Rooney, P. G. (Functions ana-  
lytic in a half-plane) 293.
- Roos, J.-E. s. H. Gask 89.
- Roppert, Josef (Fréchet-  
Räume) 168.
- Roquette, Peter (Abspaltung  
des Radikals) 23.
- Rosati, Luigi Antonio (Gruppi  
di collineazioni dei piani di  
Hughes) 143.
- Rosçulet, Marcel N. (Formes  
extérieures) 21.
- Rose, Alan (Many-valued logi-  
cal machines) 244.  
— and J. Barkley Rosser  
(Many-valued statement cal-  
culi) 243.
- Roseau, Maurice (Problème  
aux limites de type mixte)  
205; (Théorie des ondes  
liquides de gravité) 410.
- Rosen, Edward (Maurolico's  
mathematical works) 3.
- Rosenblatt, S. (Aerofoil in un-  
steady motion between po-  
rous walls) 390.
- Rosenblatt, M. s. J. R. Blum  
129.
- Rosenbluth, M. N. s. W. M.  
MacDonald 447.
- Rosenstock, Herbert B. s.  
James C. Phillips 232.
- Rosina, B. A. (Spazi lineari  
contenuti in un'iper-super-  
ficie) 154; (Multilateri  
sghebbi connessi) 155.
- Rosmann, M. (Machines à cal-  
culer) 338.
- Rosner, Daniel E. (Chemically  
frozen boundary layers) 394.
- Rosser, J. Barkley s. Alan Rose  
243.
- Rossum, H. van (Systems of  
orthogonal polynomials) 60.
- Rothberger, F. (Ensemble  
transfiniment non-projectif)  
39.
- Rott, Nicholas (Magnetohy-  
drodynamic wave speed)  
213.
- Roumieu, Charles (Transfor-  
mation de Fourier des distri-  
butions généralisées) 98.
- Rudin, Walter (Independent  
perfect sets in groups) 100;  
(Idempotent measures on  
abelian groups) 101; (Weak  
almost periodic functions)  
325.
- Ruelle, D. (Spin isobarique)  
443.
- Rufener, E. (Gruppen gemisch-  
ter Versicherungen) 139.
- Rumjancev, V. V. (A. M. Lja-  
punov) 6.
- Runnenburg, J. Th. s. H. Ke-  
sten 348.
- Ruplis (Ruplys), B. P. (Under-  
ground contour of hydro-  
technical structures) 238.
- Ruse, H. S. (Tensor extensions  
of metrisable local Lie  
groups) 19.
- Rutecki, Jerzy (Vibration of  
space frames) 388.
- Ryndin, R. M. s. S. M. Bilenky  
223.
- Rytov, S. M. (Correlation theo-  
ry of thermal fluctuations)  
396.
- S-Palencia Serrano, Enrique  
(Reelle Lösungen der Sys-  
teme von zwei transzenden-  
ten Gleichungen) 108.
- Saavedra, I. (Electron-muon  
mass difference) 444.
- Saban, Giacomo (Caratterizza-  
zioni della sfera) 160.
- Šabat. B. V. s. A. O. Gel'fond  
6.
- Sabidussi, Gert (Minimum or-  
der of graphs) 379.
- Sack, R. A. s. H. C. Longuet-  
Higgins 227.
- Sacksteder, Richard s. Philip  
Hartman 83.
- Šafarevič (Shafarevich), I. R.  
(Imbedding problem for  
splitting extensions) 26.
- Sager, Günther (Jubiläum im  
Gezeitenrechenmaschinen-  
bau) 115; (Gezeitenrechen-  
maschinen) 338.
- Saito, Masahiko (Groupes ré-  
solubles) 258.
- Saitō, Tōru (Homomorphisms  
of a semigroup onto a group)  
253.
- Sakaguchi, Kōichi (Functions  
starlike in one direction) 296;  
(Univalent mapping) 296.
- Sakuma, Tetsuro s. Akira Ka-  
nazawa 441.
- Salem, R. s. J. P. Kahane 318.
- Salié, Hans (Wertevorrat der  
Dedekindschen Summen)  
268.
- Salmon, J. s. A. Brin 447.
- Salzer, Herbert E. and Gene-  
vieve M. Kimbro (Tables for  
bivariate oscillatory inter-  
polation) 279.
- Salzmann, Helmut (Vierecks-  
transitivität der kleinen pro-  
jektiven Gruppe einer Mou-  
fang-Ebene) 142.
- Samarski, A. A. s. A. N. Tychonoff  
81.
- Samet, P. A. s. H. J. Godwin  
26.
- Samuel, M. Pierre (Variété af-  
fine formale) 363.
- Sanchez Perez, A. s. Perez, A.  
Sanchez 7.
- Sandee, J. s. C. J. van Eijk 358.



- Sankaran, Munuswamy (Nair's transformation of the correlation coefficient) 137; (Non-central chi-square distribution) 137.
- Sapa, V. A. s. I. D. Moljukov 177.
- Sargan, J. D. (Instability of Leontief dynamic model) 358.
- Sarhan, A. E. and B. G. Greenberg (Tables for best linear estimates) 356.
- Sasiada, E. (Directly indecomposable Abelian groups. II.) 17; (Every countable and reduced torsion-free Abelian group is slender) 17; (Isomorphism of decompositions of torsion-free Abelian groups) 17.
- Satō, Takeshige s. Yoshikatsu Watanabe 132.
- Sauter, Fritz (Differentialgleichungen der Physik) 81.
- Savel'ev (Saveliev), S. I. (Surfaces with plane generatrices) 368.
- Savignon, Edouard (Capitalisation collective viagère) 138.
- Savvinyeh, S. s. V. Pokrovskij 415.
- Saxena, R. B. and A. Sharma (Interpolatory properties of Legendre polynomials) 51.
- Saxon, David S. s. Mildred Moe 432.
- Sayied, A. M. (Čerenkov effect in composite media) 211.
- Schaaf, William L. (Recreational mathematics) 1.
- Schaeffer, A. C. s. R. P. Boas jr. 53.
- Scherk, Peter (Note by H. Schwerdtfeger) 11.
- Schinz, A. s. A. Makowski 29.
- Schirmer, H. und J. Friedrich (Elektrische Leitfähigkeit eines Plasmas. II.) 447; (Wärmeleitfähigkeit eines Plasmas) 447.
- Schlechtweg, H. (Identität von Gleitlinien und Charakteristiken) 192.
- Schlegelmilch, Werner (Überspannungen an der einfachen Elektrode) 450.
- Schmidler, F. (Integrale von dynamischen Gleichungssystemen) 302.
- Schmolvsky, K.-H. s. P. Beckmann 114.
- Schmidt, C. M. s. A. J. Hana-walt 202.
- Schmidt, E. T. s. G. Grätzer 20.
- G. (Plasmas in external magnetic fields. II.) 214.
- Schmutzer, Ernst (Variante der projektiven Relativitätstheorie) 427.
- Schneider, Hans (Fundamental theorem on irreducible non-negative matrices) 11.
- s. J. L. Mott 127.
- Schnell, W. und G. Fischer (Beulwerte von Platten) 385.
- Schoenberg, I. J. (Spline functions) 337.
- Scholz, N. (Umschlag) 200.
- Schöpf, Hans-Georg (Energie des Gravitationsfeldes) 427.
- Schopp, J. (Extremaleigenschaften der Ecktransversalen des  $n$ -dimensionalen Simplex) 150.
- Schubart, Hans (Grenzamplitude selbstregter Schwingungen) 74.
- Schubauer, G. B. (Mechanism of transition at subsonic speeds) 198.
- Schubert, Horst (Semisimpliziale Komplexe) 171.
- Schuler, Max (Mechanische Schwingungslehre. 1.) 178.
- Schwartz, L. (Distributions. II.) 97.
- Schwarz, Štefan (V. Kořínek) 6.
- Schweizer, Berthold et Abe Sklar (Espaces métriques aléatoires) 125.
- Schwerdtfeger, H. (Discriminant  $x'Ax \cdot y'Ay - (x'Ay)^2$ ) 11.
- Sconzo, Pasquale (Problema fondamentale della navigazione astronomica) 176; (Determinazione di un'orbita) 235.
- Scott, Elizabeth L. s. Jerzy Neyman 429.
- Seal, K. C. (Linear function of order statistics) 133.
- Šedivá, Vera (Collectionwise normal and hypocompact spaces) 169.
- Sedláček, Jiří (Konstruktionen gerichteter Graphen) 379.
- Seeger, Alfred s. Ekkehart Kröner 386.
- Segal, I. E. (Dynamical systems of infinitely many degrees of freedom. I.) 218.
- Seibert, Peter (Problem of Mazurkiewicz) 175.
- Seidenberg, A. (Theorem of Erdős and Szekeres) 150.
- Seitz, Frederick and David Turnbull (editors) (Solid state physics) 230.
- Seligman, G. B. (Liesche Algebren) 257.
- Selmer, Ernst S. (Preceding paper by V. Brun) 114.
- Semadeni, Z. (Fonctionnelles linéaires dans des espaces vectoriels semiordonnés) 320.
- Semendjajew, K. A. s. I. N. Bronstein 1.
- Sen, D. C. s. J. M. Chen 221.
- Sengupta, H. M. and B. K. Lahiri (Derivatives of a function) 45.
- Šepelenko, F. P. s. Ju. N. Demkov 218.
- Septier, Albert (Bipartition d'un faisceau de particules) 211.
- Serrano, Enrique S.-Palencia s. S.-Palencia Serrano, Enrique 108.
- Severi, Francesco (Genere aritmetico d'una ipersuperficie) 153.
- Sevruk, I. G. (Abkühlung einer in Flüssigkeitsschicht getauchten Kugel) 194.
- Shaffer, D. H. s. R. M. Durstine 313.
- Shapiro, Arnold (Imbedding of a complex in a euclidean space. I.) 377.
- Shapley, L. S. (Solution containing an arbitrary closed component) 130; (Symmetric market game) 138.
- Sharma, A. s. R. B. Saxena 51.
- Sharp, David (Variational principle for geometrodynamics) 428.
- Shell, D. L. s. A. Spitzbart 279.
- Shen, S. F. (Thermal energy in boundary layer type flows) 195.
- Shepherd, A. A. (Semiconductors) 452.
- Shimada, Nobuo s. Masahisa Adachi 173.
- Shoemaker, E. M. s. F. Edward Ehlers 201.
- Shoenfield, J. R. (Open sentences) 245.
- Sholander, Marlow (Postulates for commutative groups) 255.
- Shrikhande, S. S. s. R. C. Bose 9.
- Shukla, H. S. (Theorems of Cayley and Orr type) 290.
- Sibuya, Masaaki (Modal intervals for chi-square distributions) 134.
- Sicik, A. F. s. W. M. Bradis 266.

- Sideriades, L. (Systèmes non-linéaires) 73; (Méthodes topologiques dans un espace à trois dimensions) 76.
- Sidlovskij, A. B. (Algebraische Unabhängigkeit der Werte ganzer Funktionen) 273.
- Sieber, Norbert s. Horst Stenker 108.
- Sieklucki, K. (Sets admitting the Tschebycheff systems) 54.
- Sierpiński, W. (Warsaw school of mathematics) 6; (Ensembles de points aux distances rationnelles situés sur un cercle) 273.
- Sikorski, R. (Examples of Borel sets) 39.
- Silverman, R. J. and Ti Yen (Addendum to invariant means and cones) 95; (Hahn-Banach theorem) 95.
- Simonov, N. I. (Entwicklung der Theorie der Differentialgleichungen durch L. Euler) 5.
- Singer, I. (Dual du théorème de Hahn-Banach) 95; (Homöomorphismus unendlich-dimensionaler separabler Banachscher Räume) 319.
- Siraždinov, S. Ch. (Additive Aufgabe mit wachsender Anzahl der Summanden) 350; (Lokaler Satz) 350.
- Širokov A. P. s. P. A. Širokov 367.
- P. A. und A. P. Širokov (Affine Differentialgeometrie) 367.
- (Širokov), Ju. M. (Ju. M.) (Group-theoretical consideration of the basis of relativistic quantum mechanics. I—III.) 216; (IV.) 430.
- — M. F. (Velocity and temperature discontinuities near the walls of a body) 202.
- Sitenko, A. G. s. A. I. Achiezer 404.
- Šitikov, B. N. s. G. A. Michajlov 115.
- Sitnikov, K. A. (Kombinatorische Topologie nichtabgeschlossener Mengen. III.) 374.
- Sklar, Abe s. Berthold Schweizer 125.
- Skljarenko (Sklarenko), E. (Bicompact extensions of semibicompact spaces) 169.
- Slater, John C. (Interaction of waves in crystals) 232.
- Slibar, Alfred and Paul R. Paslay (Retarded flow of Bingham materials) 388.
- Slowikowski, W. (Metric semilattices) 40.
- Slugin, S. N. (Newton's method and Chaplygin's method) 328.
- Smirnov, A. D. (Mathematische Maschinen) 338.
- Ju. (Yu.) (Completely regular non-semibicompact space) 169.
- L. P. und M. A. Pavlichina (Wirbelspur bei Umströmung schwingender Zylinder) 390.
- V. I. (L. Euler) 5.
- Smith, Herschel F. (Prime pair problem) 267.
- J. H. B. s. K. W. Mangler 200.
- Walter L. (Renewal theory) 348.
- Smithies, F. (J. R. Womersley) 7; (John von Neumann) 7.
- Sneddon, I. N. s. J. Fulton 190.
- Soberman, Robert K. (Onset of convection in liquids) 194.
- Sobolev, V. V. (Strahlungsdiffusion) 207; (Diffusion of radiation in a flat layer) 207.
- Sokolik, H. s. D. Ivanenko 220.
- Sokolowski, Marek (Thermoelectric problem of infinite cylinder) 385.
- Soločev, V. G. (Green's functions of fundamental particles) 443.
- Somerville, Paul N. (Tables for non-parametric tolerance limits) 134.
- Soós, Gy. (Geodätische Abbildungen von Riemannschen Räumen) 369.
- Sorace, Orazio (Problema di W. Blaschke) 368.
- Souza Ávila, Geraldo Severo de s. Ávila, Geraldo Severo de Souza 83.
- Spalding, D. B. (Transport processes between fluids and clouds of suspended particles) 397.
- Spampinato, Nicolò (Calcolo del genere di una curva gobba) 364.
- Spector, Clifford (Incomparable hyperdegrees) 249.
- Spencer, A. J. M. (Finite elastic deformations) 386.
- Spitzbart, A. and D. L. Shell (Chebycheff fitting criterion) 279.
- Spreiter, John R. (Aerodynamics of wings and bodies at transonic speeds) 400.
- Sprott, D. A. (Stability of a sex-linked allelic system) 140.
- Spruch, Larry and Wallace Gold (Coulomb corrections) 224.
- Spuy, E. van der (Effective atomic field for electron scattering) 226.
- Srinivasan, R. (Elastic constants of calcium fluoride) 381.
- Srivastav, R. P. (Zeros, poles and mean value of meromorphic functions) 66.
- Srivastava, Pramila (Summability factors) 49; (Summability factors of a Fourier series) 57.
- Satish Chandra s. Satya Prakash 228.
- Stam, A. J. (Inequalities satisfied by quantities of information) 347.
- Stanciu, P. (Submersion d'une variété riemannienne) 369.
- Stange, K. (Pläne für messende Prüfung) 136; (Probenahme vom Band) 354.
- Stanjukovič (Staniukovich), K. P. (Shock waves in a conducting ultrarelativistic gas) 213; (Motion of bodies at high velocities) 426.
- Starčenko, L. P. (Konstruktion von Folgen) 272.
- Štarkman, V. S. (Ökonomie der arbeitenden Zellen im PP 2) 118.
- Stehle, P. (Electron-electron scattering) 219.
- Stein, Elias M. (Maximal function) 56; (Localization and summability of multiple Fourier series) 284.
- Stenker, Horst und Norbert Sieber (Reduktionssatz über Umkehrmatrizen) 108.
- Stepanov, B. M. (Dispersion relations for scattering of pions by nucleons) 441.
- Stinespring, W. Forrest (Integration theorems for gages) 102; (Integrability of Fourier transforms for unimodular Lie groups) 103.
- Stojanović, Ilija (Verzerrung eines frequenz-modulierten Signals) 414.
- Storchi, Edoardo (Problema plastico della deformazione piana) 192.
- Strand, Torstein s. F. Edward Ehlers 201.
- Strasman, Pierre s. Georges Boulgue 449.
- Striebel, Charlotte T. (Estimates of trend in the Ornstein Uhlenbeck process) 136.



- Stroffolini, R. s. V. De Alfaro 442.
- Strubecker, Karl (Komplexflächen bei euklidischen Schraubungen) 161.
- Sturrock, P. A. (Kinematics of growing waves) 448.
- Suffczyński, M. (Three-centre integrals in iron) 226.
- Sukhatme, Balkrishna V. (Hypothesis that two populations differ only in location) 354.
- Summers, Robert (Least squares bias) 358.
- Sun, Ché-shén (Khe-shen) (Rigidity of an unclosed surface) 160.
- Jun-shen (Approximation periodischer differenzierbarer Funktionen) 281.
- Sunyer Balaguer, F. (Bestimmung einer Funktion durch ihre Derivierten) 45.
- Šura-Bura, M. R. s. S. S. Kamynin 117.
- Susskind, Alfred K. (edited by) (Analog-digital conversion techniques) 116.
- Sutherland, A. B. (Series for distant zeros of exponential polynomials) 59.
- Suzuki, Haruo (Realization of homology classes by submanifolds) 375.
- Jingoro (Completely normal spaces) 372.
- Michio (Finite groups) 16.
- Takesi s. Yoshikatsu Watanabe 132.
- Tatsuzo s. Yasushi Taga 355.
- Yukio (Scheduling of overtime work) 358.
- Švarc (Schwarz), A. S. (Genus of fiber space) 377.
- Švedov (Shvedov), I. (Homeomorphism of polyhedra and point sets) 373.
- Švejkin (Shveikin), P. I. (Invariant constructions) 165.
- Svoboda, Karel (Surfaces sphériques) 162.
- s. Miroslav Novotný 6.
- Świerczkowski, S. (Intersection of a linear set with translation of its complement) 266; (Successive settings of an arc on the circumference of a circle) 272.
- Sz.-Nagy, Béla et Ciprian Foiş (Contractions de l'espace de Hilbert. III.) 99.
- Szarski, J. et T. Ważewski (Intégrales asymptotiques des équations différentielles) 305.
- Szász, Gábor (Struktur komplementärer Verbände) 259.
- Taga, Yasushi and Tatsuzo Suzuki (Average length of chains) 355.
- Takabayasi, T. (Relativistic particle with internal rotational structure) 431.
- Takács, L. (Coincidence problem concerning telephone traffic) 126.
- Takasu, Tsurusaburo (Seitenstück der Relativitätstheorie) 427.
- Takeda, Zirô s. Masahiro Nakamura 99.
- Takeno, Hyôitirô (Plane wave solutions in general relativity I.) 427.
- Talacko, Joseph (Family of Perks' distribution) 139.
- Talaljan, A. A. (Universelle Orthogonalreihen) 286.
- Talwar, S. P. (Hydromagnetic stability of a conducting fluid) 213.
- Tanaka, H. s. D. Ito 434.
- Minoru (Number of prime factors of integers. III.) 268.
- Tani, I. (Unsteady boundary layer flow) 394.
- Taniuti, Tosiya s. Yusuke Kato 404.
- Tanner, R. I. (Hydrodynamic lubrication of joints) 396.
- Tanno, Yûkichi (Convolution transform) 319.
- Tarasov, Ju. A. (Iu. A.) (Bound states in positronium) 432.
- Tarnove, Ivin (Eigenvalues of matrices) 109.
- Tatsumi, T. (Stability of laminar flows) 200.
- Tavcheliǰze (Tavkheldiǰe), A. N. s. A. A. Logunov 437, 438.
- Teicher, H. s. H. Chernoff 351.
- Teljakovskij (Telakovsky), S. A. (Approximation of differentiable functions) 280.
- Temko, K. V. (Absolute Konvergenz trigonometrischer Reihen) 282.
- Temperley, H. N. V. (Mayer cluster integrals) 228.
- Tenenbaum, Morris s. Salomon Bochner 318.
- Teodorescu, Petre P. (Problème plan de l'élasticité. I—VI.) 383.
- Ter-Mikayelian, M. L. (Multiple scattering) 226.
- Terol, Procopio Zoraa s. Zoraa Terol, Procopio 357.
- Terracini, Alessandro (Elementi curvilinei piani) 367; (Sistemi  $\infty^2$  di linee spaziali) 368.
- Tevikian (Tevikian), R. V. (Perturbation theory formulas) 439.
- Thacher jr., Henry C. (Linear dependence) 13.
- Thébault, Victor (Géométrie élémentaire) 149.
- Thomas, Emery (Pontrjagin cohomology operations) 375.
- s. Ioan James 258.
- Ivo (12th century paradox of the infinite) 2.
- T. Y. (Velocity of formation of Lüders bands) 388.
- Thompson, Dorothea M. and Gerald L. Thompson (Bibliography of game theory) 132.
- Gerald L. s. Dorothea M. Thompson 132.
- Thron, W. J. (Zwillingskonvergenzgebiete für Kettenbrüche) 50.
- Tideman, M. (Old inequality) 51.
- Timan, A. F. (Beste Approximation differenzierbarer Funktionen) 279.
- Tipei (Tipej), N. (Instationäre Bewegung eines Flugzeuges) 408.
- Tixaire, A. Galinda s. L. M. Garrido 445.
- Todd, John s. Erwin Kreyszig 66.
- s. Morris Newman 343.
- Toll, John S. s. Morton Lutzky 219.
- Tonnelat, Marie-Antoinette (Théorie électromagnétique et la relativité) 420.
- Toro, T. s. M. Zăgănescu 208.
- Touschek, B. (Pauli transformation) 430.
- Townsend, A. A. (Effects of radiative transfer on turbulent flow) 240.
- s. G. K. Batchelor 397.
- Transactions of the first Prague conference on information theory 123.
- Treder, H. (Aufsatz von S. I. Husain) 428.
- s. D. Geissler 427.
- Trees, R. E. s. W. R. Bozman 445.
- Tricomi, Francesco G. (Resto delle formule di quadratura) 278.
- Trubnikov, B. A. (Plasma radiation in a magnetic field) 212.



- Trupin, Š. (Kollinearität und Komplanarität) 156.
- Trustum, G. B. (Sequences of integers) 266.
- Tsuji, Kazô (*W*-algebras and abstract (*L*)-spaces) 99.
- Ryôhei (Conformal mapping of a hyperelliptic Riemann surface) 69.
- Tsuneto, Toshihiko and Izuru Fujiwara (Relativistic wave equations with maximum spin two) 218.
- Tucker, A. W. and R. D. Luce (edited by) (Theory of games. IV.) 129.
- Turán, P. s. J. Balázs 51.
- s. E. Egerváry 52.
- Turnbull, David s. Frederick Seitz 230.
- Turquette, Atwell R. (Axioms for many-valued quantification theory) 245.
- Turri, Tullio (Trasformazioni birazionali involutorie negli iperspazi) 152; (Trasformazioni cicliche in  $S_r$ ) 152.
- Tychonoff (Tychonov), A. N. und A. A. Samarski (Samarskij) (Differentialgleichungen der mathematischen Physik) 81.
- Tzu, H. Y. s. J. M. Chen 221.
- Uchiyama, S. (Sommes de puissances des nombres complexes) 37.
- Ufford, C. W. s. F. R. Innes 445.
- Uhlmann, A. (Quantenmechanik mit indefiniter Metrik) 430; (Quantentheorien mit indefiniter Metrik) 431.
- Werner (Integrationsformeln von Newton-Cotes) 278.
- Uliniç, F. s. V. Pokrovskij 415.
- Ul'janov, P. L. (Unbedingte Konvergenz und Summierbarkeit) 283.
- Uno, Tomoko s. Yoshikatsu Watanabe 132.
- Urabe, Minoru (Van der Pol's equation) 123.
- Usui, Tunemaru (Landau's model of liquid He<sup>3</sup>) 230.
- Utumi, Yuzo (Theorem on modular lattices) 259.
- Vaghi, Carla (Energia di campi spazio-temporali emisimmetrici) 207.
- Väisälä, Jussi (Normal quasi-conformal functions) 298.
- Valat, Jean (Simulateur électromécanique d'une équation de Hill) 339.
- Vasilca, Gh. and Al. Nica (Operating characteristics of journal-bearings) 396.
- Vaught, R. L. s. W. Craig 246.
- Veksler (Vexler), A. I. (Archimedean principle in semi-ordered factor lineals) 94.
- V. I. (Streuung eines Drahtnetzes auf geladene Teilchen) 417.
- Ven, A. J. H. M. van de (Formulae of Kundert) 376.
- Veselov, M. G. und I. B. Bersuker (Adiabatische Annäherung in der Quantentheorie der Atome) 226.
- Vickrey, William (Self-policing properties of imputation sets) 131.
- Viola, Tullio (Poligoni equivalenti per traslazione) 148.
- Vitt, A. A. s. A. A. Andronov 178.
- Vodička, Václav (Durch Massenkräfte beanspruchtes elastisches Medium) 185.
- Volkov, V. I. (Sequences of linear positive operators) 105.
- Volpato, Mario (Problema di Cauchy per equazioni differenziali quasi lineari) 81.
- Vooys, C. J. (Kaninchenaufgabe von Fibonacci) 2; (Ferrarische Lösung) 4.
- Vorob'ev (Vorobiev), N. N. (Reduced strategies for games) 352.
- Voronovskaja (Voronovskaya), E. V. (Closest uniform approximation of polynomials) 279.
- Voss, K. (Weingartensche Flächen) 159.
- Votavová, Libuše (Satz von Extremen der Entropie) 124.
- Vries, H. de s. J. de Groot 171.
- Výborný, Rudolf (Randwertaufgaben einer parabolischen partiellen Differentialgleichung) 86.
- Wada, Yasushi s. Tatuoki Miyazima 223.
- Wagh, R. V. (Fluid sphere in relativity) 426.
- Wagner, A. (Perspectivities of finite projective planes) 143.
- s. T. G. Ostrom 143.
- Richard (Strömungsproblem) 389.
- Wakakuwa, Hidekiyo (Riemannian manifolds) 163.
- Wakulicz, A. s. Z. Pawlak 342.
- Walker, Elbert A. (Subdirect sums) 255.
- Wallace, Andrew H. (Analytic equivalence of algebroid curves) 363.
- Walsh, John E. (Efficient small sample nonparametric median tests) 355.
- Wan, Zhe-xian (Automorphisms of linear groups) 257.
- Wang, Yao-sen s. Yi-ping Shieh 239.
- Wardle, S. s. D. E. Bourne 393.
- Warmus, M. (Nomographic functions) 114.
- Watanabe, Yoshikatsu und Yoshihiro Ichijo (Laplace-sche asymptotische Formel) 93.
- —, Tadayuki Yamamoto, Takeshige Satô, Takaaki Fujimoto, Mamoru Inoue, Takeshi Suzuki und Tomoko Uno (Order statistics) 132.
- Watari, Chinami (Walsh Fourier series) 58.
- Wazewski, T. s. J. Szarski 305.
- Webster, Arthur Gordon (Dynamics of particles) 176.
- Wegstein, J. H. (Accelerating convergence of iterative processes) 333.
- Wei, Chau-Chin (Relativistic hydrodynamics for a charged nonviscous fluid) 213.
- Weibel, Erich S. (Stable orbits of charged particles) 417.
- Weier, Joseph (Homomorphismus bei Transformation von Sphären) 172; (Matrices de torsion caractéristiques de M. G. de Rham) 375.
- Weimer, K. s. K. H. Höcker 224.
- Weiner, J. H. s. H. G. Landau 385.
- Weisner, Louis (Generating functions for Hermite functions) 61; (Generating functions for Bessel functions) 62.
- Weiss, George H. s. Alexei Maradudin 232.
- Mary and Antoni Zygmund (Smooth functions) 57.
- Welch, B. L. ("Student" and small sample theory) 137.
- jr., Jasper A. and William A. Whitaker (Geomagnetically trapped electrons) 239.
- Weston, J. D. (Egoroff's theorem) 274.
- Wette, R. (Regressions- und Kausalanalyse in der Biologie) 359.
- Whaples, G. (Degree-*n* independence) 14.
- Whitaker, William A. s. Jasper A. Welch jr. 239.



- White, Paul A. (Computation of eigenvalues) 333.  
 — jr., F. M., B. F. Barfield and M. J. Goglia (Laminar flow in a porous channel) 393.  
 Whiteley, J. N. (Inequalities concerning symmetric forms) 11.  
 Whitham, G. B. (Problems of shock dynamics. II.) 403.  
 Whittle, P. (Tehebichev's inequality) 352.  
 Whyburn, William M. s. Paul H. Daus 357.  
 Wickleder, Karl-Heinz (Bewegungsvorgänge von Körpern auf bewegter Fläche) 182.  
 Wiegandt, Richard (Complete semi-groups) 252; (Complete semi-modules) 253.  
 Wigner, Eugene P. (Roots of certain symmetric matrices) 132; (Group theory) 379.  
 Wilf, Herbert S. (Tables for automatic computation) 337.  
 Wilhelmsson, H. s. G. Källén 435.  
 Wille, R. (Umschlag) 200.  
 Williams, R. F. (Local contractions) 170.  
 Wilson, R. (Hadamard product) 292.  
 — jr., Raymond H. (Nomo-graphic solutions for position relations) 338.  
 Winter, Eduard (Registres der Berliner Akademie der Wissenschaften 1746—1766) 5.  
 Wintner, Aurel (Sine approximations to convex arches) 53; (Heaviside's and Mittag-Leffler's generalizations of the exponential function) 64; (Schwarzian derivative) 70.  
 Wittich, H. s. H. P. Künzi 294.  
 Witting, H. s. H. Görtler 198.  
 Wobus, Gerhard (Praxis der Tosbeckenbemessung) 411.  
 Wood, W. W. s. W. Fickett 203.  
 Wortmann, F. X. (Grenzschicht-Absaugung) 394.  
 Wright, Jesse B. s. Calvin C. Elgot 340.  
 Wuest, W. (Periodische Absaugegrenzschichten) 394.  
 Wuyts-Torfs, M. (Eulersches Summierungsverfahren) 48.  
 Yamada, Masami s. Fumiaki Iwamoto 222.  
 — Miyuki (Idempotent semi-groups. V.) 252.  
 Yamamoto, Tadayuki s. Yoshikatsu Watanabe 132.  
 Yancey, T. A. s. W. A. Neiswanger 137.  
 Yang, C. N. s. T. D. Lee 229.  
 Yano, Kentaro (Affine connexions in an almost product space) 165.  
 Yatsiv, Shaul (Multiple-quantum transitions) 223.  
 Yen, Ti s. R. J. Silverman 95.  
 Yih, Chia-Shun (Inviscid rotational flow with corner eddies) 389.  
 — Shia-Shun (Inhibition of hydrodynamic instability) 198.  
 Yitzhaki, David (Prismatic and cylindrical shell roofs) 189.  
 Yokota, Ichiro (Homogeneous spaces of classical Lie groups) 258.  
 Yos, Jerrold M., William L. Bade and Herbert Jehle (London-Eisenschitz wang force) 228.  
 Yoshida, Michio (Noetherian rings) 264.  
 Young, L. C. (Chapter of the integral) 43.  
 — W. H. s. N. H. March 215.  
 Zaat, J. A. (Stabilitätstheorie der Grenzschichten) 199.  
 Zacks, S. s. J. Frenkiel 240.  
 Zăgănescu, M. (Hodographe du mouvement du point matériel) 421.  
 — et T. Toro (Fonction  $\delta$  de Dirac dans l'électrodynamique) 208.  
 Zaidman, S. (Presque-périodicité des solutions de l'équa-tion des ondes non homogène) 89.  
 Zajcev, M. N. (Systeme analytischer Funktionen) 291.  
 Zamansky, Marc (Groupes de Riesz) 43.  
 Zanaboni, Osvaldo (Fenomeni detti di instabilità progressiva) 381; (Soluzione mediante serie delle travi snelle pressoinflesse) 382.  
 Zappa, Guido (Piani affini finiti con traslazioni) 144; (Piani grafici) 144.  
 Zariski, Oscar (Problem of minimal models) 362; (Castell-nuovo's criterion) 362.  
 Žautykov, O. A. (Mathematik in Kasachstan) 6.  
 Zawadzki, Jerzy (Deformations-hypothese der sphärischen Polymeren) 381.  
 Zedlitz, Otto („Kristall“ auf Dürers Stich „Melencolia I“) 2.  
 Železcov, N. A. s. A. A. Andronov 178.  
 Zeller, K. (Limitierungsverfahren) 46.  
 — s. G. G. Lorentz 47.  
 Zil'berman, Ja. S. (I. S.) (Analyse cinématique des mécanismes) 183.  
 Zitomirskij, Ja. I. (Cauchy-sches Problem für parabolische Systeme) 85.  
 Zlámal, Miloš s. Miroslav Novotný 6.  
 Zoroa Terol, Procopio (Probleme des kürzesten Gesamt-weges) 357.  
 Zuckerman, Herbert S. s. Edwin Hewitt 100.  
 Zumino, Bruno (Equations of statistical equilibrium) 446.  
 Zyczkowski, Michal (Finite deflections of elastic-plastic beams) 386.  
 Zygmund, A. (Trigonometric series. 1, 2.) 56.  
 — Antoni s. Mary Weiss 57.